

MECANIQUE DES SOLIDES

ELASTICITE

A. ALLICHE
Maître de Conférences - Paris 6

SOMMAIRE

CHAPITRE I - STATIQUE ET REPRESENTATION DES ACTIONS MECANIQUES 4

1– Torseur statique.....	4
1 – 1 - Action mécanique.....	4
1 - 2 - Torseur statique.....	6
2 – Classification des actions mécaniques	7

CHAPITRE II - TENSEUR DES CONTRAINTES 12

1 – Notion d’effort intérieur, contrainte autour d’un point	12
1 - 1 – Efforts intérieurs.....	12
1 - 2 – Vecteur d’effort local, contrainte autour d’un point.....	13
1 - 3 – Composantes normales et tangentielles du vecteur contrainte.....	15
2 – Tenseur des contraintes	16
2 - 1 –Equilibre d’un tétraèdre et analyses des forces locales - Tenseur des contraintes.....	16
2 - 2 – Equation d’équilibre locale, symétrie du tenseur des contraintes.....	20
2 - 3 – Contraintes principales.	24
2 - 4 – Etat plan des contraintes	27
2 - 5 – Cercle de Mohr des contraintes	30
2 - 6 – Etats des contraintes particuliers	35
2 – 7 – Conditions aux limites.....	38

CHAPITRE III - TENSEURS DES DEFORMATIONS..... 40

1 - Introduction.....	40
2 – Transformations dans un milieu solide	41
2 – 1 - Vecteur déplacement, dilatation et distorsion	41
2 – 2 – Tenseur des déformations.....	43

CHAPITRE IV - LOIS DE COMPORTEMENT 53

1 – Expérimentation	53
1 – 1 Introduction	53
1 – 2 Essais mécaniques	53
2 – Relations de comportement en élasticité	55
2 – 1 Etat de traction et compression dans deux directions orthogonales	55
2 – 2 Etat de cisaillement pur	57
2 – 3 Loi de Hooke généralisée	60
3 – Problèmes particuliers d'élasticité	63
3 – 1 Contraintes planes	63
3 – 2 Déformations planes	64
3 – 3 Problèmes axisymétriques	65
3 – 4 Recherche de solutions dans le cas de l'élasticité plane. Fonction d'Airy	67
4 - Méthode de résolution des problèmes en élasticité linéaire.	69
4 – 1 Rappels des équations	69
4 - 2 – Méthode des déplacements	70
4-3 Méthode des contraintes	73
CHAPITRE V - EXTENSOMETRIE EXPERIMENTALE	75
1 – Introduction	75
2 – Principe	75
3 – Rosettes de jauges	78
ANNEXE 1 : CALCULS VECTORIELS	82
ANNEXE 2 : TORSEURS	85

CHAPITRE I - STATIQUE ET REPRESENTATION DES ACTIONS MECANIQUES

1– Torseur statique

1 – 1 - Action mécanique

On appelle action mécanique toute cause susceptible de maintenir un corps au repos, de créer ou modifier un mouvement, de créer une déformation.

Notion de force

On appelle force, l'action mécanique qui s'exerce mutuellement entre deux particules élémentaires, pas forcément en contact.

Une force appliquée en un point est modélisable par l'ensemble d'un point et d'un vecteur.

Exemple (P, \underline{F}) , P étant le point d'application de la force, (Δ) parallèle à \underline{F} et passant par P le support de la force. $\|\underline{F}\|$ est l'intensité de la force ; cette norme se mesure en newton (N).

Principe des actions mutuelles

Toute force d'une particule **1** sur une particule **2** implique l'existence d'une autre force qui lui est directement opposée de la particule **2** sur la particule **1**

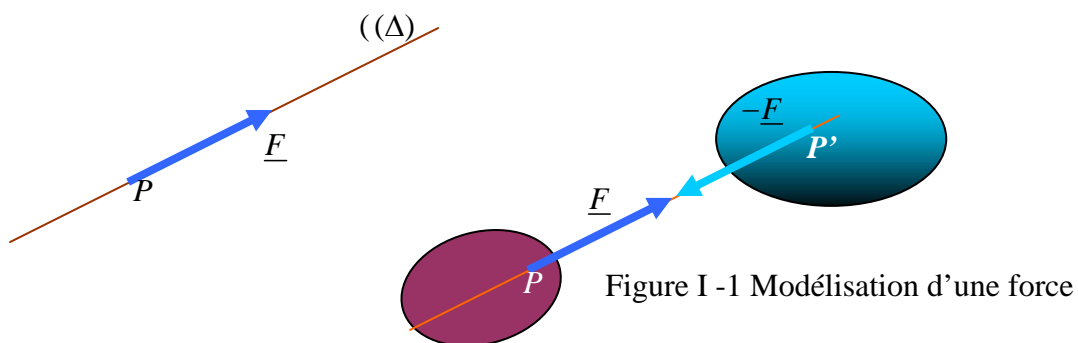


Figure I-1 Modélisation d'une force

Moment d'une force en un point

Au point A, on définit le moment de la force (P, \underline{F}) :

$$\underline{M}_A(\underline{F}) = \underline{AP} \wedge \underline{F} \quad (\text{I-1})$$

Unité : l'unité du moment est le newton mètre (N.m)

Cas de nullité : le moment de la force (P, \underline{F}) au point A est nul si le support de (P, \underline{F}) passe par A ou si $\|\underline{F}\|$ est nulle.

Relation fondamentale

Le moment de la même force (P, \underline{F}) au point B s'écrit :

$$\underline{M}_B(\underline{F}) = \underline{BP} \wedge \underline{F} \quad (\text{I-2})$$

soit en comparant avec l'expression du moment en A :

$$\underline{M}_B(\underline{F}) = \underline{M}_A(\underline{F}) + \underline{BA} \wedge \underline{F} \quad (\text{I-3})$$

Cette formule s'appelle la formule du transport du moment.

Moment d'une force par rapport à un axe

On appelle le moment d'une force (P, \underline{F}) par rapport à un axe $(O; \underline{x})$, la composante suivant \underline{x} du moment de (P, \underline{F}) par rapport à un point quelconque A de l'axe $(O; \underline{x})$.

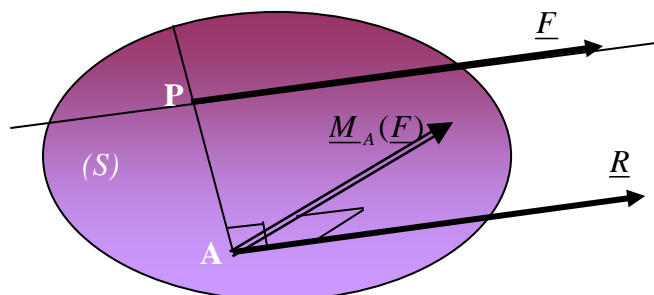
On note :

$$\overline{M}_{Ox} = \underline{M}_A(\underline{F}) \cdot \underline{x} \quad \forall A \in (O; \underline{x}) \quad (\text{I-4})$$

Cas de nullité :

Le moment d'une force (P, \underline{F}) par rapport à l'axe $(O; \underline{x})$ est nul si le support (Δ) de (P, \underline{F}) est sécant ou parallèle à l'axe $(O; \underline{x})$.

Champ de l'action mécanique d'une force sur un solide



Soit (P, \underline{F}) une force appliquée au point P de (S) .

L'action mécanique associée à la force (P, \vec{F}) se caractérise en point A quelconque par deux champs :

- un champ uniforme de résultante $\underline{R} = \underline{F}$,
- un champ de moment défini au point A par :

$$\underline{M}_A(\underline{F}) = \underline{AP} \wedge \underline{F} \quad (\text{I-4})$$

On démontre que ce champ est equiprojectif.

1 - 2 - Torseur statique (voir annexe 2)

Définition

A la force (P, \underline{F}) , on peut associer le torseur statique $\{T\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \underline{R} \\ \underline{M}_A \end{array} \right\}$

$$\text{Avec : } \underline{R} = \underline{F} \text{ et } \underline{M}_A = \underline{M}_A(\underline{F}) = \underline{AP} \wedge \underline{F} \quad (\text{I-5})$$

Modélisation de l'action mécanique due à un ensemble de forces appliquées à un solide.

Si un solide est soumis de la part du milieu extérieur, que l'on notera ici (\bar{S}) , à une action mécanique définie par un ensemble de n forces (P_i, \underline{F}_i) $i = 1, n$, cette action mécanique est modélisable en un point A quelconque par un torseur $\{T_{\bar{S} \rightarrow S}\}_A$ tel que :

$$\{T_{\bar{S} \rightarrow S}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \underline{R}_{(\bar{S} \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \\ \underline{M}_{A(\bar{S} \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n \underline{AP}_i \wedge \underline{F}_i \end{array} \right\} \quad (\text{I-6})$$

- $\underline{R}_{(\bar{S} \rightarrow S)}$ est la résultante du torseur associé à l'action mécanique de $\bar{S} \rightarrow S$
- $\underline{M}_{A(\bar{S} \rightarrow S)}$ est le moment résultant au point A du torseur associé à l'action mécanique de $\bar{S} \rightarrow S$

Remarque : la répartition des forces n'est pas décrite par le torseur des actions mécaniques ainsi écrit. Cette répartition est indispensable à connaître dans les calculs de résistance des matériaux. Il faudra donc en tenir compte dans les calculs.

Expression analytique du torseur statique.

Dans une base $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ directe, on écrit :

- $\underline{R}(\bar{S} \rightarrow S) = X \underline{x} + Y \underline{y} + Z \underline{z} \quad (\text{I-7})$

-

- $\vec{M}_A(\bar{S} \rightarrow S) = L_A \underline{x} + M_A \underline{y} + N_A \underline{z} \quad \text{et donc : } (\text{I-8})$

-

$$\left\{ T(\bar{S} \rightarrow S) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}_{(\bar{S} \rightarrow S)}(X, Y, Z) \\ \underline{M}_{A(\bar{S} \rightarrow S)}(L_A, M_A, N_A) \end{array} \right\} \quad (\text{I-9})$$

2 – Classification des actions mécaniques

On classe les actions mécaniques selon leur mode d'action et leur nature. On distingue ainsi :

- les actions mécaniques qui s'exercent à distance telle l'action de la pesanteur et l'action d'un champ magnétique.
- les actions mécaniques de contact (l'action de l'eau sur une paroi de barrage - force de pression)

Les deux types d'actions peuvent s'exercer sous forme d'action ponctuelle, c'est-à-dire en un point de l'espace. Cette hypothèse est physiquement difficile à réaliser. On modélise cependant souvent des forces s'appliquant en un point du système par un vecteur force appliquée en ce point. Ce mode d'action est alors associé à un vecteur lié et donc sa représentation peut être faite à l'aide d'un glisseur (voir Annexe 2 en fin de cours).

L'ensemble des actions évoquées précédemment sont modélisées par des torseurs associés à des densités de force (sauf pour ce qui est de la force ponctuelle).

Nous allons successivement examiner les actions mécaniques à densité volumique de force puis surfacique ou linéique.

Action mécanique à densité volumique de force.

Considérons un système matériel (Σ) continu occupant un volume V de l'espace à trois dimensions. Chaque élément de volume dV autour d'un point courant M peut être sollicité par une force \underline{dF} . Cette force est supposée proportionnelle au volume de l'élément considéré :

$$\underline{dF} = \underline{r}dV \quad (\text{I-10})$$

Nous avons donc un glisseur associé au vecteur lié (M, \underline{dF}) .

On peut en déduire la densité de force volumique :

$$\underline{r} = \frac{\underline{dF}}{dV} \quad (\text{I-11})$$

\underline{r} est donc un vecteur densité volumique de force.

En mécanique des milieux continus, on se ramène à des grandeurs locales et l'on écrit :

$$\underline{r} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\underline{dF}}{dV} \quad (\text{I-12})$$

L'ensemble de ces forces \underline{dF} appliquées sur chaque élément de volume entourant le point courant M constitue un ensemble de glisseurs associés aux vecteurs liés (M, \underline{dF}) . L'ensemble de ces glisseurs constituent un torseur de résultante :

$$\underline{R} = \iiint_{(V)} \underline{r}(M)dV \quad (\text{I-13})$$

et de moment en un point A quelconque :

$$\underline{M}_A = \iiint_{(V)} \underline{AM} \wedge \underline{r}(M)dV \quad (\text{I-14})$$

Remarque : On peut aisément vérifier que cet ensemble de vecteur est bien un torseur. Il suffit pour cela d'écrire cette formulation en passant par un point B quelconque :

$$\begin{aligned}\underline{M}_A &= \iiint_{(V)} (\underline{AB} + \underline{BM}) \wedge \underline{r}(M) dV = \underline{AB} \wedge \iiint_{(V)} \underline{r}(M) dV + \iiint_{(V)} \underline{BM} \wedge \underline{r}(M) dV \\ &= \underline{M}_B + \underline{AB} \wedge \underline{R}\end{aligned}\quad (\text{I-15})$$

On se retrouve bien avec la forme d'un champ antisymétrique.

Exemple particulier : Champ de pesanteur uniforme.

La pesanteur terrestre agit sur l'ensemble des milieux matériels par l'intermédiaire d'une force à distance qui agit sur l'ensemble du milieu et donc sur le volume de matière constituant le milieu en question. Nous avons donc une action à densité volumique. Chaque élément de volume est de ce fait soumis à une force de la forme :

$$\underline{dF} = \underline{r} dV = \rho \underline{g} dV \quad (\text{I-16})$$

Dans ce cas la densité volumique de force est défini par :

$$\underline{r} = \rho \underline{g} \quad (\text{I-17})$$

Le torseur ainsi constitué pour tout le volume V a pour résultante :

$$\underline{R} = \iiint_{(V)} \rho(M) \underline{g} dV = m \underline{g} \quad (\text{I-18})$$

cette résultante représente le poids du système. m étant la masse totale du système.

Son moment en un point A est défini de la manière suivante :

$$\underline{M}_A = \underline{M}_G + \underline{AG} \wedge \underline{R} = \underline{AG} \wedge m \underline{g} \quad (\text{I-19})$$

Cette dernière expression est justifiée si l'on remarque que :

$$\underline{M}_G = \iiint_{(V)} \underline{GM} \wedge m \underline{g} dV = \underline{0} \quad (\text{I-11}) \text{ par définition du centre de masse } G.$$

Le torseur associé aux forces réparties de pesanteur de densité $\underline{r} = \rho \underline{g}$ est donc un glisseur associé au vecteur lié $(G, m \underline{g})$.

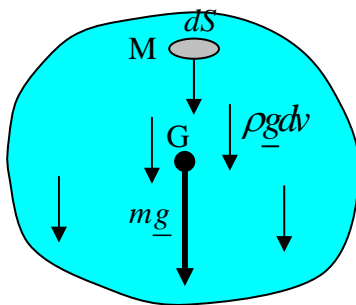


Figure I - 3 : Force de volume

Actions mécaniques à densité surfacique (ou linéique)

La même démarche peut-être suivie lorsqu'on traite des actions mécaniques à densité surfacique (ou linéique) :

Nous reprenons pour cela le solide (Σ) de frontière (S). Chaque élément de volume dS autour d'un point courant M de (Σ) peut être sollicité par une force :

$$\underline{dF} = \underline{r}dS \quad (\text{I-20})$$

Nous avons donc un glisseur associé au vecteur lié (M, \underline{dF}) .

On peut en déduire la densité surfacique (ou linéique) de force:

$$\underline{r} = \frac{dF}{dS} \quad (\text{I-21})$$

\underline{r} est donc un vecteur densité surfacique de force.

Comme pour les forces à densité volumique on se ramène à des grandeurs locales et l'on écrit :

$$\underline{r} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF}{dS} \quad (\text{I-22})$$

L'ensemble de ces forces \underline{dF} appliquées sur chaque élément de surface (ou de ligne) entourant le point courant M constitue un ensemble de glisseurs associés aux vecteurs liés (M, \underline{dF}) . L'ensemble de ces glisseurs constituent un torseur de résultante :

$$\underline{R} = \iiint_{(S)} \underline{r}(M) dS \quad (\text{I-23})$$

et de moment en un point A quelconque ::

$$\underline{M}_A = \iiint_{(S)} \underline{AM} \wedge \underline{r}(M) dS \quad (\text{I-24})$$

Remarque : Ici aussi on peut vérifier que cet ensemble de vecteur est bien un torseur. Il suffit pour cela d'écrire cette formulation en passant par un point B quelconque :

$$\begin{aligned} \underline{M}_A &= \iiint_{(S)} (\underline{AB} + \underline{BM}) \wedge \underline{r}(M) dS = \underline{AB} \wedge \iiint_{(S)} \underline{r}(M) dS + \iiint_{(S)} \underline{BM} \wedge \underline{r}(M) dS \\ &= \underline{M}_B + \underline{AB} \wedge \vec{R} \end{aligned} \quad (\text{I-25})$$

On se retrouve bien avec la forme d'un champ antisymétrique.

CHAPITRE II - TENSEUR DES CONTRAINTES

1 – Notion d'effort intérieur, contrainte autour d'un point

1 - 1 – Efforts intérieurs

L'application de sollicitations mécaniques sur un solide a pour conséquence l'apparition d'efforts intérieurs. Ces efforts équilibrent les sollicitations appliquées sur la frontière extérieure du solide et ont pour rôle de conserver l'intégrité du matériau. Il existe une méthode simple pour le calcul de ces forces de cohésion.

La démarche de calcul des forces intérieures est basée sur le principe fondamental de la statique que nous avons utilisé précédemment pour la détermination des inconnues de liaison. Pour pouvoir se servir du principe fondamental, l'approche de la coupe fictive permet d'accéder aux efforts intérieurs que l'on souhaite calculer (figure II -1)

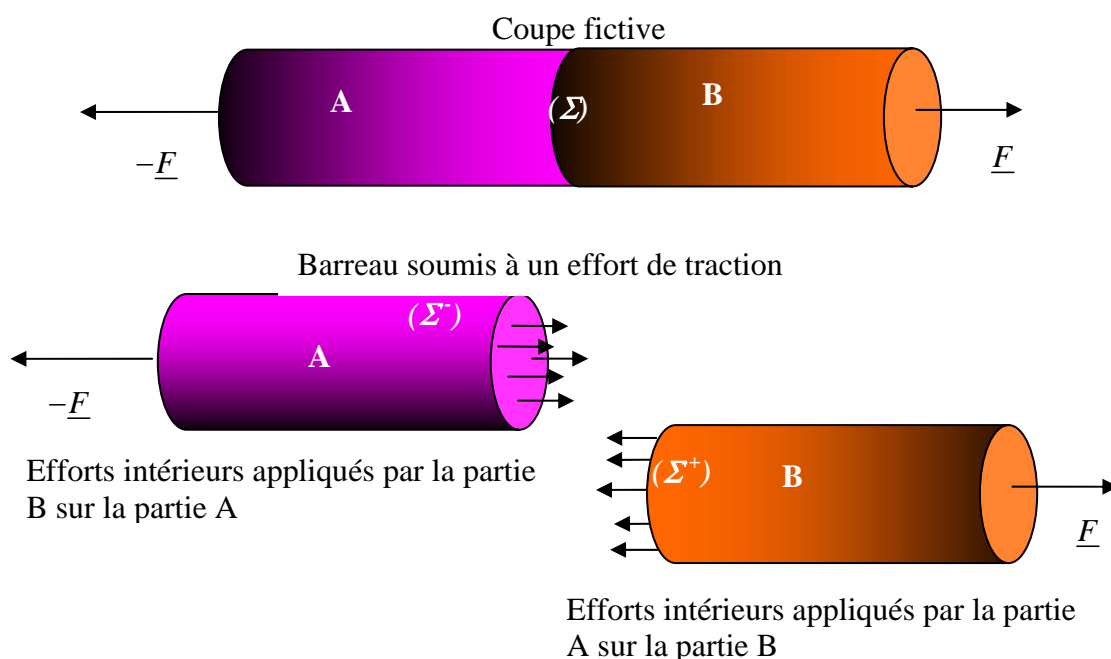


Figure II - 1 : Efforts extérieurs et efforts intérieurs : exemple du barreau en traction

Nous étudions un barreau sollicité en traction par deux forces F et $-F$ sur ses deux extrémités.

Nous allons considérer l'action mécanique appliquée par la partie **B** sur la partie **A** à travers leur surface commune (Σ) . Pour cela nous isolons mécaniquement **A** de son voisinage et remplaçons son action par des torseurs d'efforts qui sont inconnus pour l'instant. Sur la partie

A s'applique d'abord l'effort extérieur $-\underline{F}$ et les efforts de cohésion de la partie **B** que nous représenterons par le torseur $\begin{Bmatrix} \underline{R} \\ \underline{0} \end{Bmatrix}$. La résultante \underline{R} représente l'ensemble des efforts locaux sur

la surface de séparation (Σ) que nous avons choisie. Le moment du torseur est pris nul au centre de la surface commune pour la simplicité des calculs.

Nous pouvons alors appliquer le principe fondamental de la statique au sous-ensemble **A**. Pour que la partie **A** soit en équilibre sous l'action des efforts appliqués, l'équation suivante doit être vérifiée:

$$-\underline{F} + \underline{R} = \underline{0} \quad (\text{II-1})$$

Cette équation nous permet de calculer l'effort intérieur (pour le système) appliqué par la partie **B** sur la partie **A** :

$$\underline{R} = \underline{F} \quad (\text{II-2})$$

Un raisonnement analogue appliqué à la partie **B** nous donnerait :

$$\underline{R}' = -\underline{F} \quad (\text{II-3})$$

où \underline{R}' représente l'action de la partie **A** sur la partie **B**.

Ceci nous permet d'écrire que $\underline{R}' = -\underline{R}$. On reconnaît ici le principe de l'action et de la réaction entre les deux sous-ensembles **A** et **B**.

1 - 2 – Vecteur d'effort local, contrainte autour d'un point.

Nous venons de voir qu'un solide sur lequel s'applique des actions mécaniques extérieures développe des efforts intérieurs de cohésion. Ces efforts, on dit qu'ils sont en équilibre avec les torseurs des actions mécaniques extérieures. Le mode d'application de ces efforts est un élément important dans la conception des structures.

La connaissance des forces locales dans le solide permet de prévenir les ruptures et les endommagements que peut subir la structure. Pour identifier ces efforts locaux nous devons faire un certain nombre d'hypothèses sur la vitesse d'application de ces actions mécaniques extérieures qui doit rester relativement faible pour ne pas provoquer d'efforts dynamiques qui nécessite des méthodes de calcul différentes de celle que nous allons appliquer dans ce cours.

Par ailleurs les déformations induites doivent aussi rester faibles pour permettre des calculs sur la configuration non déformée du solide. Ce faisant, nous commettons une petite erreur qui semble acceptable dans un certain domaine de comportement du matériau. Nous traiterons de cette hypothèse lors du cours sur les déformations.

Afin de calculer les efforts de cohésion, nous procédons comme dans le paragraphe précédent en imaginant une coupure fictive. Considérons donc un solide occupant un domaine (D) sur lequel s'applique des efforts représentés par des torseurs définis sur des points de la frontière (S_f). Considérons une coupe fictive du solide. Soit (S) la surface de coupe, qui peut être plane ou non. Le domaine (D) occupé par le solide est divisé en deux sous-ensembles **A** et **B**. Nous allons analyser l'ensemble des efforts locaux appliqués par **B** sur **A** à travers leur surface commune (S).

Nous considérons un point M sur la surface (S). Soit dS un élément infinitésimal de surface de (S) entourant le point M. Par ailleurs, nous définissons la normale extérieure \underline{n} à l'élément dS orientée de **A** vers **B**. L'ensemble de l'élément de surface et de sa normale extérieure est nommé *facette*.

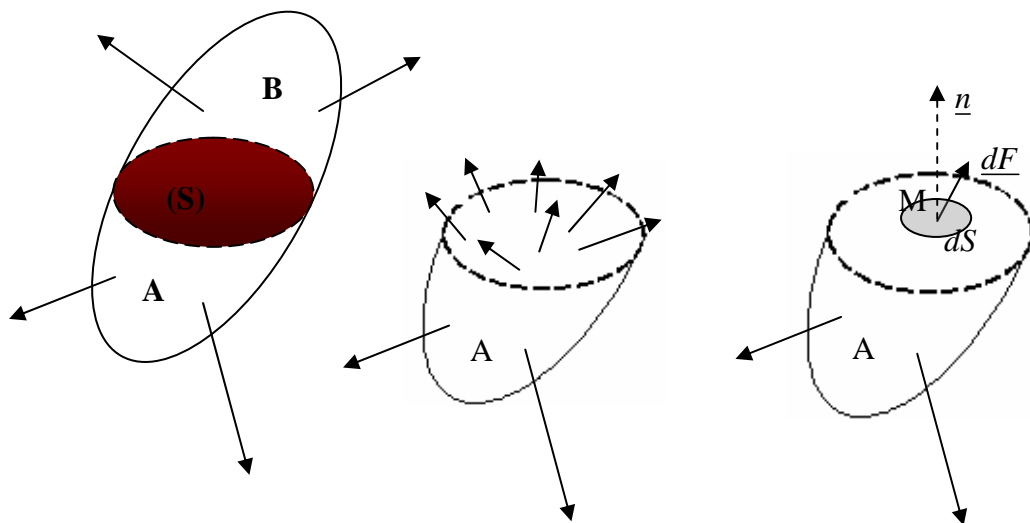


Figure II-2 : Force élémentaire sur une facette

Analysons l'effort \underline{dF} appliqué en M sur la facette. Si dS est suffisamment petite on peut considérer que cet effort est proportionnel à l'aire de la facette en question. Nous pouvons écrire donc l'effort comme le produit d'un vecteur densité surfacique de force que nous notons $\underline{T}(M, \underline{n})$ par l'aire de l'élément de surface dS :

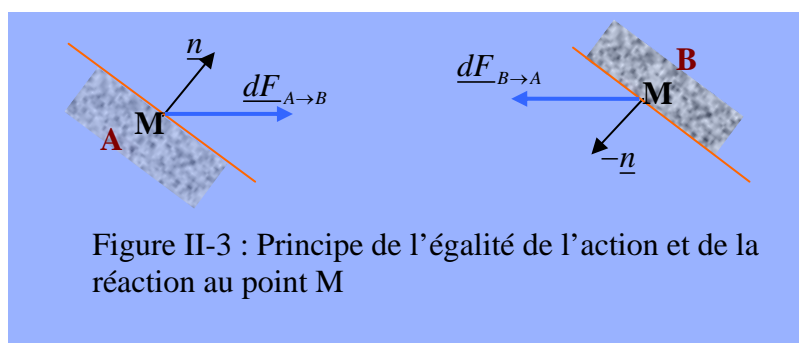
$$\underline{dF} = \underline{T}(M, \underline{n})dS \quad (\text{II-4})$$

La densité surfacique de force $\underline{T}(M, \underline{n})$ est plutôt appelé *vecteur contrainte*. Ce nouvel élément mécanique est relatif à un point M du milieu et dépend de l'orientation \underline{n} de la facette choisie.

Une autre définition du vecteur contrainte est souvent proposée :

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF}{dS} \quad (\text{II-5})$$

dF est la résultante des efforts élémentaires qui s'applique sur la facette.



Le principe de l'action et de la réaction démontré dans un chapitre précédent reste toujours applicable au point M commun aux deux parties **A** et **B**. Nous écrivons l'égalité suivante :

$$\underline{dF}_{B \rightarrow A} = -\underline{dF}_{A \rightarrow B} \Rightarrow \underline{T}(M, -\underline{n})dS = -\underline{T}(M, \underline{n})dS \quad (\text{II-6})$$

Soit :

$$\underline{T}(M, -\underline{n}) = -\underline{T}(M, \underline{n}) \quad (\text{II-7})$$

Cette dernière expression exprime le caractère linéaire de l'application précédente. Nous y reviendrons ultérieurement.

1 - 3 – Composantes normales et tangentielles du vecteur contrainte

Le vecteur contrainte défini précédemment peut être décomposé suivant la normale à la facette \underline{n} et sur le plan tangent à la facette au point M.

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \sigma \underline{n} + \underline{\tau} \quad (\text{II-8})$$

Dans cette expression, σ est la contrainte normale et traduit une densité d'effort de compression ou de traction au point M. La composante vectorielle $\underline{\tau}$ traduit les contraintes de cisaillement dans différentes directions du plan tangent en M à la facette.

σ est une valeur algébrique positive dans le cas d'une contrainte de traction et négative dans le cas d'une contrainte de compression.

Nous pouvons écrire la relation entre le vecteur contrainte et ses composantes :

$$\|\underline{T}(M, \underline{n})\|^2 = \sigma^2 + \|\underline{\tau}\|^2 \quad (\text{II-9})$$

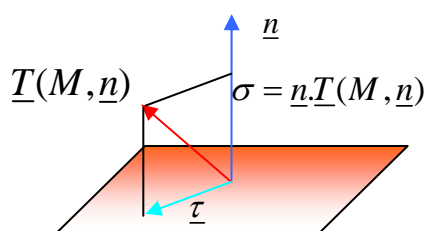


Figure II-4 : Décomposition du vecteur contrainte agissant au point M sur la facette de normale \underline{n}

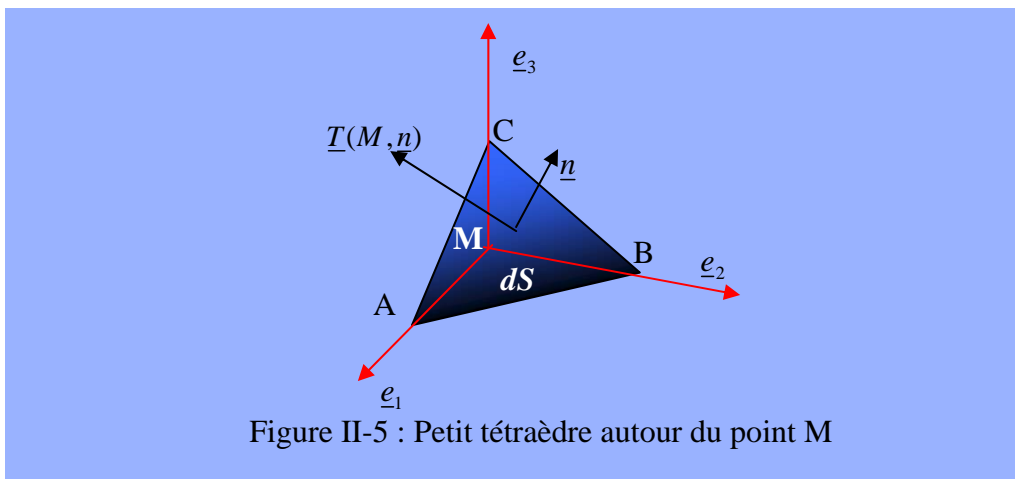
2 – Tenseur des contraintes

2 - 1 –Équilibre d'un tétraèdre et analyses des forces locales - Tenseur des contraintes.

Nous allons mettre en évidence un tenseur des contraintes représenté par une matrice dans une base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Il faut souligner que cette représentation n'est pas unique. Il est possible de représenter ce tenseur dans des bases non orthogonales, ce qui nous mène aux différentes propriétés de tensorialité qui seront traitées dans le cours de mécanique des milieux continus.

Pour étudier ce type de représentation nous écrivons l'équilibre d'un tétraèdre infiniment petit défini autour d'un point M du solide.

Soit MABC ce tétraèdre appuyé sur les axes d'un repère associé à la base définie précédemment (Figure II – 5).



Analysons les efforts élémentaires agissant sur les différentes facettes du tétraèdre. La taille de cet élément étant considérée comme infinitésimale, nous définirons les efforts agissant sur les facettes non pas au centre de chaque facette mais au point M pour faciliter les calculs ultérieurs.

Nous avons donc :

- sur la facette (ABC) de normale $\underline{n}(n_1, n_2, n_3)$, l'effort $\underline{dF} = dS \underline{T}(M, \underline{n})$

- sur la facette (MBC) de normale $-\underline{e}_1$, l'effort $\underline{dF}_1 = dS_1 \underline{T}_1(M, -\underline{e}_1)$

- sur la facette (MAC) de normale $-\underline{e}_2$, l'effort $\underline{dF}_2 = dS_2 \underline{T}_2(M, -\underline{e}_2)$

- sur la facette (MAB) de normale $-\underline{e}_3$, l'effort $\underline{dF}_3 = dS_3 \underline{T}_3(M, -\underline{e}_3)$

Les aires dS_1 , dS_2 , dS_3 des trois facettes appuyées sur les plans orthogonaux du repère sont liées à l'aire dS de la facette (ABC) par une relation que nous allons établir.

Ecrivons la relation existant entre l'aire des facettes du tétraèdre :

$$2dS\underline{n} = \underline{AB} \wedge \underline{AC} = (\underline{MB} - \underline{MA}) \wedge (\underline{MC} - \underline{MA}) = \underline{MB} \wedge \underline{MC} + \underline{MA} \wedge \underline{MB} + \underline{MC} \wedge \underline{MA} = 2dS_1 \underline{e}_1 + 2dS_2 \underline{e}_2 + 2dS_3 \underline{e}_3$$

(II-10)

En multipliant scalairement par \underline{e}_1 nous obtenons :

$dS_1 = dSn_1$, de manière analogue nous obtenons les autres composantes :

$$dS_2 = dSn_2 \text{ et } dS_3 = dSn_3$$

L'équilibre du tétraèdre sous l'action des efforts extérieurs se traduit par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} dST(M, \underline{n}) + dS_1 T_1(M, -\underline{e}_1) + dS_2 T_2(M, -\underline{e}_2) + dS_3 T_3(M, -\underline{e}_3) &= \underline{0} \\ \Leftrightarrow dST(M, \underline{n}) + n_1 dST_1(M, -\underline{e}_1) + n_2 dST_2(M, -\underline{e}_2) + n_3 dST_3(M, -\underline{e}_3) &= \underline{0} \quad (\text{II-11}) \\ \Rightarrow \underline{T}(M, \underline{n}) = n_1 \underline{T}_1(M, \underline{e}_1) + n_2 \underline{T}_2(M, \underline{e}_2) + n_3 \underline{T}_3(M, \underline{e}_3) \end{aligned}$$

Cette dernière expression peut aussi s'écrire sous forme matricielle :

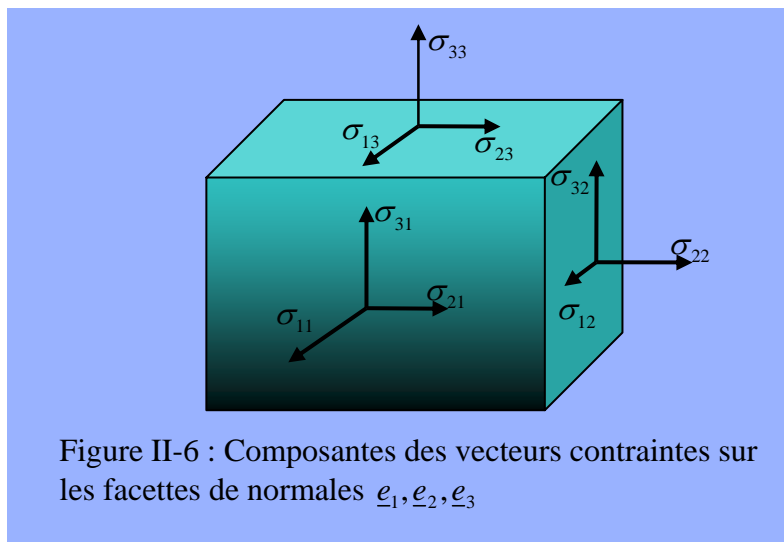
$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \left[\{ \underline{T}_1(M, \underline{e}_1) \}, \{ \underline{T}_2(M, \underline{e}_2) \}, \{ \underline{T}_3(M, \underline{e}_3) \} \right] \cdot \{ \underline{n} \} \quad (\text{II-12})$$

Le vecteur contrainte en un point quelconque du milieu, pour une orientation donnée est déterminé par la connaissance des composantes des trois vecteurs contraintes en ce même point sur des facettes orthogonales. Nous réorganisons cette expression sous la forme d'un produit d'une matrice et d'un vecteur d'orientation de la facette en question :

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = [\underline{\sigma}] \{ \underline{n} \} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \quad (\text{II-13})$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur d'ordre deux des contraintes représenté par la matrice $[\underline{\sigma}]$ dans la base orthonormée $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et \underline{n} est le vecteur normale de la facette en question représentée par la matrice colonne $\{ \underline{n} \}$ dans la même base.

La relation (II-13) permet de déterminer en tout point et pour toute facette définie par sa normale \underline{n} , le vecteur contrainte $\underline{T}(M, \underline{n})$.



Les composantes du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la base choisie précédemment est de la forme :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II-14})$$

Les composantes des trois vecteurs $\underline{T}_1(M, \underline{e}_1), \underline{T}_2(M, \underline{e}_2), \underline{T}_3(M, \underline{e}_3)$ constituent respectivement les trois colonnes de la matrice des contraintes.

D'une manière générale la composante σ_{ij} est associée à la composante dans la direction \underline{e}_i du vecteur contrainte agissant sur la facette de normale \underline{e}_j .

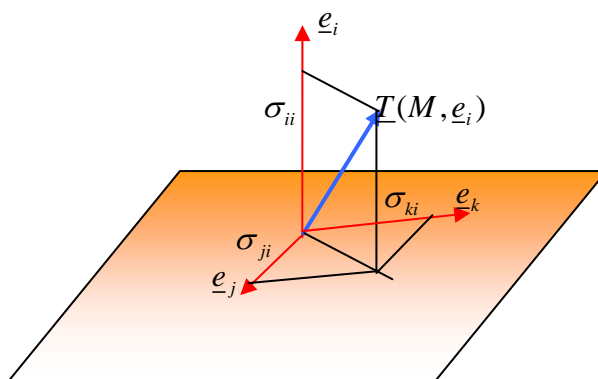


Figure II-7 : Représentation des composantes du vecteur contrainte sur la facette de normale \underline{e}_i

- *Contrainte normale et vecteur contrainte de cisaillement*

- La composante normale du vecteur contrainte est donnée par :

$$\sigma = \underline{n} \cdot \underline{T}(M, \underline{n}) = {}^t \{ \underline{n} \} \cdot [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}] \quad (\text{II-15})$$

Dans le cas de la facette \underline{e}_1 par exemple, nous avons :

$$\sigma = \underline{e}_1 \cdot \underline{T}(M, \underline{e}_1) = {}^t \{ \underline{e}_1 \} \cdot [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_1] = \sigma_{11} \quad (\text{II-16})$$

De même pour les autres facettes de normales \underline{e}_2 , \underline{e}_3 nous avons respectivement σ_{22} et σ_{33} .

- Pour ce qui est du vecteur cisaillement nous pouvons faire le calcul de diverse manière. Nous nous contenterons de calculer ce vecteur dans le cas général pour une facette de normale \underline{e}_i . Nous notons le vecteur cisaillement sur cette facette $\underline{\tau}_i$, et nous calculons les composantes de $\underline{\tau}_i$ suivant \underline{e}_j et \underline{e}_k :

$$\begin{aligned} \underline{\tau}_i \cdot \underline{e}_j &= {}^t \{ \underline{e}_j \} \cdot [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_i] = \sigma_{ji} \\ \underline{\tau}_i \cdot \underline{e}_k &= {}^t \{ \underline{e}_k \} \cdot [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_i] = \sigma_{ki} \end{aligned} \quad (\text{II-17})$$

Nous remarquons donc que les éléments de la diagonale de la matrice $[\underline{\underline{\sigma}}]$ donnent les composantes normales et les autres éléments sont les composantes du vecteur cisaillement.

2 - 2 – Equation d'équilibre locale, symétrie du tenseur des contraintes.

Equation d'équilibre

Nous allons écrire l'équation d'équilibre sur un parallélépipède infiniment petit qui a pour origine le point M du solide (figure II - 8). Nous prenons en compte ici le poids de cet élément que nous avons négligé précédemment.

Les arêtes du parallélépipède s'appuient sur les axes du repère (M, x_1, x_2, x_3) . Ce parallélépipède a pour côté (dx_1, dx_2, dx_3) . Soit \underline{f} la force par unité de volume qui s'applique sur cet élément.

Ecrivons l'équilibre de ce parallélépipède sous l'action de la force de volume \underline{f} et des forces de contact appliqué par le reste du solide. Pour faciliter l'écriture des équations, nous projetons l'équation d'équilibre sur une direction donnée. Nous choisissons une projection dans la direction \underline{e}_1 :

$$\begin{aligned} & -\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3)dx_2dx_3 + \sigma_{11}(x_1 + dx_1, x_2, x_3)dx_2dx_3 \\ & -\sigma_{12}(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_3 + \sigma_{12}(x_1, x_2 + dx_2, x_3)dx_1dx_3 \\ & -\sigma_{13}(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2 + \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3 + dx_3)dx_1dx_2 + f_1dx_1dx_2dx_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-18})$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dV + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dV + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dV + f_1 dV = 0 \quad (19)$$

Expression que l'on écrit plus classiquement sous la forme d'une équation différentielle :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \quad (\text{II-20})$$

En écrivant les autres termes de l'équation d'équilibre en projection dans les directions \underline{e}_2 , \underline{e}_3 , on obtient deux autres équations qui complètent le système d'équation d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-21})$$

Ce système d'équations scalaires peut s'écrire sous une forme vectorielle utilisée en mécanique des milieux continus :

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \underline{f} = \underline{0} \quad (\text{II-22})$$

Ceci se traduit aussi sous forme générique :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (\text{II-23})$$

Remarque : Dans cette dernière expression nous avons utilisé la convention de notation d'Einstein.

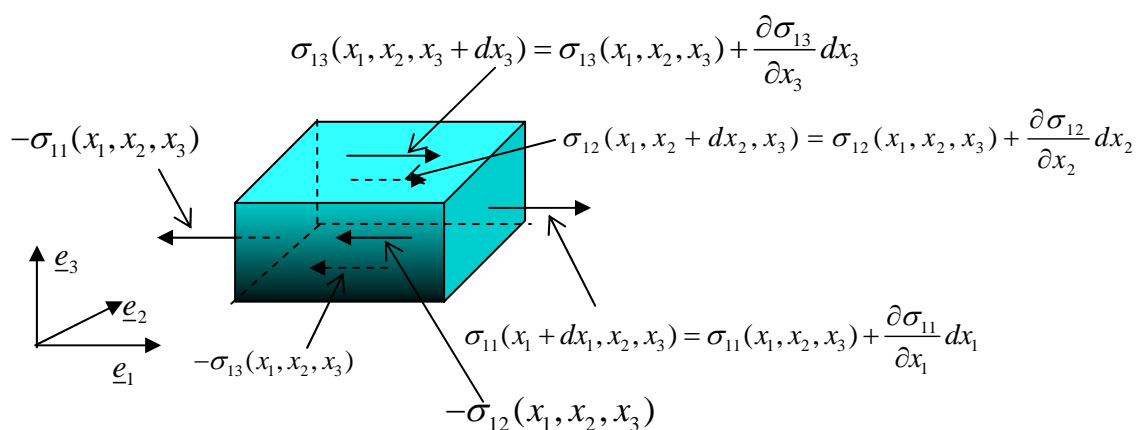


Figure II-8 : Equilibre d'un élément cubique

Symétrie du tenseur des contraintes

Reprenons le petit tétraèdre que nous avons utilisé précédemment (figure II - 9). Soit G le centre de la facette $(A_1 A_2 A_3)$ et G_i le centre de la facette de normale $-\underline{e}_i$.

Nous donnons les dimensions des arêtes du tétraèdre : $\underline{MA}_i = a_i \underline{e}_i$

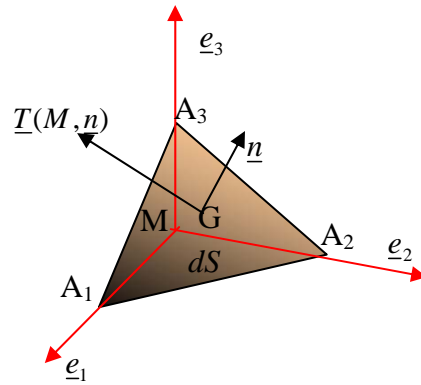


Figure II - 9 : Equilibre des moments

Ecrivons l'équilibre des moments au point G pour ce petit tétraèdre soumis aux efforts de surfaces sur les quatre facettes :

$$\underline{GG} \wedge dS \underline{T}(M, \underline{n}) - \underline{GG}_1 \wedge dS_1 \underline{T}(M, \underline{e}_1) - \underline{GG}_2 \wedge dS_2 \underline{T}(M, \underline{e}_2) - \underline{GG}_3 \wedge dS_3 \underline{T}(M, \underline{e}_3) = \underline{0} \quad (\text{II-24})$$

or le centre de gravité G de $(A_1 A_2 A_3)$ se projette en G_i sur les facettes de normale $-\underline{e}_i$ d'où

$$\underline{G_i G} = \frac{1}{3} \underline{MA_i} = \frac{1}{3} a_i \underline{e}_i \quad (\text{II-25})$$

L'équation d'équilibre des moments devient :

$$\frac{a_1}{3} \underline{e}_1 \wedge dS_1 \underline{T}(M, \underline{e}_1) + \frac{a_2}{3} \underline{e}_2 \wedge dS_2 \underline{T}(M, \underline{e}_2) + \frac{a_3}{3} \underline{e}_3 \wedge dS_3 \underline{T}(M, \underline{e}_3) = \underline{0}$$

L'aire des facettes du tétraèdre sont données par :

$$dS_1 = \frac{1}{2} a_2 a_3, \quad dS_2 = \frac{1}{2} a_1 a_3, \quad dS_3 = \frac{1}{2} a_1 a_2 \quad (\text{II-26})$$

L'équation de l'équilibre des moments devient alors :

$$\underline{e}_1 \wedge \underline{T}(M, \underline{e}_1) + \underline{e}_2 \wedge \underline{T}(M, \underline{e}_2) + \underline{e}_3 \wedge \underline{T}(M, \underline{e}_3) = \underline{0} \quad (\text{II-27})$$

Par projection sur \underline{e}_1 , nous obtenons une relation sur les produits mixtes de la forme suivante :

$$(\underline{e}_1, \underline{T}(M, \underline{e}_1), \underline{e}_1) + (\underline{e}_2, \underline{T}(M, \underline{e}_2), \underline{e}_1) + (\underline{e}_3, \underline{T}(M, \underline{e}_3), \underline{e}_1) = 0 \quad (\text{II-28})$$

En utilisant les propriétés sur les produits mixtes :

$$(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = (\underline{w}, \underline{u}, \underline{v}) = (\underline{v}, \underline{w}, \underline{u}) \quad (\text{II-29})$$

Nous obtenons alors :

$$\underline{T}(M, \underline{e}_2) \cdot (\underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2) + \underline{T}(M, \underline{e}_3) \cdot (\underline{e}_1 \wedge \underline{e}_3) = 0 \quad (\text{II-30})$$

$$\text{Soit } \sigma_{32} = \sigma_{23}. \quad (\text{II-31})$$

De la même façon en projetant sur \underline{e}_2 puis \underline{e}_3 nous obtenons respectivement

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} \text{ puis } \sigma_{12} = \sigma_{21}$$

Nous avons démontré la propriété de symétrie du tenseur des contraintes :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{II-32})$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ contient 6 composantes indépendantes (au lieu de 9).

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{II-33})$$

2 - 3 – Contraintes principales.

L'état des contraintes en un point dans le solide est donc complètement décrit par la connaissance du tenseur des contraintes. Nous avons vu d'après la formule de Cauchy (II -13) que le vecteur contrainte $\underline{T}(M, \underline{n})$ peut être calculé en appliquant le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ au vecteur direction \underline{n} de la facette en question.

Nous trouvons alors :

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \sigma \underline{n} + \underline{\tau}. \quad (\text{II-34})$$

Il existe des facettes de normale \underline{X} pour lesquelles la contrainte de cisaillement est nulle. Ces facettes sont dites facettes principales, les directions \underline{X} sont les directions principales associées et nous écrivons alors :

$$\underline{T}(M, \underline{X}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{X} = \sigma \underline{X} \quad (\text{II-35})$$

σ est donc la contrainte normale en M suivant \underline{X} et est appelée aussi contrainte principale associée à la direction \underline{X} .

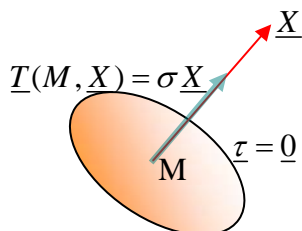


Figure II-9 : Contrainte principale sur une facette

D'un point de vue mathématique, la recherche d'une direction principale et d'une valeur principale revient à résoudre le système d'équations suivant :



$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{X} = \sigma \underline{X} \text{ et donc à écrire } (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{I}) \cdot \underline{X} = 0$$

Ce système n'a de solutions non triviales dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ que si on vérifie :



$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{I}) = 0. \quad (\text{II-35 bis})$$

Nous avons alors un polynôme du 3^{ème} degré en σ donnant 3 racines distinctes ou 1 racine double et une racine simple ou une racine triple ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ou $\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3$ ou $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$).

Les directions $(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3)$ associées aux valeurs principales constituent alors un repère orthogonal direct.

Dans cette base, le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est représenté par une matrice dite diagonale de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3)} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (\text{II-36})$$

Le polynôme caractéristique peut être construit d'après l'équation (II-35 bis).

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{pmatrix} = -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 \quad (\text{II-37})$$

où I_1, I_2, I_3 sont des invariants :

$$I_1 = \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[(\text{Tr} \underline{\underline{\sigma}})^2 - \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2)] = \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 = \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3$$

$$I_3 = \det \underline{\underline{\sigma}}$$

Dans le repère principal $(M; \underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3)$, les composantes du vecteur contrainte sur la facette \underline{n} sont :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{II-38})$$

où n_1, n_2, n_3 sont les composantes du vecteur unitaire \underline{n} :

$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. On en déduit que :



$$\frac{T_1^2}{n_1^2} + \frac{T_2^2}{n_2^2} + \frac{T_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (\text{II-39})$$

Cette équation est celle d'un ellipsoïde, l'ellipsoïde de Lamé.

Quand \underline{n} varie, l'extrémité du vecteur contrainte $\underline{T}(M, \underline{n})$ se déplace sur l'ellipsoïde de Lamé dont les axes sont les directions principales et les demi-axes sont $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

2 - 4 – Etat plan des contraintes

Définition

On dit qu'un état des contraintes est un état plan des contraintes, par rapport au plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ si :

$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$ et si $\sigma_{11}, \sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{22}$ ne dépendent que des variables d'espace x_1 et x_2 .

On notera alors le tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}_{(x_1, x_2)} \quad (\sigma_{12} = \sigma_{21}) \quad (\text{II-40})$$

Exemple :

Plaque plane d'épaisseur e petite et constante, chargée dans son plan moyen (modèle utilisé en photo-élasticité plane)

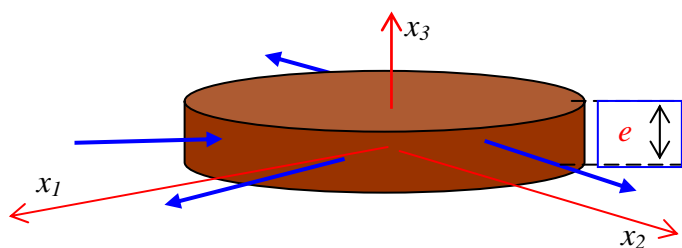


Figure II-10 : Etat plan de contrainte

Pour $x_3 = \pm \frac{e}{2}$ on a $\underline{T}(M, \pm \underline{e}_3) = \underline{0} \Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$

Changement d'axe

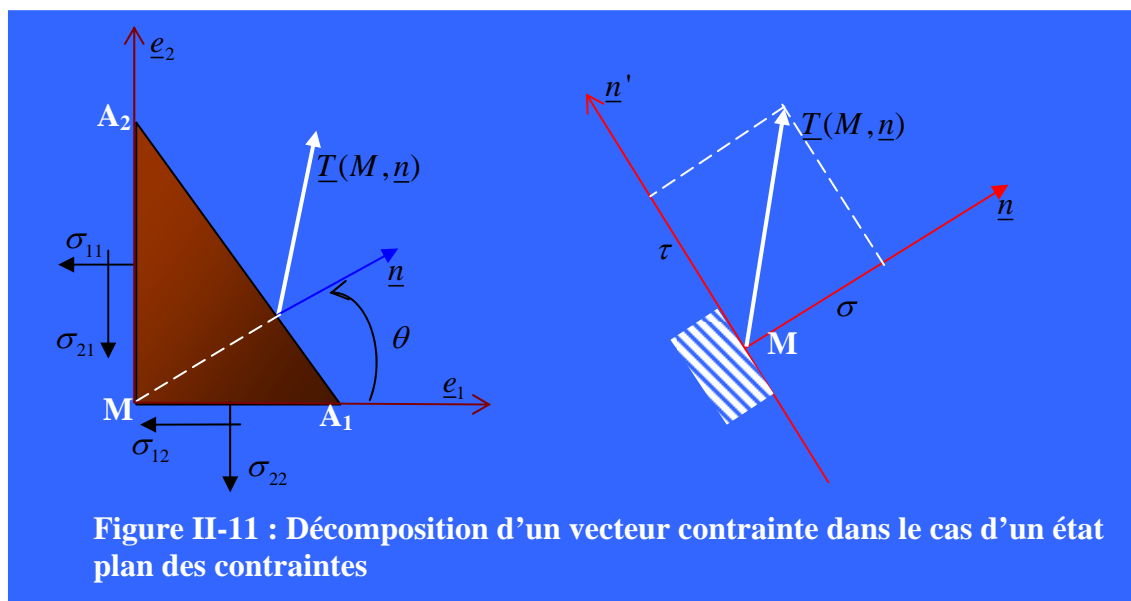
a - Contraintes normales et tangentielles sur une facette d'orientation quelconque \underline{n}

Soit l'élément (MA_1A_2) d'épaisseur e constante petite suivant x_3 . Le tenseur des contraintes au point M dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ est donné par la matrice :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (\sigma_{12} = \sigma_{21}) \quad (\text{II-41})$$

Nous considérons les directions \underline{n} et \underline{n}' (figure II-11) définies par leurs composantes dans la base choisie :

$$\begin{cases} (\underline{e}_1, \underline{n}) = \theta \\ (\underline{n}, \underline{n}') = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \underline{n} = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2 \\ \underline{n}' = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2 \end{cases} \quad (\text{II-42})$$



Nous pouvons alors calculer le vecteur des contraintes en M pour la facette de normale \underline{n} dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$:

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = (\sigma_{11} \cos \theta + \sigma_{12} \sin \theta) \underline{e}_1 + (\sigma_{21} \cos \theta + \sigma_{22} \sin \theta) \underline{e}_2 \quad (\text{II-43})$$

Ecrivons l'expression de ce vecteur dans la base $(\underline{n}, \underline{n}')$:

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \sigma \underline{n} + \tau \underline{n}'$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \sigma = \underline{n} \cdot \underline{T}(M, \underline{n}) = \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta + 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta \\ \tau = \underline{n}' \cdot \underline{T}(M, \underline{n}) = -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos \theta \sin \theta + 2\sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases} \quad (\text{II-44})$$

Soit encore en fonction de l'angle double 2θ :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \\ \tau = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \end{cases} \quad (\text{II-45})$$

a - Contraintes normales et tangentielles sur une facette d'orientation \underline{n}' tel que $\underline{n}' \cdot \underline{n} = 0$

Le vecteur contrainte dans la base $(\underline{n}', \underline{n}'')$ devient :

$$\underline{T}(M, \underline{n}') = \sigma' \underline{n}' + \tau' \underline{n}''$$

avec $(\underline{n}', \underline{n}'') = +\frac{\pi}{2}$ soit $\underline{n}'' = -\underline{n}$

σ' et τ' s'obtiennent en remplaçant θ par $\theta + \frac{\pi}{2}$ dans le système d'équations (II-45) :

$$\begin{cases} \sigma' = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta - \sigma_{12} \sin 2\theta \\ \tau' = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta - \sigma_{12} \cos 2\theta = -\tau \end{cases} \quad (\text{II-46})$$

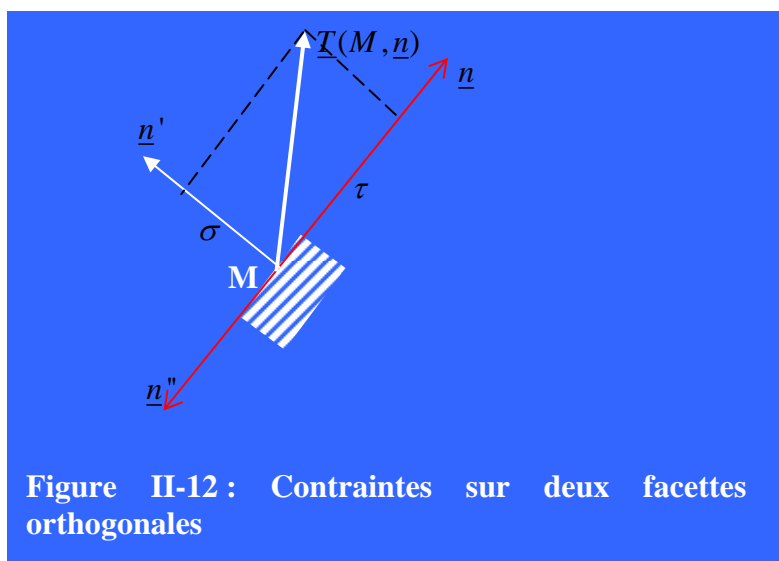
Nous remarquons que les valeurs des contraintes tangentielles sur deux facettes orthogonales sont de signes opposés.

Sur la base $(\underline{n}, \underline{n}')$ le vecteur contrainte $\underline{T}(M, \underline{n}')$ s'écrit :

$$\underline{T}(M, \underline{n}') = \tau \underline{n} + \sigma' \underline{n}' \quad (47)$$

En comparant les expressions (II-44) et (II-47) on vérifie la formule de Cauchy qui s'écrit :

$$\underline{n}' \cdot \underline{T}(M, \underline{n}) = \underline{n} \cdot \underline{T}(M, \underline{n}') \quad (\text{II-48})$$



c) Tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la base $(\underline{n}, \underline{n}')$:

Dans la base orthonormée $(\underline{n}, \underline{n}')$, le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est représenté par une matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs contraintes $\underline{T}(M, \underline{n})$ et $\underline{T}(M, \underline{n}')$, d'où :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & \sigma' \end{pmatrix} \begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta \\ \sigma' = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta - \sigma_{12} \sin 2\theta \\ \tau = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \end{cases} \quad (\text{II-49})$$

Remarque : $\sigma + \sigma' = \sigma_{11} + \sigma_{22}$

La somme des termes de la diagonale est invariante par changement de base. C'est le premier invariant scalaire du tenseur des contraintes.

2 - 5 – Cercle de Mohr des contraintes

Cercle de Mohr dans le cas de l'état plan des contraintes.

a – Equation du cercle de Mohr

On suppose connu au point M l'état plan des contraintes dans le repère principal

$(M; \underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3)$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-50})$$

Soit en M le vecteur contrainte agissant sur la facette de normale \underline{n} :

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma \underline{n} + \tau \underline{n}' \quad \text{où } (\underline{n}, \underline{n}') = \frac{\pi}{2} \quad \text{et } (\underline{X}_1, \underline{n}) = \varphi$$

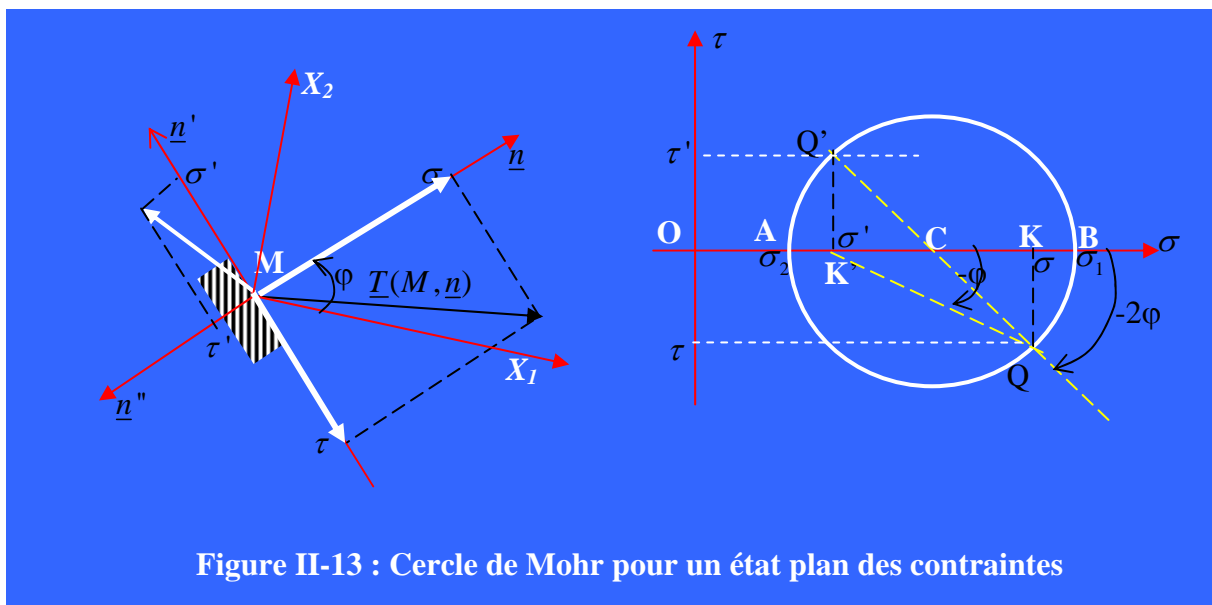


Figure II-13 : Cercle de Mohr pour un état plan des contraintes

On considère la famille de facettes contenant la direction \underline{X}_3 . Soit la facette de normale $\underline{n}(n_1 = \cos \varphi, n_2 = \sin \varphi, 0)$ dans le repère principal $(M; \underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3)$. Sur cette facette les composantes du vecteur contrainte sont :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos \varphi \\ \sigma_2 \sin \varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II-51})$$

Ce vecteur s'écrit aussi dans la base $(\underline{n}, \underline{n}')$:

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \sigma \underline{n} + \tau \underline{n}' \quad (\text{II} - 52)$$

La composante normale est donnée par la relation :

$$\sigma = \underline{n} \cdot \underline{T}(M, \underline{n}) = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi \quad (\text{II-53})$$

et la composante tangentielle est obtenue par projection sur \underline{n}' :

$$\tau = \underline{n}' \cdot \underline{T}(M, \underline{n}) = -\sigma_1 \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_2 \cos \varphi \sin \varphi \quad (54)$$

En écrivant ces expressions en fonction de l'angle double, on obtient :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi \\ \tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi \end{cases} \quad (\text{II-55})$$

En élevant ces deux expressions au carré et en sommant, on obtient dans le plan (σ, τ)

l'équation d'un cercle de centre $C(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad (\text{II-56})$$

Ce cercle est appelé **Cercle de Mohr** pour un état plan des contraintes. Chaque point de ce cercle représente l'extrémité du vecteur contrainte pour une orientation \underline{n} donnée. Il faut retenir que l'ensemble du cercle de Mohr est relatif à un seul point du milieu. Dans le cas d'un état de contrainte non homogène, il y a autant de cercle que de points dans le milieu.

Le point Q représenté sur la figure II-13 est associé à la facette de normale \underline{n} au point M. Le point Q' sur le même cercle est associée à la facette de normale \underline{n}' . Nous voyons que les deux normales représentent deux facettes perpendiculaires dans le milieu, néanmoins, les points Q et Q' sont diamétralement opposés sur le cercle.

Nous retrouvons ici la propriété des cercles de Mohr :

Lorsque la normale \underline{n} tourne d'un angle φ dans le matériau, son point représentatif sur le cercle de Mohr tourne lui d'un angle -2φ (figure II-13).

b – Représentation graphique

* Cas où les contraintes principales σ_1, σ_2 sont connues : il suffit de porter leur valeur sur l'axe des abscisses du plan de Mohr et de faire passer le cercle de Mohr par ces deux points, le centre du cercle étant toujours sur cet axe ;

* Cas où le tenseur des contraintes est donné dans une base quelconque $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$:

Dans ce cas, on calcul comme précédemment les contraintes normales et tangentielles sur les facettes de normales \underline{e}_1 puis \underline{e}_2 . On obtient alors les coordonnées de deux points P

$\sigma = \sigma_{11}, \tau = \sigma_{12}$ et P' ($\sigma' = \sigma_{22}, \tau' = -\tau$) diamétralement opposé à P sur le cercle.

Vérifions :

Pour le point P

$$\sigma = \underline{e}_1 \cdot \underline{T}(M, \underline{e}_1) = \sigma_{11}$$

$$\tau = \underline{e}_2 \cdot \underline{T}(M, \underline{e}_1) = \sigma_{12}$$

puis pour P'

$$\sigma' = \underline{e}_2 \cdot \underline{T}(M, \underline{e}_2) = \sigma_{22}$$

$$\tau' = -\underline{e}_1 \cdot \underline{T}(M, \underline{e}_2) = -\sigma_{12} = -\tau$$

Le tracé du cercle de Mohr est alors trivial.

c – Détermination graphique des contraintes principales et directions principales

D'après le paragraphe précédent, la construction des contraintes principales est la suivante :

Dans le plan de Mohr, on construit les points P et P' diamétralement opposés, on trace le cercle de Mohr qui coupe l'axe des abscisses (axe des contraintes normales) aux points d'abscisses σ_1 et σ_2 qui donnent les valeurs des contraintes principales. Nous en déduisons aussi les directions principales par rapport aux directions de départ $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$.

d - Cercle de Mohr dans le cas d'un état triaxial des contraintes

On considère le point M dans le milieu et une facette de normale \underline{n} définie par ses coordonnées dans le repère principale $(M; \underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3)$:

$$\underline{n} = n_1 \underline{X}_1 + n_2 \underline{X}_2 + n_3 \underline{X}_3$$

Le vecteur contrainte agissant sur cette facette est donnée par sa composante normale et le vecteur contrainte tangentielle : $\underline{T}(M, \underline{n}) = \sigma \underline{n} + \underline{\tau}$

Les relations :

$$\|\underline{n}\| = 1, \quad T^2 = \sigma^2 + \underline{\tau}^2, \quad \sigma = (\underline{n})'(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}) \quad (\text{II-61})$$

s'écrivent dans le repère principale $(M; \underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3)$:

$$\begin{cases} \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma \\ \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma^2 + \underline{\tau}^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \quad (\text{II-62})$$

Cela constitue un système de 3 équations à trois inconnues (n_1^2, n_2^2, n_3^2) , dont les solutions sont données par :

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases} \quad (\text{II-63})$$

Si on suppose $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, les inégalités $n_1^2 \geq 0, n_2^2 \geq 0, n_3^2 \geq 0$ imposent :

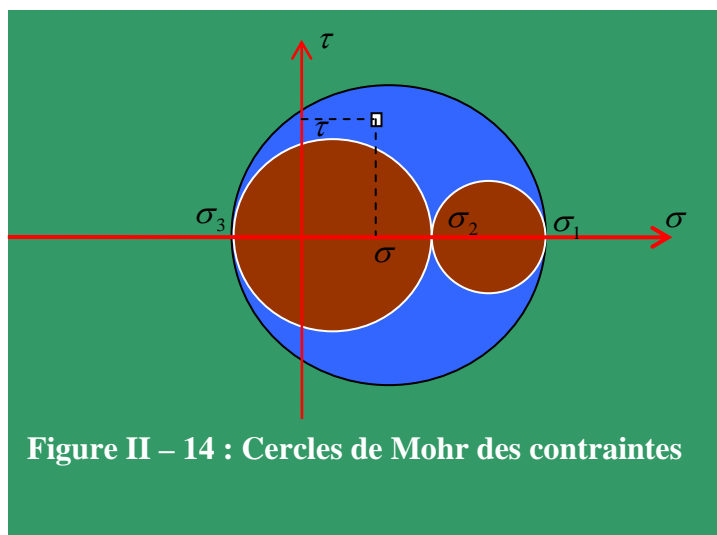
$$\begin{cases} \tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \geq 0 \\ \tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) \leq 0 \\ \tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II-64})$$

Soit :

$$\begin{cases} \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (\text{II-65})$$

Ces trois inégalités doivent être simultanément vérifiées. Le point représentatif du couple de valeurs (σ, τ) est à l'intérieur de la zone définie par l'intersection des trois cercles de Mohr.

On appelle ces trois cercles le tricerclé de Mohr.



Le point de coordonnées $(\sigma, \tau = \|\underline{\tau}\|)$ se trouve :

- à l'extérieur du cercle de centre $(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$

- à l'intérieur du cercle de centre $(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

- à l'extérieur du cercle de centre $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

2 - 6 – Etats des contraintes particuliers

Etat de contrainte uniaxial : traction ou compression

Dans le cas d'un état de traction ou compression suivant une direction donnée (\underline{e}_1 par exemple), la matrice des contraintes représentant le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

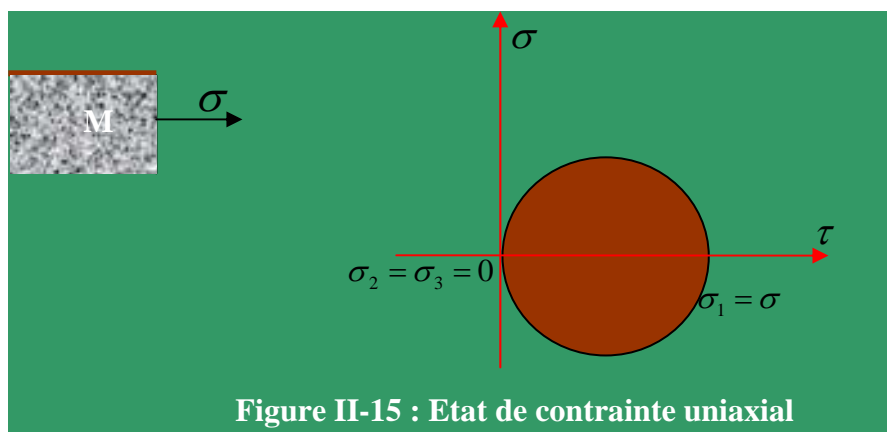
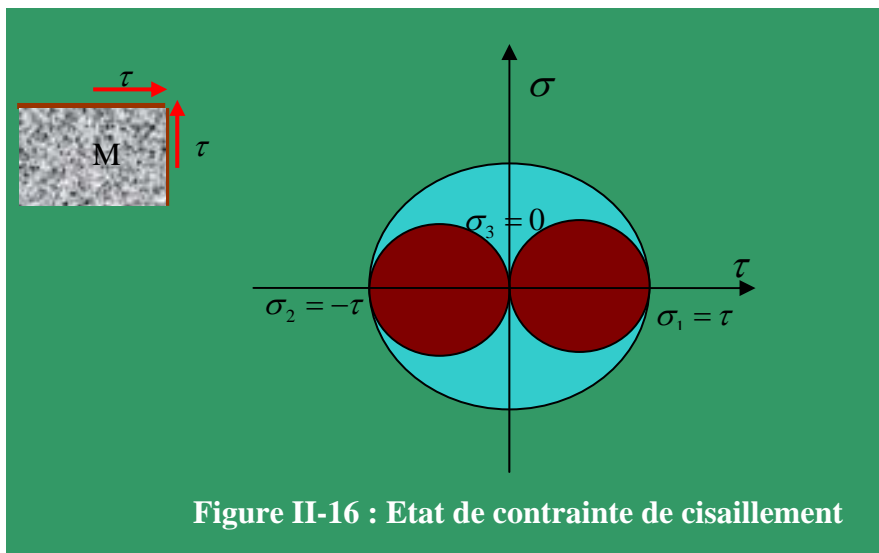


Figure II-15 : Etat de contrainte uniaxial

Etat de cisaillement pur

L'état de cisaillement pur par rapport aux deux directions \underline{e}_1 et \underline{e}_2 est défini par le tenseur des contraintes de la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Etat de contrainte isotrope

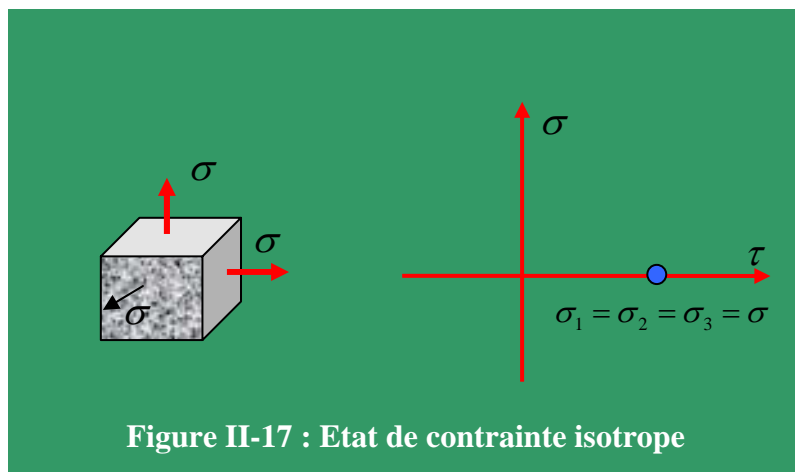
Un état de contrainte est dit isotrope ou hydrostatique si le tenseur des contraintes qui lui est associé est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

Et de ce fait nous avons $\underline{T}(M, \underline{n}) = \sigma \underline{n} \quad \forall \underline{n}$.

Les trois contraintes principales sont égales à σ .

Les trois cercles de Mohr se réduisent à un point sur l'axe des contraintes normales.

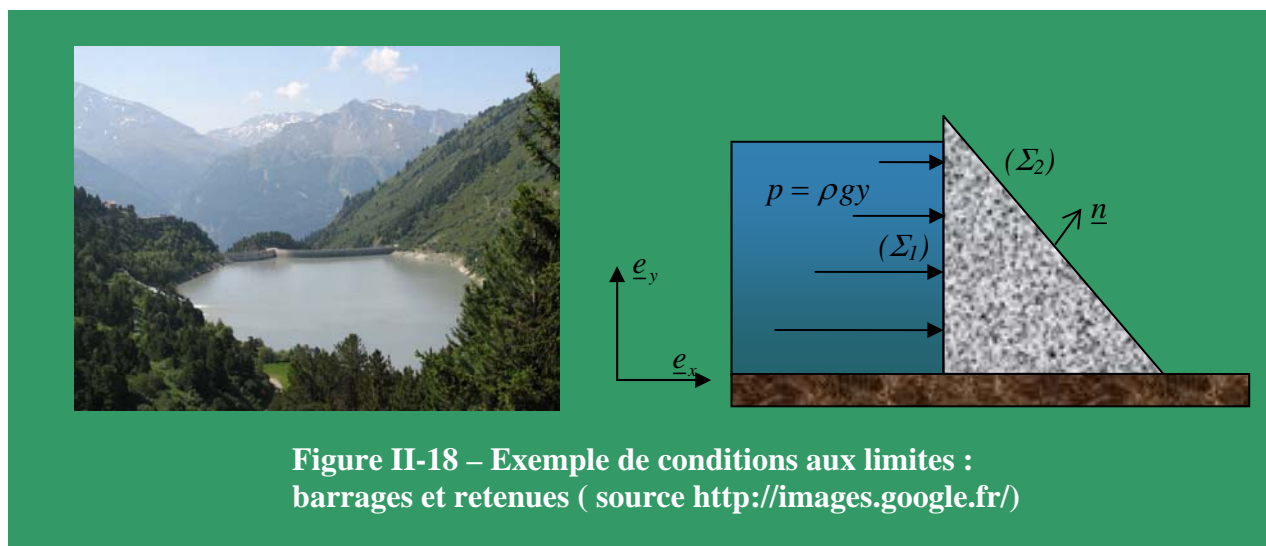


2 – 7 – Conditions aux limites

L'équation d'équilibre portant sur le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ régit l'évolution spatiale de l'état des contraintes au sein du milieu. La résolution de cette équation différentielle nécessite la connaissance des conditions aux limites de l'état des contraintes et des déplacements.

Exemple : Conditions aux limites sur les parois d'un barrage d'un barrage

L'état des contraintes et donc des efforts internes au sein d'un barrage est déterminé en particulier par la pression exercée par le fluide sur ses parois. Ces conditions aux limites peuvent être variables ou pas, continues ou discontinues ...



Dans le cas de ce barrage (figure II-18) la condition que doit vérifier le vecteur contrainte sur la paroi (Σ_1) en contact avec le fluide est la suivante :

$$\underline{T}(M, -\underline{e}_x) = p\underline{e}_x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{11} = -p \\ \sigma_{21} = 0 \\ \sigma_{31} = 0 \end{cases}$$

Sur la paroi libre (Σ_2) , nous avons :

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0 \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 = 0 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 = 0 \end{cases}$$

Les valeurs des contraintes ainsi trouvées sont relatives uniquement à la frontière considérée. Il faut émettre d'autres hypothèses et revenir à l'équation d'équilibre (II-22) pour identifier l'état des contraintes dans tout le barrage. Nous verrons plus loin (Chapitre IV) les méthodes de résolution que l'on peut mettre en œuvre dans la résolution de ces systèmes.

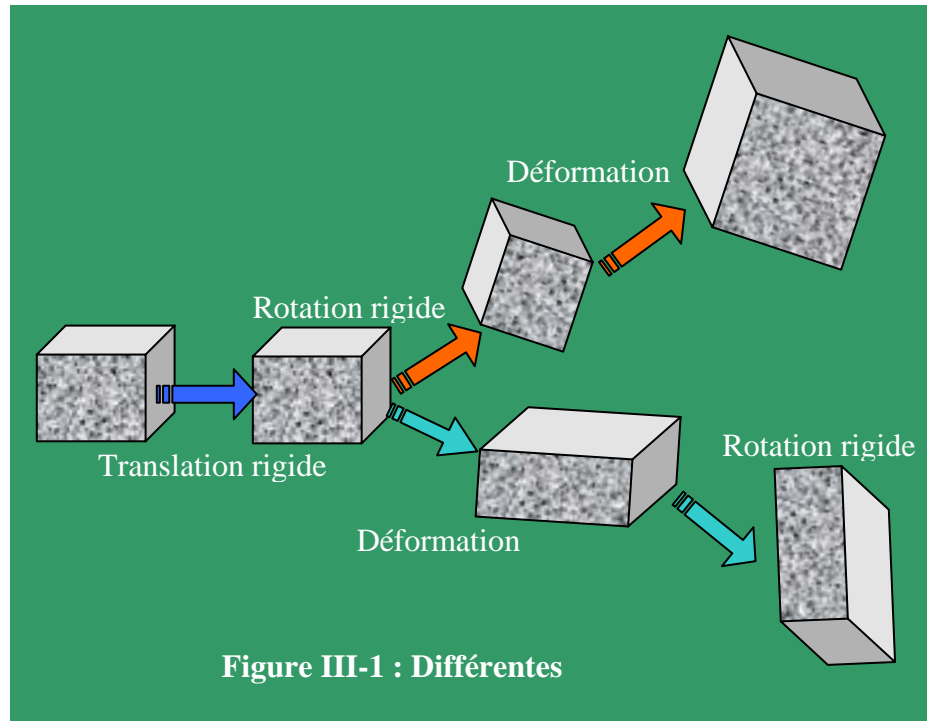
CHAPITRE III - TENSEURS DES DEFORMATIONS

1 - Introduction

Lorsqu'un solide est soumis des sollicitations extérieures, les particules qui le composent se déplacent dans l'espace. De ce fait, le corps du solide peut être soumis à différents type de mouvement de type rigide ou à des déformations provoquées par les déplacements relatifs des particules entre elles. Cette dernière transformation donne lieu à des variations d'angles et d'angle que l'on va étudier dans ce chapitre. Nous allons mettre en évidence et construire le tenseur des déformations qui est en quelques sortes la grandeur duale du tenseur des contraintes.

Les différentes transformations du solide

Un petit élément de matière du solide peut subir plusieurs transformations (figure 25). Ces transformations peuvent se décomposer en translations et rotations rigides et en déformations dans le milieu.



Translation et rotation sont des mouvements de corps rigides qui n'ont aucune conséquence sur la forme finale du solide. Seule la déformation induit des variations de longueurs et

d'angle dans la structure du solide. Hormis les mouvements de corps rigide la déformation est la seule grandeur mesurable par le mécanicien lorsqu'un solide est sollicité par des efforts extérieurs. Les efforts et les contraintes sont déduits à partir des lois de comportement du matériau que nous verrons dans le chapitre suivant.

En principe, lorsque plusieurs transformations sont appliquées à un solide, l'état final n'est pas qu'une simple superposition des effets individuels de chacune des sollicitations.

Cependant, lorsque les transformations induisent de petites déformations, on pourra appliquer le principe de superpositions et additionner par exemple les déformations et les distorsions (variations d'angle) provoqués en un point donné par l'ensemble des sollicitations.

Ce principe implique que les calculs sont réalisés sur la configuration initiale du solide.

2 – Transformations dans un milieu solide

2 – 1 - Vecteur déplacement, dilatation et distorsion

Trajectoire et vecteur déplacement

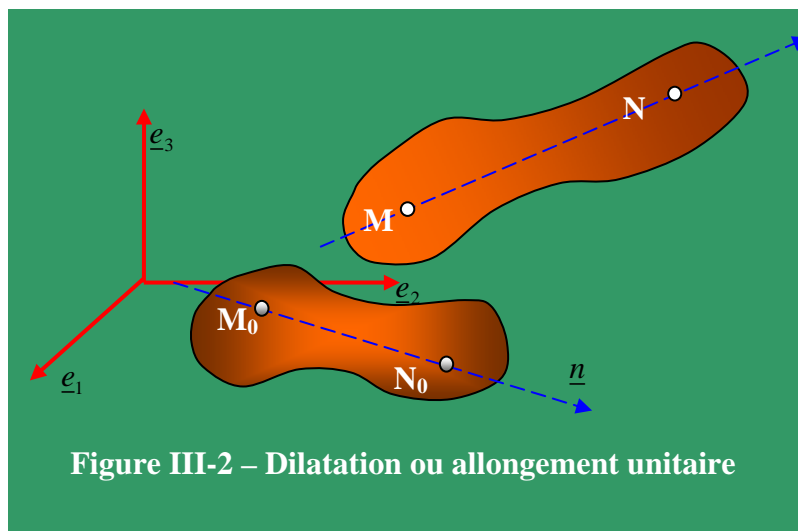
Au cours de la transformation imposée par les sollicitations extérieures, le solide passe d'une configuration initiale notée \mathcal{C}^0 à une configuration \mathcal{C}^t à l'instant t . Au cours du chargement une particule de matière en M_0 de coordonnées initiales \underline{X} se déplace pour occuper une position au point M de coordonnées \underline{x} (on prendra la base cartésienne courante $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$). On appelle vecteur déplacement du point $M_0(\underline{X})$ le vecteur de composantes

$$\underline{M_0M} = \underline{x} - \underline{X} = \underline{u}(X_1, X_2, X_3) = u_1(X_1, X_2, X_3)\underline{e}_1 + u_2(X_1, X_2, X_3)\underline{e}_2 + u_3(X_1, X_2, X_3)\underline{e}_3$$

Remarque : les coordonnées (X_1, X_2, X_3) du vecteur \underline{x} à l'instant $t=0$ sont appelées *coordonnées Lagrangiennes* en Mécanique des Milieux Continus. Les coordonnées (x_1, x_2, x_3) à l'instant t sont appelées *coordonnées Eulériennes*. Notre approche de la déformation sera simplifiée en élasticité et ne concernera que les petites transformations. On confondra donc description Lagrangienne et description Eulérienne.

Allongement unitaire ou dilatation

Soient deux points voisins M_0 et N_0 d'un solide et \underline{n} le vecteur unitaire lié à la direction $\underline{M_0N_0}$ (figure 26). Le solide se déforme sous l'action des sollicitations mécaniques et les points M_0 et N_0 se déplacent respectivement en M et N .



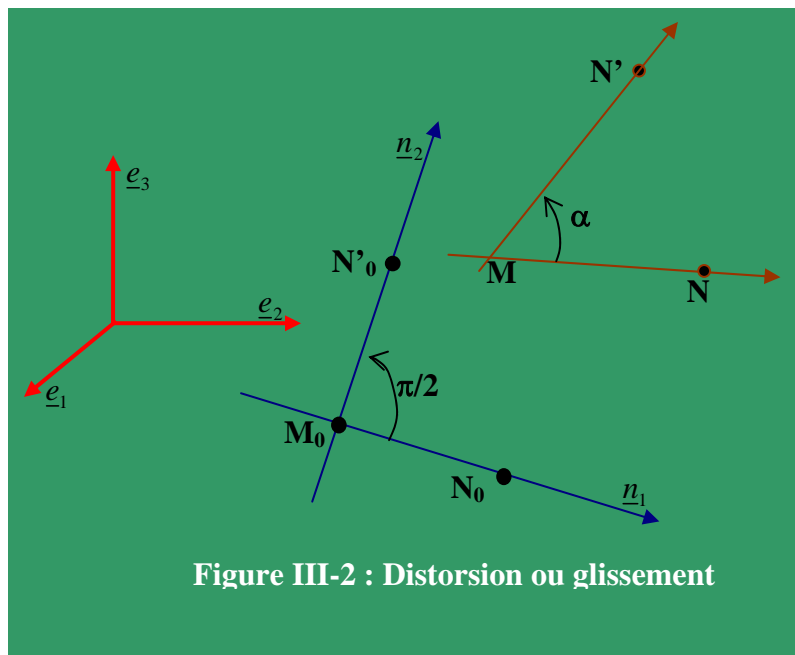
On appelle allongement unitaire en M_0 la quantité :

$$\varepsilon(M_0, \underline{n}) = \lim_{N_0 \rightarrow M_0} \frac{\|MN\| - \|M_0N_0\|}{\|M_0N_0\|} \quad (\text{III-1})$$

La quantité (III-1) est également appelée dilatation ou allongement relatif. C'est une grandeur sans unité.

Distorsion ou glissement

Soient deux points N_0 et N'_0 deux points voisins de M_0 ($\|M_0N_0\| = d$ et $\|M_0N'_0\| = d'$). ces deux points sont situés à l'origine sur deux axes orthogonaux portées par les deux directions $(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$.



Le solide se déforme sous l'action des sollicitations mécaniques et les points M_0 , N_0 et N'_0 se déplacent respectivement en M , N et N' .

On note α l'angle $\alpha = (\underline{MN}, \underline{MN}')$. On appelle glissement ou distorsion en M_0 et suivant \underline{n}_1 et \underline{n}_2 , la quantité :

$$\gamma(M_0, \underline{n}_1, \underline{n}_2) = \lim_{\substack{d_1 \rightarrow 0 \\ d_2 \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (\text{III-2})$$

$\gamma(M_0, \underline{n}_1, \underline{n}_2)$ est une quantité sans unité.

2 – 2 – Tenseur des déformations.

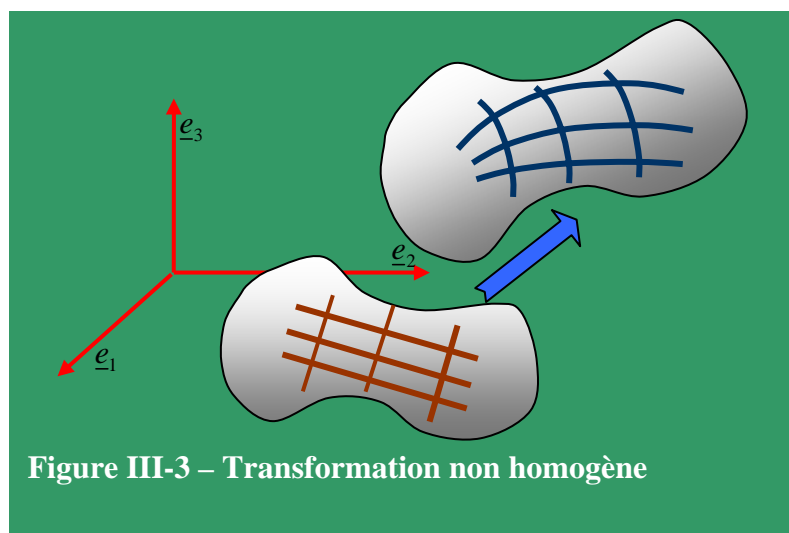
Tenseur gradient de la déformation

Comme nous l'avons vu précédemment, l'application des actions mécaniques sur un milieu induit des déplacements relatifs des particules du matériau. Il en résulte des variations d'angle et des variations de longueur.

Nous allons caractériser ces différentes grandeurs en étudiant les transformations du milieu. Si l'on suit le mouvement d'une particule qui à l'instant initiale t_0 occupe la position M_0 de l'espace associé au repère $R(O; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et la position M à l'instant $t > t_0$ on peut écrire la relation suivante :

$\underline{OM} = \underline{OM}_0 + \underline{u}$ ou bien $\underline{x} = \underline{X} + \underline{u}$ où \underline{u} est le vecteur déplacement de la particule entre les instants t_0 et t .

En écrivant cette dernière relation nous analysons la transformation d'un vecteur \underline{X} . Dans le cas de transformation non homogène, la transformée d'un vecteur n'est pas forcément un vecteur.



Au lieu de caractériser la transformation par le transport d'un vecteur \underline{X} , nous analysons la transformation en étudiant le transport d'un petit vecteur \underline{dX} . Et nous avons alors :

$$\underline{dx} = \underline{dX} + \underline{du}$$

Le vecteur déplacement \underline{du} dépendant de \underline{X} , s'écrit :

$$\underline{du} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j \underline{e}_i = \underline{\underline{\nabla u}} \cdot \underline{dX} \quad (\text{III-3})$$

L'expression précédente peut aussi se mettre sous la forme :

$$\underline{dx} = \underline{dX} + \underline{du} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dX} \quad (\text{III-4})$$

$\underline{\underline{F}}$ est appelée le gradient de la déformation ou gradient de la transformation tangente. Le terme tangente est associé au fait que l'on considère la transformation d'un petit vecteur \underline{dX} . De ce fait le vecteur de la transformation tangente $\underline{\underline{F}}$ est donnée si l'on connaît le gradient du déplacement $\underline{\underline{\nabla u}}$:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\nabla u}} \quad \text{où } \underline{\underline{I}} \text{ représente la matrice identité} \quad (\text{III-5})$$

Le gradient du vecteur déplacement peut être décomposé en une partie symétrique $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et une partie antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}$ de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\nabla u}} = \underbrace{\frac{1}{2} [\underline{\underline{\nabla u}} + {}^t \underline{\underline{\nabla u}}]}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \underbrace{\frac{1}{2} [\underline{\underline{\nabla u}} - {}^t \underline{\underline{\nabla u}}]}_{\underline{\underline{\Omega}}} \quad (\text{III-6})$$

Avec $[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée directe $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$

Par définition (III-6) on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{III-6 bis})$$

Si le vecteur déplacement \underline{du} est défini par les déplacements des extrémités P_0 et Q_0 d'un vecteur \underline{dX} , on pourra écrire :

$$\underline{du} = \underline{u}(Q_0) - \underline{u}(P_0) = \underline{\underline{\nabla u}} \cdot \underline{dX} = (\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\Omega}}) \cdot \underline{dX}$$

$$\underline{PQ} = \underline{\omega} \wedge \underline{P_0Q_0}$$

ce qui correspond à une rotation de solide rigide $\underline{\omega}$.

La partie symétrique $\underline{\varepsilon}$ qui ne comporte par définition que six composantes indépendantes induit dans le milieu un champ de déplacement $\underline{du} = \underline{\varepsilon} \cdot \underline{dX}$ correspondant à la déformation locale. C'est la seule responsable du changement de forme du milieu.

Tenseur des déformations

Si l'on ne considère que les petites déformations, l'état des déformations en un point M est complètement caractérisé par le tenseur symétrique $\underline{\varepsilon}$ et la relation donnant le déplacement en un point M du milieu et pour une direction \underline{n} :

$$\underline{u}(M, \underline{n}) = \underline{\varepsilon}(M) \cdot \underline{n}$$

La connaissance des vecteurs déplacements au point M pour trois vecteurs unitaires définis par la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ suffit à déterminer l'état des déformations en ce point :

$$\begin{aligned} \underline{u}_1(M, \underline{e}_1) &= \varepsilon_{11}\underline{e}_1 + \varepsilon_{12}\underline{e}_2 + \varepsilon_{13}\underline{e}_3 \\ \underline{u}_2(M, \underline{e}_2) &= \varepsilon_{21}\underline{e}_1 + \varepsilon_{22}\underline{e}_2 + \varepsilon_{23}\underline{e}_3 \\ \underline{u}_3(M, \underline{e}_3) &= \varepsilon_{31}\underline{e}_1 + \varepsilon_{32}\underline{e}_2 + \varepsilon_{33}\underline{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{III-7})$$

Transformations des longueurs et des angles

- Tenseur des dilatations, dilatation et allongement unitaire :

La norme du vecteur transportée $\|\underline{dx}\|$ peut être calculée de la manière suivante :

$$dx^2 = {}^t dX \cdot {}^t \underline{F} \cdot \underline{F} \cdot dX = {}^t dX \cdot \underline{C} \cdot dX$$

On définit un nouveau tenseur appelé tenseur des dilatations : (III-8)

$$\underline{C} = {}^t \underline{F} \cdot \underline{F}$$

Ce tenseur sert aussi à exprimer le produit scalaire entre deux vecteurs transportés

\underline{dx} et \underline{dx}' :

$$\underline{dx}.\underline{dx}' = {}^t \underline{dX} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dX} \cdot {}^t \underline{dX} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{dX}$$

Pour évaluer les variations de longueur et d'angle, nous pouvons comparer un vecteur avant et après transformation.

Nous définissons alors la dilatation $\lambda(M_0, \underline{n}_0)$ en M_0 suivant \underline{n}_0 :

$$\lambda(M_0, \underline{n}_0) = \frac{\|\underline{dx}\|}{\|\underline{dX}\|} = \frac{\sqrt{{}^t \underline{dx} \cdot \underline{dx}}}{\sqrt{{}^t \underline{dX} \cdot \underline{dX}}} \sqrt{{}^t \underline{n}_0 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{n}_0} = \sqrt{{}^t \underline{n}_0 \cdot ({}^t (\underline{\underline{\nabla}} u + \underline{\underline{I}}) \cdot (\underline{\underline{\nabla}} u + \underline{\underline{I}})) \cdot \underline{n}_0}$$

avec $\underline{dX} = dX \underline{n}_0$

Dans le cas des petites déformations l'expression devient :

$$\lambda(M, \underline{n}_0) = \frac{\|\underline{dx}\|}{\|\underline{dX}\|} = \sqrt{{}^t \underline{n}_0 \cdot (2\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{n}_0} = {}^t \underline{n}_0 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n}_0 + 1. \quad (\text{III-9})$$

Si $\underline{n}_0 = \underline{e}_1$ alors :

$$\lambda(M_0, \underline{e}_1) = \sqrt{2\varepsilon_{11} + 1} \approx \varepsilon_{11} + 1$$

La définition (III-9) permet d'écrire la relation existant entre le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$ et le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans le cas des petites déformations :

$$\underline{\underline{C}} = 2\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{I}} \quad (\text{III-10})$$

- Allongement unitaire dans une direction donnée

Pour ce qui est de l'allongement unitaire $\varepsilon(M_0, \underline{n}_0)$, on a la définition suivante :

si $\underline{dX} = dX \underline{n}_0$ et $\underline{dx} = dx \underline{n}$, l'allongement unitaire au point M_0 dans la direction \underline{n}_0 est donné par :

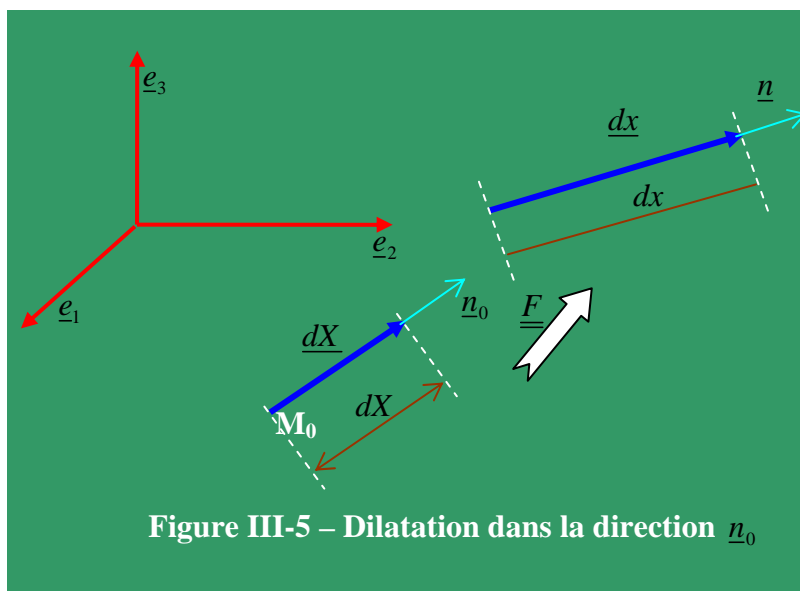
$$\varepsilon(M_0, \underline{n}_0) = \frac{dx - dX}{dX} = \lambda(M, \underline{n}_0) - 1 \quad (\text{III-11})$$

Si $\underline{n}_0 = \underline{e}_1$ alors :

$$\varepsilon(M_0, \underline{e}_1) = \sqrt{2\varepsilon_{11} + 1} - 1$$

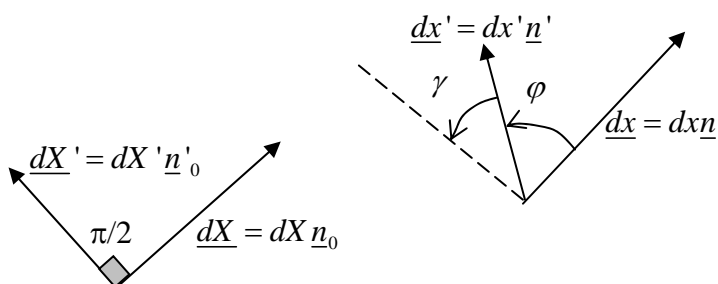
Dans le cas des petites déformations on obtient $\varepsilon(M_0, \underline{e}_1) = \varepsilon_{11}$

Nous aurions obtenus dans les directions $\underline{n}_0 = \underline{e}_2$, $\underline{n}_0 = \underline{e}_3$ respectivement $\varepsilon(M_0, \underline{e}_2) = \varepsilon_{22}$ et $\varepsilon(M_0, \underline{e}_3) = \varepsilon_{33}$. Les termes de la diagonale de la matrice représentant le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont les allongements unitaires de vecteurs orientés dans les trois directions $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.



Transformation des angles : glissement de deux directions orthogonales

Considérons en M_0 deux directions orthogonales $\underline{dX} = dX \underline{n}_0$ et $\underline{dX}' = dX' \underline{n}'_0$ avec $\underline{n}_0 \cdot \underline{n}'_0 = 0$.



Après transformation l'angle $(\underline{n}_0, \underline{n}'_0)$ varie d'un angle γ . En se référant à la figure 29, la valeur de l'angle γ est donnée par :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Une des possibilités pour calculer la valeur d'un angle est de calculer le produit scalaire des deux vecteurs qui le définissent. Dans le cas de la figure III-6 nous aurions :

$$\begin{aligned} \underline{dx} \cdot \underline{dx}' &= \|\underline{dx}\| \|\underline{dx}'\| \cos \varphi = \|\underline{dx}\| \|\underline{dx}'\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \|\underline{dx}\| \|\underline{dx}'\| \sin \gamma = \|\underline{dX}\| \|\underline{dX}'\| {}^t \underline{n}_0 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{n}'_0 \\ \Rightarrow \gamma(M_0, \underline{n}_0, \underline{n}'_0) &= \arcsin \frac{{}^t \underline{n}_0 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{n}'_0}{\lambda(M_0, \underline{n}_0) \lambda(M_0, \underline{n}'_0)} \end{aligned} \quad (\text{III-12})$$

La définition (III-12) permet d'écrire l'expression de $\gamma(M_0, \underline{n}_0, \underline{n}'_0)$ en fonction du tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$\Rightarrow \gamma(M_0, \underline{n}_0, \underline{n}'_0) = \arcsin \frac{{}^t \underline{n}_0 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n}'_0}{\lambda(M_0, \underline{n}_0) \lambda(M_0, \underline{n}'_0)}$$

Dans le cas où l'on prend $\underline{n}_0 = \underline{e}_1$ et $\underline{n}'_0 = \underline{e}_2$, nous obtenons :

$$\Rightarrow \gamma(M_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2) = \arcsin \frac{{}^t \underline{e}_1 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{e}_2}{\lambda(M_0, \underline{e}_1) \lambda(M_0, \underline{e}_2)} = \arcsin \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{2\varepsilon_{11} + 1} \sqrt{2\varepsilon_{22} + 1}} \simeq 2\varepsilon_{12} \quad (\text{III-13})$$

Les termes ε_{ij} tels que $i \neq j$ mesurent le glissement de deux directions orthogonales $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$:

Valeurs principales et directions principales du tenseur des déformations

L'état des déformations étant représenté par une matrice symétrique à coefficients réels, on montre que dans le cas général il existe trois directions $(\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$ pour lesquelles il n'existe pas de distorsion. Le tenseur des déformations est représenté dans cette base par :

$$[\varepsilon]_{(\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont les valeurs principales de la matrice des déformations associées aux directions principales $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3$.

La recherche des valeurs principales $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et des directions principales $(\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$ se fait de la même façon que pour le tenseur des contraintes déjà exposé précédemment.

Cercle de Mohr des déformations

Nous allons, comme dans le cas des contraintes, établir que la déformation et la distorsion pour la famille de facettes passant par une direction principale (par exemple \underline{E}_3) définissent un cercle dans le plan de Mohr des déformations.

Soit \underline{n} la normale en M à l'une des facettes précédemment définies :

$$\begin{aligned} \underline{n} &= \cos \theta \underline{E}_1 + \sin \theta \underline{E}_2 \quad \text{et} \\ \underline{t} &= -\sin \theta \underline{E}_1 + \cos \theta \underline{E}_2 \quad \text{avec } \underline{n} \cdot \underline{t} = 0 \end{aligned}$$

On définit ε_n la déformation sur la facette de normale \underline{n} et γ_m la distorsion sur cette même facette pour les vecteurs \underline{n} et \underline{t} orthogonaux :

$$\varepsilon_n = \varepsilon(M, \underline{n}) = {}^t \underline{n} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \begin{bmatrix} \left(\begin{matrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \gamma(M, \underline{n}, \underline{t}) = 2 {}^t \underline{t} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{n} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \begin{bmatrix} \left(\begin{matrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= -2\varepsilon_1 \cos \theta \sin \theta + 2\varepsilon_2 \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

Soit en prenant l'expression en fonction de l'angle double :

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos(-2\theta) \\ \gamma_{nt}/2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin(-2\theta) \end{cases} \quad (\text{III-14})$$

Nous reconnaissons ici l'équation d'un cercle associé aux variables ε_n et γ_{nt} . Lorsque la valeur de θ varie, le point de coordonnées $(\varepsilon_n, \gamma_{nt}/2)$ décrit dans le plan $(\varepsilon_n, \gamma_{nt}/2)$ un cercle de centre $(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$

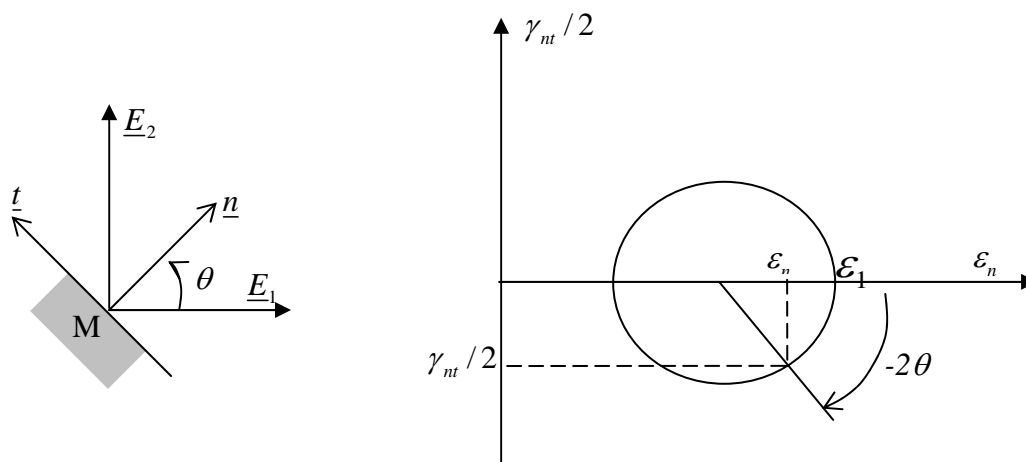


Figure III-6 – Cercle de Mohr des déformations

CHAPITRE IV - LOIS DE COMPORTEMENT

1 – Expérimentation

1 – 1 Introduction

Expérimentalement lorsque un milieu est soumis à des actions mécaniques extérieures de type force ou couple, celui-ci réagit en se déformant. Ces déformations et déplacements dépendent fortement du type de matériau sollicité. En fait chaque milieu possède ses propres caractéristiques et est donc régi par des lois de comportement qui déterminent sa réponse. Les essais expérimentaux sont précisément destinés à identifier le comportement mécanique du matériau à l'aide de relations qui lient les forces intérieures mises en jeu et la réponse sous forme de déformation et déplacement dans la structure et inversement.

Pour caractériser un matériau, nous disposons de plusieurs méthodes expérimentales. Ces essais expérimentaux sont conçus pour identifier le comportement du milieu soumis à différentes sollicitations. Dans le cadre de la résistance des matériaux classique, la caractérisation porte sur un domaine de sollicitation qui ne produit pas de transformations irréversibles. C'est donc uniquement le comportement élastique que nous serons amenés à identifier. Par ailleurs nous nous intéresserons uniquement aux matériaux dits à comportement élastiques linéaires. La linéarité est entendue au sens d'une relation de proportionnalité entre la sollicitation et la réponse du milieu.

Nous considérons donc un milieu homogène isotrope dans lequel nous mesurons de petites déformations. Par ailleurs le milieu est dit dans son état naturel, c'est-à-dire que si les efforts appliqués sur ce milieu sont nulles alors les contraintes internes sont nulles.

Dans le cas des petites transformations nous admettons le principe de superposition que nous rappelons ci-dessous.

Principe de superposition

Si n systèmes de forces extérieurs indépendants provoquent séparément des déformations élastiques et des contraintes, leur application simultanée ou successive provoquera des déformations élastiques et des contraintes qui seront la somme géométrique des déformations et des contraintes prises séparément.

1 – 2 Essais mécaniques

Etat de traction-compression uniaxial

L'essai de traction compression est généralement réalisé sur un barreau dont la géométrie est conçue en fonction du type d'essai prévu. Dans le cas de la traction, essai le plus classique dans le cas des métaux, la section peut être constante ou variable. Dans notre cas nous considérons un barreau a section rectangulaire ou circulaire. Lors de l'essai de traction, on observe une réponse de l'éprouvette en plusieurs stades (Figure 31). Nous nous intéressons uniquement à la phase de comportement élastique linéaire.

Nous observons alors que la force appliquée sur l'éprouvette est proportionnelle à l'allongement. Pour s'affranchir de la géométrie, nous allons raisonner sur des grandeurs spécifiques. Nous utiliserons la contrainte et la déformation au lieu de la force appliquée et du déplacement.

Supposons que l'effort est appliqué dans la direction axiale de l'éprouvette, soit e_1 cette direction. Nous enregistrons un effort $\underline{F} = F e_1$ sur l'une des extrémités de l'éprouvette et un allongement δ dans cette même direction. Nous définissons alors :

- la contrainte longitudinale par $\sigma_1 = \frac{F}{S}$ où S est la section de l'éprouvette

- la déformation longitudinale $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{l}$, où l est la base de mesure de l'allongement.

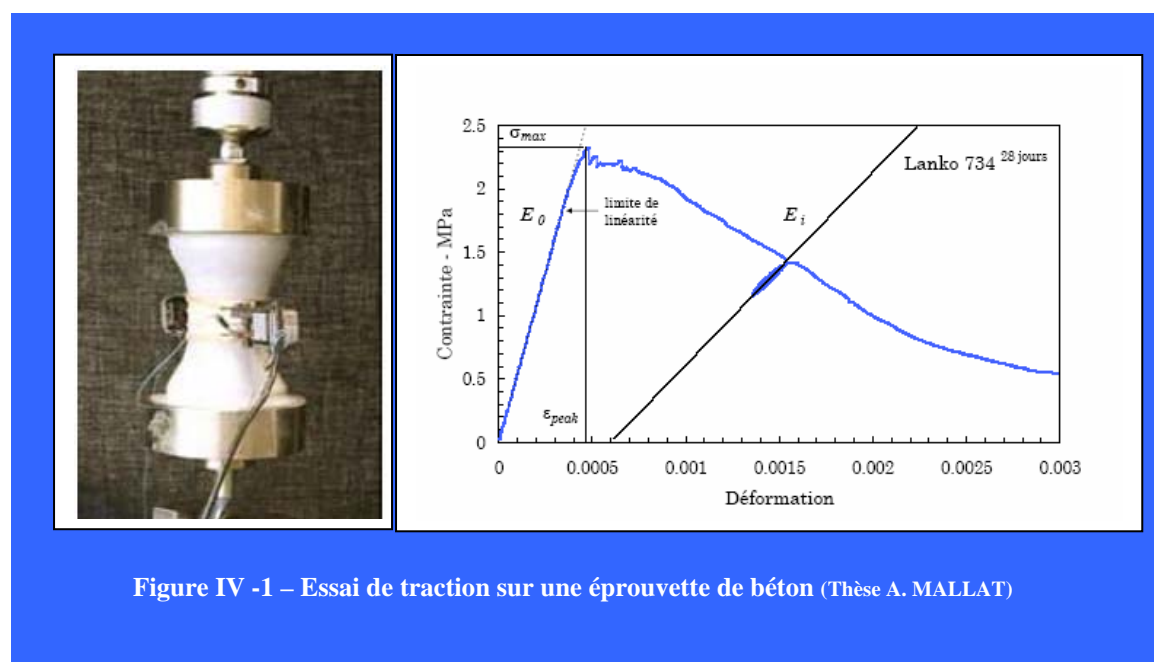


Figure IV -1 – Essai de traction sur une éprouvette de béton (Thèse A. MALLAT)

Du fait de la proportionnalité de ces deux grandeurs dans la phase élastique linéaire nous pouvons écrire :

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1$$

Le coefficient de proportionnalité E décrit la rigidité du matériau et est appelé Module de Young ou module d'élasticité.

Si nous mesurons la déformation dans les directions transverse \underline{e}_2 et \underline{e}_3 par exemple nous trouverons $\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1 = \varepsilon_3$.

Le coefficient de proportionnalité ν entre les déformations axiale et transversale est appelé coefficient de Poisson.

Pour un milieu continu le coefficient de Poisson est compris entre 0 et 0.5.

Ces relations sont algébriques et restent donc valables pour une sollicitation de compression.

2 – Relations de comportement en élasticité

2 – 1 Etat de traction et compression dans deux directions orthogonales

Considérons une plaque centrée sur le repère $(O; x_1, x_2, x_3)$ associé à la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Cette plaque est rectangulaire et est constituée d'un matériau homogène isotrope à comportement élastique et linéaire de module d'élasticité E et de coefficient de Poisson ν .

Cette plaque est soumise dans un premier temps à un effort de traction $F_1\underline{e}_1$ et $-F_1\underline{e}_1$ sur ses deux extrémités opposées (Figure 32). Nous superposons dans un deuxième temps un effort $F_2\underline{e}_2$ et $-F_2\underline{e}_2$ sur les deux autres extrémités.

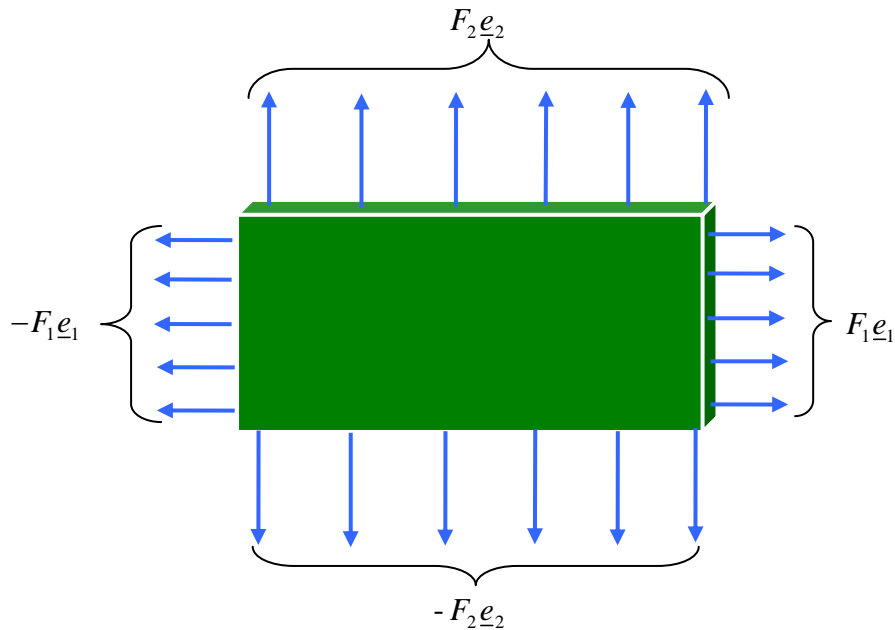


Figure IV-2 – Traction biaxiale

$$\text{On note } \sigma_1 = \frac{F_1}{S_1} \text{ et } \sigma_2 = \frac{F_2}{S_2} \quad (\text{IV-1})$$

Exprimons les déformations dues à $F_1 e_1$:

- Suivant e_1 : $\varepsilon_1^1 = \frac{\sigma_1}{E}$ (IV-2)

- suivant e_2 : $\varepsilon_1^2 = -\nu \frac{\sigma_1}{E}$ (IV-3)

Puis les déformations dues à $F_2 e_2$:

- Suivant e_2 : $\varepsilon_2^2 = \frac{\sigma_2}{E}$ (IV-4)

- suivant e_1 : $\varepsilon_2^1 = -\nu \frac{\sigma_2}{E}$ (IV-5)

Appliquons le principe de superposition pour écrire les déformations totales :

- Suivant e_1 : $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E}$ (IV-6)

- suivant e_2 : $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E}$ (IV-7)

- Par soustraction des deux relations on trouve :

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

2 – 2 Etat de cisaillement pur

On raisonne de nouveau sur un état de contrainte de traction compression sur la même plaque (Figure 32). Nous imposons un effort de traction dans la direction \underline{e}_1 et un effort de compression dans la direction \underline{e}_2 telle qu'apparaissent dans les deux directions deux

contraintes *de même intensité* (Figure IV-3). Ce qui donne $\sigma_1 = \frac{F_1}{S_1}$, $\sigma_2 = -\frac{F_2}{S_2}$ et $\sigma_2 = -\sigma_1$

(traction suivant \underline{e}_1 et compression suivant \underline{e}_2).

Du fait de la configuration du chargement, les directions \underline{e}_1 et \underline{e}_2 sont les directions principales du problème.

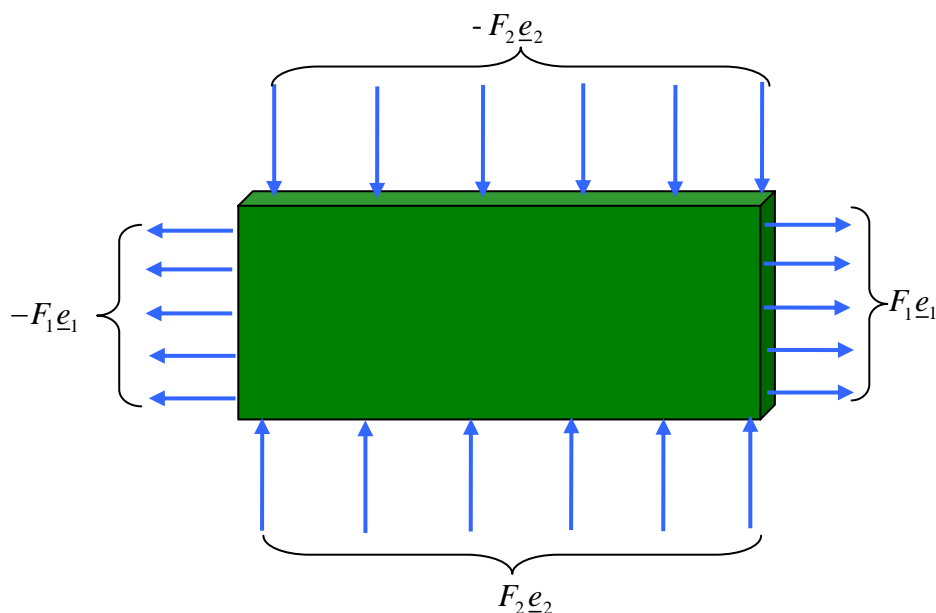


Figure IV-3 – Essai de Traction-compression suivant deux directions

Pour un état plan des contraintes (ce qui est le cas dans la plaque chargée dans son plan), le vecteur contrainte en tout point du milieu peut être exprimé dans la base constituée par la normale \underline{n} et le vecteur tangent \underline{t} avec les composantes suivantes :

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi \\ \tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi \end{cases} \quad (\text{IV-8})$$

Dans ces deux expressions, σ_1 et σ_2 sont les contraintes principales et φ est défini par :

$$\varphi = (\underline{e}_1, \underline{n})$$

Prenons $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ et $\varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$. Les facettes associées à ces deux directions ont les normales respectives \underline{n}_1 et \underline{n}_2 . On obtient pour ces deux facettes les vecteurs contraintes suivants :

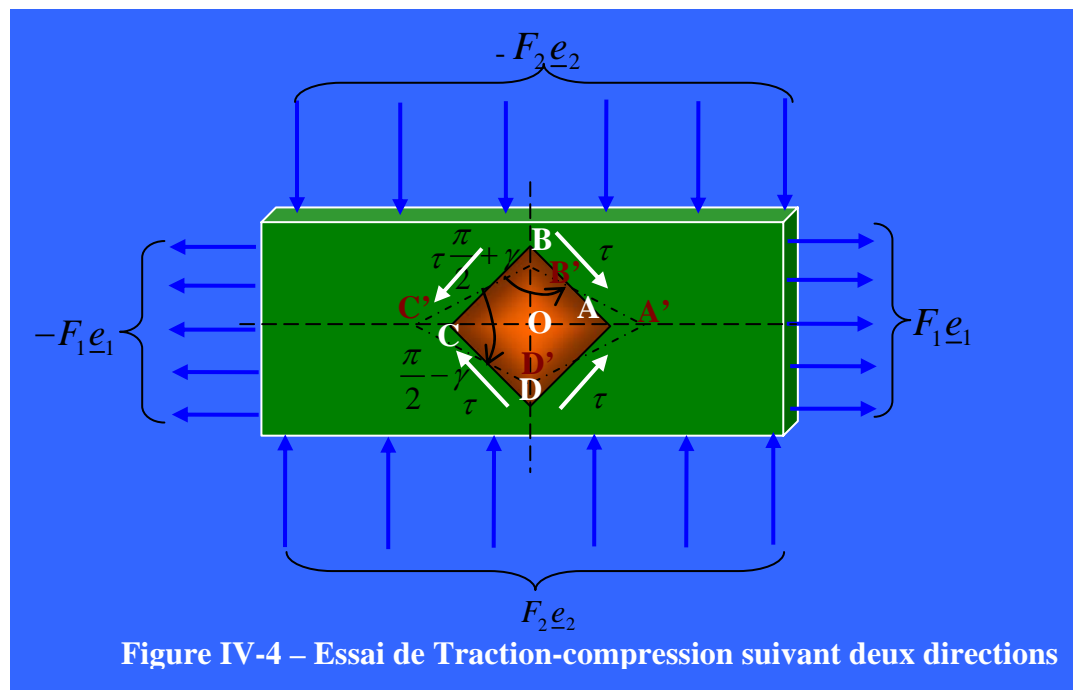
$$\underline{T}(M, \underline{n}_1) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}_1 = \begin{cases} \sigma^1 = 0 \\ \tau^1 = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau \end{cases} \quad (\text{IV-9})$$

$$\underline{T}(M, \underline{n}_2) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}_2 = \begin{cases} \sigma^2 = 0 \\ \tau^2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = -\tau^1 = -\tau \end{cases} \quad (\text{IV-10})$$

On retrouve ici la propriété des composantes tangentielles du vecteur contrainte qui ont des valeurs de signes opposés.

Nous remarquons que les contraintes normales sur ces deux facettes ainsi définies sont nulles. Sur ces deux facettes agit un état de cisaillement pur.

Si nous traçons un carré ABCD autour du centre O de la plaque. Nous remarquerons que celui-ci se déformé pour former un losange (Figure 33).



Nous allons chercher une relation entre la composante tangentielle τ et la variation d'angle γ ou distorsion.

Les allongements (rétrécissements) unitaires des diagonales donnent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{OA' - OA}{OA} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{\tau}{E}(1 + \nu) \\ \varepsilon_2 &= \frac{OB' - OB}{OB} = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = -\frac{\tau}{E}(1 + \nu)\end{aligned}\quad (\text{IV-11})$$

Par ailleurs :

$$\tan(\underline{B'O}, \underline{B'A'}) = \frac{OA'}{OB'} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) \approx \frac{1 + \gamma/2}{1 - \gamma/2}$$

Dans cette expression, nous prenons γ petit, ce qui permet de confondre la tangente et son angle.

Supposons que la longueur de la demi-diagonale avant déformation soit égale à a . Alors :

$$\begin{aligned}OA' &= a\left(1 + \frac{\tau}{E}(1 + \nu)\right) \\ OB' &= a\left(1 - \frac{\tau}{E}(1 + \nu)\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\frac{1 + \gamma/2}{1 - \gamma/2} = \frac{1 + \frac{\tau}{E}(1 + \nu)}{1 - \frac{\tau}{E}(1 + \nu)} \Rightarrow \gamma/2 = \frac{\tau}{E}(1 + \nu).$$

La relation reliant la contrainte de cisaillement à la distorsion est finalement donnée par :

$$\tau = G\gamma, \quad (\text{IV-12})$$

dans laquelle G est le module d'élasticité transversal obtenu à l'aide de la relation :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \mu \quad (\text{IV-13})$$

μ est aussi appelé coefficient de Lamé. Nous reviendrons sur ce coefficient dans le paragraphe ci-dessous.

2 – 3 Loi de Hooke généralisée

Cette loi permet de définir la loi de comportement d'un matériau élastique linéaire, homogène isotrope et pour un état de sollicitation quelconque.

Plaçons-nous dans une base quelconque $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

Désignons par $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ le tenseur agissant dans le milieu et par

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$ le tenseur des déformations associé.

L'état des contraintes peut être considéré comme la superposition des états de sollicitations suivants :

- 3 états de traction uniaxiale suivant les axes associés à la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{\sigma}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

- 3 états de cisaillement pur dans les plans $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{\sigma}}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\underline{\sigma}}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

auxquels correspondent trois états de déformations : $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \end{pmatrix}$,

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\nu \frac{\sigma_{22}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{22}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{22}}{E} \end{pmatrix}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{(3)} = \begin{pmatrix} -\nu \frac{\sigma_{33}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_{33}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{33}}{E} \end{pmatrix}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sigma_{12}}{2\mu} & 0 \\ \frac{\sigma_{21}}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sigma_{13}}{2\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{31}}{2\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{23}}{2\mu} \\ 0 & \frac{\sigma_{32}}{2\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

La superposition des états de contraintes induit dans le cas des petites déformations la superposition de l'état des déformations :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(3)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(4)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(5)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(6)} \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1)} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{(2)} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{(3)} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{(4)} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{(5)} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{(6)}$$

Etant donnés les relations de comportement (IV-1) à (IV-7) nous écrivons la relation qui lie le tenseur des déformations aux tenseur des contraintes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu} \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{13}}{2\mu} \end{cases} \quad (\text{IV-14})$$

Plus généralement on écrit la loi de Hooke sous la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{Tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} \quad (\text{IV-15})$$

Cette expression s'inverse sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda(\text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}} \quad (\text{IV-16})$$

Dans cette dernière relation interviennent les deux coefficients de Lamé donné en fonction de E et ν :

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu} \text{ et } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{IV-17})$$

Démonstration :

De l'expression (92) nous avons :

$$\text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \text{Tr}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{3\nu}{E} \text{Tr}\underline{\underline{\sigma}}$$

D'où : $\text{Tr}\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1-2\nu} \text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}}$ et donc

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\text{Tr}\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}}$$

Conséquences :

De la loi de Hooke on tire :

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\text{Pour un état de contrainte hydrostatique} \begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma \\ \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\sigma}{K} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma \end{cases} \quad (\text{IV-18})$$

$$\text{d'où : } K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (\text{IV-19})$$

K est le module de rigidité à la compression.

E et K sont des réels positifs. Ce qui donne une relation sur le coefficient de Poisson ν :

$0 < \nu \leq 0.5$. Dans le cas où $\nu = 0.5$, il n'y a pas de variation de volume possible. On dit que le milieu est incompressible.

3 – Problèmes particuliers d'élasticité

3 – 1 Contraintes planes

Nous rappelons qu'un solide est en état de contraintes planes par rapport au repère associé sur les vecteurs $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, si le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et les composantes de ce tenseur sont indépendantes des variables}$$

d'espace x_1, x_2 . On en déduit par les lois de comportement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}) \\ \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{array} \right. \quad (\text{IV-20})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV-21})$$

$$\text{L'inversion de ces relations donne : } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) \\ \sigma_{33} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV-22})$$

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{13} = \sigma_{31} = 0 \end{array} \right.$$

La formulation des lois de comportement dans le cas d'un état de contraintes planes est associée aux plaques sollicitées dans leur plan.

3 – 2 Déformations planes

L'état de déformations planes (associé par exemple au plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$) est associé à un état pour lequel les composantes $\varepsilon_{3i} = \varepsilon_{i3} = 0$ (pour $i = 1, 2, 3$), et ε_{ij} indépendant de la variable d'espace x_3 .

Le vecteur déplacement est de ce fait de la forme :

$$\underline{u}(x_1, x_2) \begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2) \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

En utilisant les lois de comportement :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ 0 = \sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-23})$$

En remplaçant le terme $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, on trouve

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}] \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \end{cases} \quad (\text{IV-24})$$

L'inversion des relations (101) donnent :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}((1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}((1-\nu)\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) \text{ ainsi que } \begin{cases} \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu\varepsilon_{12} \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \end{cases} \\ \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{cases} \quad (\text{IV-25})$$

3 – 3 Problèmes axisymétriques

Un problème est dit axisymétrique si le domaine étudié possède une symétrie de révolution et si les tenseurs des contraintes et le tenseur des déformations sont aussi à symétrie de révolution.

Dans le repère cartésien $R(O; x_1, x_2, x_3)$, on considère un solide d'axe de symétrie $(O; x_3)$. Le repérage d'un point M du solide est réalisé grâce aux variables cylindriques (r, θ, z) . Nous écrivons le champ des déplacements par rapport aux variables cylindriques dans la base cylindrique locale $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$

$$\underline{u}(r, z) \begin{cases} u_r(r, z) \\ u_\theta = 0 \\ u_z(r, z) \end{cases}$$

La formulation du tenseur des déformations, compte tenu de la forme du champ des déformations montre que la direction \underline{e}_θ est principale.

Le tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans cette même base est calculé par la formule (III-) déjà établie au chapitre III :

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{u})$ dans cette expression le gradient du champ des déplacement en variables

cylindriques est de la forme : $\underline{\underline{\nabla}}\underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$

Cela donne pour $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans le cas d'un problème axisymétrique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{1}{r} u_r & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ et la matrice des contraintes prend la forme :}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Les lois de comportement peuvent alors s'écrire par l'intermédiaire des relations (93) dans la base cylindrique $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.

3 – 4 Recherche de solutions dans le cas de l'élasticité plane. Fonction d'Airy

Equations d'équilibre et équations de compatibilité en élasticité plane

Force de volume nulle

Nous allons travailler uniquement sur les sous-matrices des contraintes et des déformations respectivement:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

Les termes σ_{33} pour les déformations planes et ε_{33} pour les contraintes planes étant des fonctions des autres termes de la matrice des contraintes respectivement de la matrice des déformations.

L'équation de compatibilité des déformations sous sa forme générale est de la forme :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$$

Dans le cas de l'élasticité plane cela se réduit à l'équation :

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \quad (\text{IV-26})$$

Les équations d'équilibre s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-27})$$

Ces équations sont satisfaites si les contraintes dérivent d'une fonction dite fonction d'Airy $\Phi(x_1, x_2)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \end{array} \right. \quad (\text{IV-28})$$

Pour cela il suffit de remplacer dans les équations (104), les expressions des contraintes (105). En combinant les équations d'équilibre, les équations de compatibilité (103), nous démontrons que la fonction d'Airy $\Phi(x_1, x_2)$ est biharmonique dans le cas où les forces de volumes sont nulles :

$$\Delta \Delta \Phi(x_1, x_2) = 0$$

Pour démontrer cette propriété il suffit d'exprimer dans l'équation de compatibilité (103), les déformations par leur expression en contrainte. Nous obtenons l'expression suivante :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + 3 \frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = 0$$

Toute fonction biharmonique permet donc de satisfaire les équations d'équilibre et les équations de compatibilité.

On vérifie avec les conditions aux limites qu'elle permet d'obtenir la solution unique du problème.

Force de volume dérivant d'un potentiel

Supposant que les forces de volume intervenant dans l'équation d'équilibre dérivent d'un potentiel :

$$\underline{f} = \underline{\text{grad}}(V(x_1, x_2)) = \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{cases}$$

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma_{11} + V)}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial(\sigma_{22} + V)}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-29})$$

Ces équations sont satisfaites pour des contraintes dérivant d'une fonction d'Airy $\Phi(x_1, x_2)$.

La propriété de biharmonicité donné dans le cas d'une force de volume nulle devient dans le cas d'une force de volume dérivant d'un potentiel :

$$\Delta\Delta\Phi(x_1, x_2) = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta V \text{ pour les états de déformations planes et}$$

$$\Delta\Delta\Phi(x_1, x_2) = (1-\nu)\Delta V \text{ pour les états de contraintes planes.}$$

Dans le cas de force de volume homogène :

$$\underline{f} = f_1 \underline{e}_1 + f_2 \underline{e}_2 \text{ avec } f_1 \text{ et } f_2 \text{ constante}$$

Ce qui donne pour les composantes du tenseur des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\partial^2\Phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} - f_1 x_1 \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2\Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - f_2 x_2 \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2\Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \end{cases} \quad (\text{IV-30})$$

4 - Méthode de résolution des problèmes en élasticité linéaire.

4 – 1 Rappels des équations

La résolution d'un problème d'élasticité linéarisé est complète si l'on a identifié les champs de déplacements $\underline{u}(x_1, x_2, x_3)$, de déformation $\underline{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3)$ et de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, x_3)$.

Les équations dont on dispose sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\text{div}}}\underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{f}} &= \underline{\underline{0}} \quad (\text{a}) \\
 \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\underline{u}} + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\underline{u}}) \quad (\text{b}) \\
 \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{c}) \quad (\text{dans le cas isotherme}) \quad (\text{IV-31}) \\
 \sigma_{ij} n_j &= T_i^d \quad \text{sur } (S_{T_i}) \quad (\text{d}) \\
 u_i &= u_i^d \quad \text{sur } (S_{u_i}) \quad (\text{e})
 \end{aligned}$$

Suivant la géométrie du problème ou la forme des conditions aux limites, il sera commode de privilégier soit une résolution directe par le champ de déplacements soit une résolution inverse par les contraintes.

4 - 2 – Méthode des déplacements

Lorsque les données, la forme des conditions aux limites et les symétries géométriques du problème permettent de prévoir une forme simple du champ de déplacement $\underline{\underline{u}}$, on choisit ce dernier comme inconnue principale.

On cherche un champ parmi les champs de déplacement Cinématiquement Admissibles (**C.A**) avec les données c'est-à-dire l'ensemble des champs de vecteurs continus et continument différentiables par morceau, et qui vérifient $u_i = u_i^d$ sur (S_{u_i}) .

Pour le champ $\underline{\underline{u}}$ choisi, on calcule $\underline{\underline{\varepsilon}}$, puis $\underline{\underline{\sigma}}$ grâce à la loi de comportement (IV-31 (c)). Ce champ $\underline{\underline{\sigma}}$ doit vérifier les équations d'équilibre locales (IV-31 (a)), ainsi que les conditions aux limites en contrainte (IV- 31 (d)).

Si cette démarche aboutit, on trouve ainsi la solution en $\underline{\underline{u}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ du problème (éventuellement pour $\underline{\underline{u}}$, à un champ de déplacement de solide près ; voir paragraphe suivant pour les considérations sur l'unicité de la solution).

Si le matériau est homogène et isotrope, sa loi de comportement s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}}$$

où λ et μ constantes (homogénéité).

Alors on établit facilement l'équation de Navier, en introduisant l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et de $\underline{\underline{u}}$:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{div}}\underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{f}} &= \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}}\underline{\underline{u}} + {}^t\underline{\underline{grad}}\underline{\underline{u}}) \\ \underline{\underline{\sigma}} &= 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda Tr\underline{\underline{\varepsilon}}\underline{\underline{1}}\end{aligned}$$

Calculons cette équation de Navier :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{div}}(2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda(Tr\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}}) + \rho \underline{\underline{f}} &= \underline{\underline{0}} \text{ et } \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}}\underline{\underline{u}} + {}^t\underline{\underline{grad}}\underline{\underline{u}}) \\ \Leftrightarrow 2\mu\underline{\underline{div}}\underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\underline{\underline{div}}((Tr\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}}) + \rho \underline{\underline{f}} &= \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{div}}((Tr\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}}) &= \underline{\underline{grad}}(\underline{\underline{div}}\underline{\underline{u}}) & (IV-32) \\ \underline{\underline{div}}\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}}\underline{\underline{u}} + {}^t\underline{\underline{grad}}\underline{\underline{u}}) &= \underline{\underline{\Delta}}\underline{\underline{u}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{rot}}(\underline{\underline{rot}}\underline{\underline{u}}) = \frac{1}{2}[\underline{\underline{\Delta}}\underline{\underline{u}} + \underline{\underline{grad}}(\underline{\underline{div}}\underline{\underline{u}})] \\ \Rightarrow (\lambda + \mu)\underline{\underline{grad}}(\underline{\underline{div}}\underline{\underline{u}}) + \mu\underline{\underline{\Delta}}\underline{\underline{u}} + \rho \underline{\underline{f}} &= \underline{\underline{0}}\end{aligned}$$

Autres formulation :

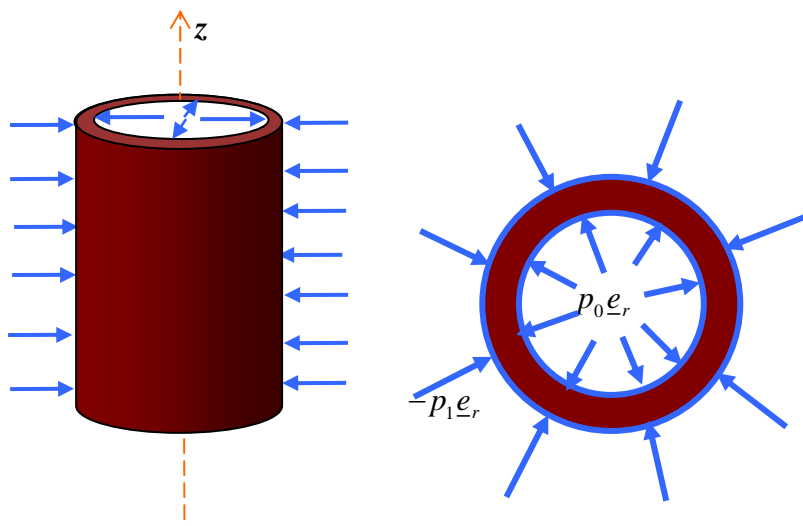
$$(\lambda + 2\mu)\underline{\underline{grad}}(\underline{\underline{div}}\underline{\underline{u}}) - \mu\underline{\underline{rot}}(\underline{\underline{rot}}\underline{\underline{u}}) + \rho \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{0}} \quad (IV-33)$$

A partir de cette équation de Navier qui est en fait une équation différentielle sur les composantes du champ des déplacements, on obtient une solution sur $\underline{\underline{u}}$.

Nous pouvons alors calculer $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par différentiation et $\underline{\underline{\sigma}}$ par les lois de comportement.

Exemple d'application

Nous allons appliquer cette approche sur le cas classique d'un cylindre sou pression intérieure $p_0\underline{\underline{e}}_r$ et extérieure $-p_1\underline{\underline{e}}_r$ et déterminer le champ des déplacements puis le tenseur des déformations et enfin le tenseur des contraintes. Le cylindre est de hauteur h , de rayon intérieure r_0 et extérieure r_1 .



On choisit un champ de déplacement (C.A) avec les conditions aux limites en déplacement de la forme :

$$\underline{u} = u(r)\underline{e}_r + w(z)\underline{e}_z$$

Ce champ est C.A car il n'y a pas de condition aux limites en déplacement. L'objectif dans une première phase n'est pas de trouver la solution mais de proposer comme on l'a dit au vu de la géométrie et du chargement un champ « vraisemblable » qui soit continu, continument différentiable par morceau et qui satisfasse les conditions aux limites en déplacement. Nous vérifierons plus loin si ce champ est solution.

L'équation de Navier (IV-33) pour ce champ donne :

$$\frac{1}{r} \frac{d(ru(r))}{dr} + \frac{dw}{dz} = k \quad (\text{IV-34})$$

La résolution de cette équation donne :

$$u(r) = ar + \frac{b}{r}$$

et $w(z) = cz + d$, une condition en $z = 0 \Rightarrow w(z = 0) = d = 0$ pour supprimer les déplacements rigides.

Le champ des déplacements est en définitif de la forme :

$$u(r) = ar + \frac{b}{r} + cz$$

Le tenseur des déformations est calculé :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dr} & & & \\ & \frac{u}{r} & & \\ & & \frac{dw}{dz} & \\ & & & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{b}{r^2} & & & \\ & a + \frac{b}{r^2} & & \\ & & & c \end{pmatrix}$$

Le tenseur des contraintes est calculé en tenant compte des conditions aux limites :

- Sur la surface $z=0$ $z=h \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(\underline{e}_z) = \underline{0} \Rightarrow \sigma_z = 0$ (pas de chargement)
- Sur la paroi intérieure $r=r_0 \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{e}_r) = p_0 \underline{e}_r \Rightarrow \sigma_{rr}(r_0) = -p_0$
- Sur la paroi extérieure $r=r_1 \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{e}_r) = -p_1 \underline{e}_r \Rightarrow \sigma_{rr}(r_1) = -p_1$

Le tenseur des contraintes ainsi déterminé est statiquement admissible avec les conditions aux limites en contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} A - \frac{B}{r^2} & & & \\ & A + \frac{B}{r^2} & & \\ & & & C \end{pmatrix}$$

avec $A = \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$, $B = \frac{(p_0 - p_1) r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}$, $C = 0$

4-3 Méthode des contraintes

Dans cette approche on choisit le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ comme inconnue principale. On cherche $\underline{\underline{\sigma}}$ parmi les champs Statiquement Admissibles avec les données, c'est-à-dire les champs de tenseur du second ordre symétrique, continus par morceaux et continument différentiables par morceaux, et qui vérifient :

- L'équation d'équilibre (IV-31 (a))
- Les conditions aux limites (IV-31 (d))
- La continuité du vecteur contrainte à la traversée d'éventuelles surfaces de

discontinuités (S) : $\llbracket \underline{\underline{\sigma}} \rrbracket \cdot \underline{n} = \underline{0}$.

Si l'on choisit cette méthode, il est préférable de considérer la forme duale de la loi de comportement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} \text{ ou } \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} \text{ si le matériau est isotrope.}$$

Il faut maintenant, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ étant calculé à partir de $\underline{\underline{\sigma}}$ par la loi de comportement, remonter au champ de déplacement $\underline{\underline{u}}$ grâce à (IV-31 (b)) et écrire éventuellement les conditions aux limites en déplacement.

L'intégrabilité des équations (IV-31 (b)) n'est possible que si les conditions de compatibilités géométriques sont vérifiées (il faut que $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dérive bien d'un champ de vecteur de déplacement). Nous donnons ici les équations de compatibilités sans les démontrer.

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$$

Si le matériau est homogène isotrope et dans le cas où les forces de volumes sont négligeables, on démontre que les conditions d'intégrabilité sont équivalentes aux équations de Beltrami.

$$(1+\nu) \underline{\underline{\text{div}}}(\underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\text{grad}}}(\text{Tr}\underline{\underline{\sigma}})) = \underline{\underline{0}}$$

ou bien sous forme de composantes:

$$(1+\nu)\Delta\sigma_{ij} + \frac{\partial^2(\text{Tr}\underline{\underline{\sigma}})}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

CHAPITRE V - EXTENSOMETRIE EXPERIMENTALE

1 – Introduction

Dans le dernier chapitre portant sur les lois de comportement des matériaux, apparaissent des paramètres qui sont associés uniquement à la nature du matériau du point de vue de la structure (type de milieu, isotropie, homogénéité ...). Pour compléter l'identification du milieu on est amené à identifier les coefficients de base du milieu.

A titre d'exemple pour connaître la loi de comportement d'un milieu élastique linéaire, isotrope homogène nous devons mesurer expérimentalement son module d'élasticité et son coefficient de Poisson.

Ces identifications peuvent être réalisées par différentes méthodes expérimentales. L'une des plus connues et qui donne des résultats précis à l'échelle macroscopique est la mesure des déformations par des jauges de résistance électrique. Cette méthode est classiquement appelée extensométrie expérimentale. Nous allons dans ce chapitre en donner quelques notions qui restent suffisantes pour comprendre le fonctionnement de ce type d'équipement.

2 – Principe

On sait que la résistance électrique d'un fil métallique est donnée par la formule :

$$R = \rho \frac{L}{s}$$

Dans cette formule, ρ est la résistivité du fil, L sa longueur et s l'aire de sa section droite. Cette formule nous indique qu'une variation de L a pour conséquence une variation de R . La différentiation de cette formule nous fournit l'expression de la variation de la résistance électrique en fonction de celle de la longueur.

Le principe de la mesure des déformations consiste à coller un fil métallique (généralement du cuivre) sur la surface de la pièce dont on veut connaître la déformation et à mesurer la variation de résistance à travers la variation du potentiel aux extrémités de ce fil. Connaissant la relation existante entre la résistance et le potentiel dans le fil on en déduit celle de la longueur L .

La mesure de la variation du potentiel est réalisée à l'aide d'un montage électrique appelé pont de Wheatstone.

Le pont de Wheatstone permet de lire grâce à un voltmètre la déformation de l'éprouvette en surface, jusqu'à une précision de 10^{-7} mètres. Du fait de la dépendance de la valeur de la résistance de la température et des propriétés de la colle utilisée pour le collage cette technique est limitée à une utilisation aux températures proches des températures ambiantes.

Une combinaison de plusieurs résistances orientées dans des directions choisies permet de déterminer l'état des déformations en un point M à la surface de la pièce $\underline{\underline{\varepsilon}}(M)$

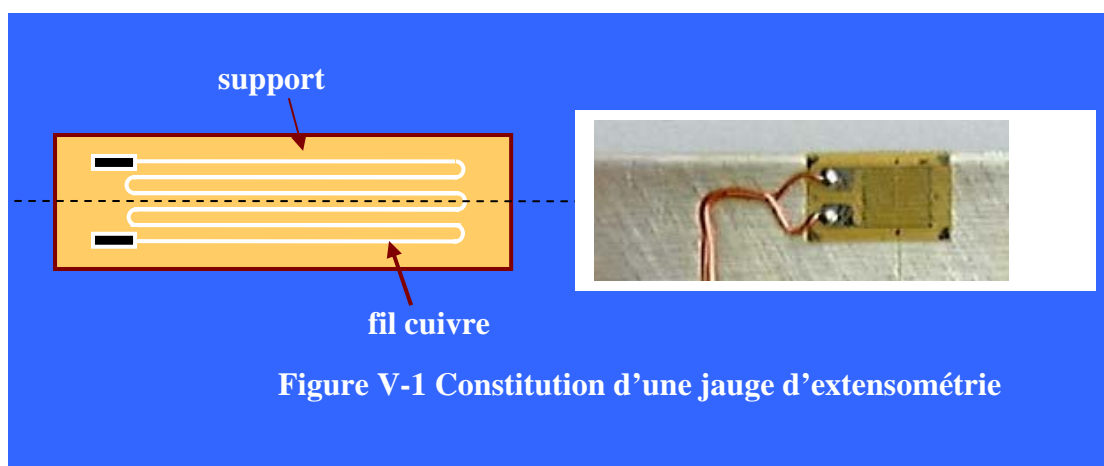
Pour connaître les contraintes, il suffit ensuite d'utiliser les relations de la loi de comportement liant $\underline{\underline{\varepsilon}}(M)$ à $\underline{\underline{\sigma}}(M)$.

Cette technique ne permet donc de connaître que les contraintes superficielles d'un solide. Mais en général, c'est en surface qu'apparaissent les contraintes les plus élevées, donc les plus dangereuses.

Description et fonctionnement d'une jauge

Une jauge de déformation est donc constituée d'un fil métallique qui permet de déterminer la variation unitaire de longueur dans une direction donnée. Nous noterons $\varepsilon(M, \underline{n})$ cette déformation :

$$\varepsilon(M, \underline{n}) = \frac{\delta L}{L}$$



Du point de vue de la composition de la jauge, celle-ci se compose d'un fil résistant fin noyé dans un support rectangulaire de dimension plus ou moins importante suivant le type de pièce à caractériser.

Le fil résistant a la forme d'un serpentif afin d'augmenter sa longueur et donc de diminuer au maximum l'erreur sur la mesure.

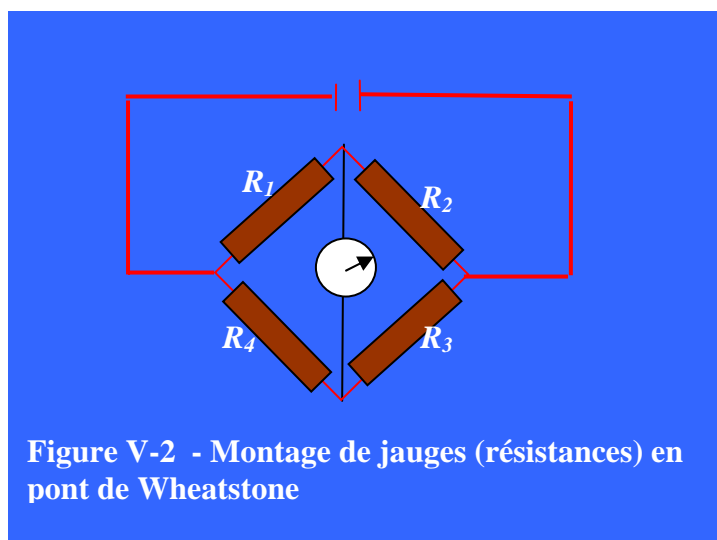
Si nous revenons sur la formule de la variation de résistances nous pouvons écrire

$$\frac{\delta R}{R} = k \frac{\delta L}{L} = k \varepsilon(M, \underline{n})$$

k prend en générale la valeur 2. Il est appelé le facteur de jauge et est précisé par le fabricant pour chaque type de jauge. R est la résistance nominale égale généralement à 120 ou 350 Ω .

La connaissance de la variation de R permet d'accéder à la valeur de la déformation $\varepsilon(M, \underline{n})$.

La mesure de $\frac{\delta R}{R}$ est réalisé grâce à un montage appelé le pont de Wheatstone



Les résistances ainsi disposées sur le pont de Wheatstone aboutit à une relation de la forme suivante : $R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4$, relation valable lorsque le pont est équilibré.

Ce qui se traduit par : $U_A = U_C$. Soit $\delta u = 0$. Si on rompt l'équilibre en faisant varier les résistances d R_1 , d R_2 , d R_3 , d R_4 , alors il se produit une tension de déséquilibre δu .

On a la relation :

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{1}{4} \left(\frac{dR_1}{R_1} - \frac{dR_2}{R_2} + \frac{dR_3}{R_3} - \frac{dR_4}{R_4} \right)$$

Il suffit donc pour lier $\frac{\delta u}{u}$ et $\varepsilon(M, \underline{n})$, de remplacer une résistance dans le pont de

Wheastone par une jauge extensométrique (par ex R_1), tout en fixant les 3 autres. On a donc $dR_2 = dR_3 = dR_4 = 0$.

On réalise tout d'abord l'équilibrage du pont, puis on charge le solide, ce qui crée la tension de déséquilibre.

$$\varepsilon_x = \frac{\delta L}{L} = \frac{1}{k} \frac{\delta R}{R} \text{ d'où } \varepsilon_x = \frac{4}{k} \frac{\delta U}{U}$$

On a donc directement la déformation $\varepsilon(M, \underline{n})$ en fonction δu .

Cette forme de montage de la jauge s'appelle montage en quart de pont. Il existe d'autres possibilités en demi-pont ou en pont complet.

3 – Rosettes de jauges

Dans le cas des problèmes plan, le nombre d'inconnues sont les composantes du tenseur des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et qui sont au nombre de 3. Il nous faut donc trois équations afin d'identifier le tenseur des déformations en un point du milieu. On utilise pour cela un système de 3 jauges appelé rosette de jauges servant à mesurer les allongements unitaires dans trois directions

Vu que l'on est en présence d'un état plan de contraintes, ces matrices s'écrivent :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

L'allongement unitaire dans la direction \underline{n} a été défini par :

$$\varepsilon(\underline{n}) = \sqrt{1 + 2^t(\underline{n})\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{n})} - 1$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ étant le tenseur des déformations dans le cas des petites perturbations, on peut approcher

$\varepsilon(\underline{n})$ par :

$$\varepsilon(\underline{n}) = (\sqrt{1 + 2^t(\underline{n})\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{n})} - 1) = 1 + \frac{1}{2}(2^t(\underline{n})\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{n})) - 1 = {}^t(\underline{n})\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{n})$$

Nous allons utiliser cette méthode dans le cas d'une rosette de 3 jauges.

Nous collons une rosette de 3 jauges sur une surface que l'on peut considérer comme plane localement. Soient $(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3)$ les trois directions considérées définies par leur coordonnées dans une base cartésiennes $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$:

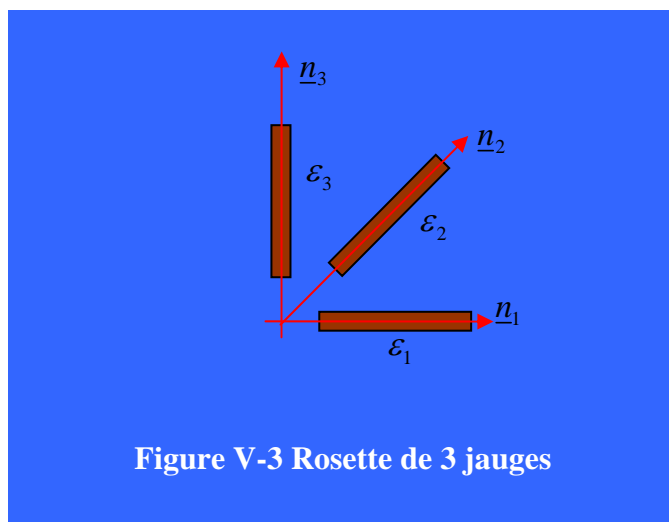
$$\underline{n}_1(0, 0, 0), \underline{n}_2(\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \underline{n}_3(\cos 2\varphi, \sin 2\varphi, 0)$$

Les déformations enregistrées par ces trois jauges sont données par la formule précédente :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{11}(\cos \varphi)^2 + 2\varepsilon_{12} \sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon_{22}(\sin \varphi)^2$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{11}(\cos 2\varphi)^2 + 2\varepsilon_{12} \sin 2\varphi \cos 2\varphi + \varepsilon_{22}(\sin 2\varphi)^2$$



Ce qui donne, pour les jauges à 45 degrés:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{12}) \end{cases}$$

Car le vecteur \underline{n}_2 a pour coordonnées dans la base $(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$:

$$n_2 \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Les valeurs des composantes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont identifiées :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} \end{cases}$$

La compensation thermique

Au cours des mesures de déformations, la température peut varier dans le solide. Or, une variation de température entraîne une dilatation des matériaux ε_{th} proportionnelle à cette variation :

$$\varepsilon_{th} = \alpha \Delta T$$

où α est le coefficient de dilatation thermique linéique, propre au matériau.

La jauge extensométrique, elle, indique la déformation globale au point M, qui est en fait la somme de deux déformations dues à deux phénomènes différents :

- ε_σ due aux contraintes
- ε_{th} due à ΔT

C'est pourquoi il existe des jauges qui compensent la dilatation thermique, et permettent ainsi de ne mesurer que les déformations dues aux contraintes ε_σ .

ANNEXES

ANNEXE 1

CALCULS VECTORIELS

Dans tout ce qui suit on s'intéresse à l'ensemble E des vecteurs \underline{V} de l'espace usuel.

E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

1 - Produit scalaire.

On définit le produit scalaire de deux vecteurs \underline{V}_1 et \underline{V}_2 par

$$\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2 = \|\underline{V}_1\| \|\underline{V}_2\| \cos(\underline{V}_1, \underline{V}_2)$$

Si (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont les coordonnées de \underline{V}_1 et \underline{V}_2 dans une base orthonormée directe $b(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$

$$\text{Avec } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{alors}$$

le produit scalaire peut aussi s'exprimer sous la forme :

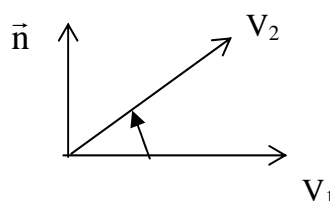
$$\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

2 - Produit vectoriel.

On définit le produit vectoriel de deux vecteurs \underline{V}_1 et \underline{V}_2 de E par :

$$\underline{V}_1 \wedge \underline{V}_2 = \|\underline{V}_1\| \|\underline{V}_2\| \sin(\underline{V}_1, \underline{V}_2) \cdot \underline{n}$$

avec \underline{n} vecteur unitaire directement perpendiculaire à \underline{V}_1 et \underline{V}_2 .



Remarques : a) bilinéarité : $(\lambda \underline{V}_1 + \mu \underline{V}_2) \wedge (\underline{V}_3) = \lambda (\underline{V}_1 \wedge \underline{V}_3) + \mu (\underline{V}_2 \wedge \underline{V}_3)$

b) cas de nullité :

- les deux vecteurs sont colinéaires
- l'un des vecteurs est nul

c) produits de vecteurs de base

$$\begin{array}{lll} \underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2 = \underline{e}_3 & \underline{e}_2 \wedge \underline{e}_3 = \underline{e}_1 & \underline{e}_3 \wedge \underline{e}_1 = \underline{e}_2 \\ \bar{\underline{e}}_2 \wedge \bar{\underline{e}}_3 = \bar{\underline{e}}_1 & \bar{\underline{e}}_2 \wedge \bar{\underline{e}}_1 = -\bar{\underline{e}}_3 & \bar{\underline{e}}_1 \wedge \bar{\underline{e}}_3 = -\bar{\underline{e}}_2 \end{array}$$

d) composantes dans la base b :

$$\underline{V}_1 \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} \text{ et } \underline{V}_2 \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} \quad \underline{V}_1 \wedge \underline{V}_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_1 \end{vmatrix}$$

3 - Produit mixte.

On appelle produit mixte de 3 vecteurs $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ la quantité :

$$\alpha = (\underline{V}_1 \wedge \underline{V}_2) \cdot \underline{V}_3$$

On observe que cette quantité est un scalaire.

Ce scalaire est invariant par permutation circulaire de ces trois vecteurs :

$$\alpha = (\underline{V}_1 \wedge \underline{V}_2) \cdot \underline{V}_3 = (\underline{V}_2 \wedge \underline{V}_3) \cdot \underline{V}_1 = (\underline{V}_3 \wedge \underline{V}_1) \cdot \underline{V}_2$$

Le produit scalaire étant commutatif, le produit mixte est invariant par permutation des opérateurs :

$$\alpha = (\underline{V}_1 \wedge \underline{V}_2) \cdot \underline{V}_3 = \underline{V}_1 \cdot (\underline{V}_2 \wedge \underline{V}_3) \cdot$$

Notation : le produit mixte est généralement noté sous la forme suivante :

$$(\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3)$$

Cas de nullité :

- les trois vecteurs sont coplanaires
- deux des vecteurs sont coplanaires
- l'un des vecteur est nul.

4 - Double produit vectoriel.

Le double produit vectoriel $\underline{V}_1 \wedge (\underline{V}_2 \wedge \underline{V}_3)$ est un vecteur perpendiculaire à $(\underline{V}_2 \wedge \underline{V}_3)$ et à \underline{V}_1 . Il se trouve donc dans le plan formé par les vecteurs \underline{V}_2 et \underline{V}_3 et peut s'écrire comme une combinaison linéaire :

$$\underline{V}_1 \wedge (\underline{V}_2 \wedge \underline{V}_3) = \lambda \underline{V}_2 + \mu \underline{V}_3.$$

Par identification, on détermine les valeurs de λ et μ , et on obtient :

$$\underline{V}_1 \wedge (\underline{V}_2 \wedge \underline{V}_3) = (\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_3) \cdot \underline{V}_2 - (\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2) \cdot \underline{V}_3.$$

ANNEXE 2

TORSEURS

I- Applications antisymétriques.

Soit une application de l'espace vectoriel E dans E :

$$\underline{u} (M) \rightarrow L(\underline{u} (M))$$

$$L \text{ est antisymétrique } \Leftrightarrow \forall (\underline{u}, \underline{v}) \in E \times E : \underline{u}.L(\underline{v}) = -\underline{v}.L(\underline{u})$$

Propriété : Toute application antisymétrique est linéaire.

$\forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in E$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{R}$ on a :

$$L(\alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2) = \alpha_1 L(\underline{u}_1) + \alpha_2 L(\underline{u}_2).$$

Soit maintenant $[L]$ la matrice représentant l'application par rapport à la base orthonormée directe $\beta (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ de E :

$$[L] = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{aligned} l_{11} &= \underline{e}_1.L(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1.L(\underline{e}_1) = -l_{11} = 0 \\ l_{ij} &= \underline{e}_i.L(\underline{e}_j) = -\underline{e}_j.L(\underline{e}_i) = -l_{ji} \text{ pour tout } i \neq j \end{aligned}$$

Posons arbitrairement $l_{12} = -r_3 ; l_{13} = r_2 ; l_{23} = -r_1$

$$\text{d'où } [L] = \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on remarque alors que } \forall \underline{u} \in E ;$$

$$L(\underline{u}) = \underline{R} \wedge \underline{u}$$

où $\underline{R} = r_1 \underline{e}_1 + r_2 \underline{e}_2 + r_3 \underline{e}_3$ est appelé le vecteur caractéristique de l'application antisymétrique L .

Expression du vecteur caractéristique :

Si $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ sont les vecteurs unitaires de la base orthonormée de l'espace vectoriel E , alors on a la relation suivante :

$$\underline{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \underline{e}_i \wedge L(\underline{e}_i)$$

Démonstration : En utilisant la relation du double produit vectoriel ;

$$\sum_{i=1}^3 \underline{e}_i \wedge L(\underline{e}_i) = \sum_{i=1}^3 \underline{e}_i \wedge (\underline{R} \wedge \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^3 (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_i) > \cdot \vec{R} - (\underline{e}_i \cdot \vec{R}) \cdot \underline{e}_i = 2\underline{R}$$

Champ antisymétrique :

Le champ $\alpha : Q \rightarrow \underline{\alpha}(Q)$ est antisymétrique, s'il existe une application antisymétrique L , telle que :

$$\forall M \text{ et } P \in \mathcal{E} : \underline{\alpha}(M) = \underline{\alpha}(P) + L(\underline{PM})$$

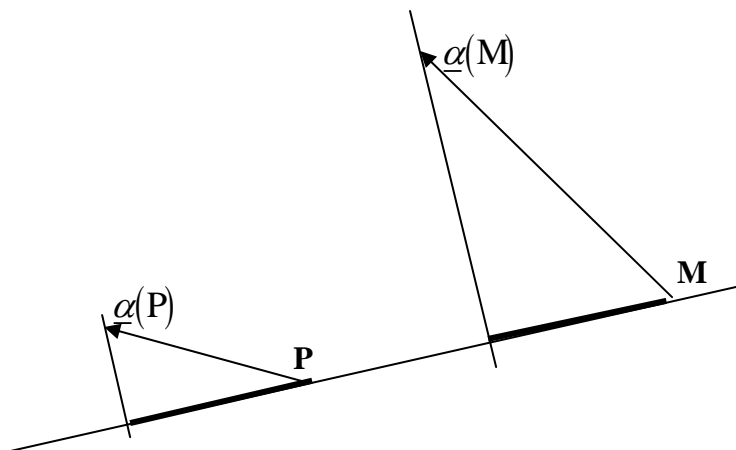
$$\text{Soit } \forall M, P \in \mathcal{E} : \underline{\alpha}(M) = \underline{\alpha}(P) + \underline{R} \wedge \underline{MP}$$

Propriété : Prémultiplions scalairement par \underline{MP} :

$$\underline{\alpha}(M) \cdot \underline{MP} = \underline{\alpha}(P) \cdot \underline{MP} + \underline{MP} \cdot (\underline{S} \wedge \underline{PM})$$

$$\text{or } \underline{MP} \cdot (\underline{S} \wedge \underline{PM}) = 0 \Rightarrow \underline{\alpha}(M) \cdot \underline{MP} = \underline{\alpha}(P) \cdot \underline{MP}$$

Le vecteur $\underline{\alpha}(M)$ a la même projection que $\underline{\alpha}(P)$ sur la direction \underline{PM} .



Un champ antisymétrique est équijectif.

Démontrons la réciproque

$$\underline{\alpha}(M) \cdot \underline{MP} = \underline{\alpha}(P) \cdot \underline{MP}$$

En insérant un point fixé O , l'expression devient :

$$\underline{\alpha}(M) \cdot (\underline{OP} - \underline{OM}) = \underline{\alpha}(P) \cdot (\underline{OP} - \underline{OM})$$

Par ailleurs nous pouvons aussi écrire :

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}(M) \cdot \underline{OM} - \underline{\alpha}(M) \cdot \underline{OP} &= \underline{\alpha}(P) \cdot \underline{OM} - \underline{\alpha}(P) \cdot \underline{OP} \\ \Leftrightarrow \underline{\alpha}(O) \cdot \underline{OM} - \underline{\alpha}(M) \cdot \underline{OP} &= \underline{\alpha}(P) \cdot \underline{OM} - \underline{\alpha}(O) \cdot \underline{OP} \\ \Leftrightarrow \underline{OM} \cdot (\underline{\alpha}(O) - \underline{\alpha}(P)) &= \underline{OP} \cdot (\underline{\alpha}(M) - \underline{\alpha}(O)) \end{aligned}$$

On définit une application L telle que :

$$\begin{aligned} L(\underline{OP}) &= (\underline{\alpha}(P) - \underline{\alpha}(O)) \\ L(\underline{OM}) &= -(\underline{\alpha}(O) - \underline{\alpha}(M)) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\underline{OM} \cdot L(\underline{OP}) = -\underline{OP} \cdot L(\underline{OM})$$

L'application L est donc bien antisymétrique. De plus nous avons

$$\underline{\alpha}(P) = \underline{\alpha}(O) + L(OP)$$

$\underline{\alpha}(P)$ est donc un champ de vecteur associé à une application antisymétrique.

II - Torseurs.

1) Définition : On appelle torseur $\{T\}$ l'ensemble d'un champ antisymétrique m et de son vecteur \underline{R} caractérisé en un point M (quelconque) par le vecteur $\underline{m}_{(M)}$ appelé moment du torseur et le vecteur \underline{R} appelé résultante du torseur.

On a donc la relation pour tout couple de point (M, P)

$$\underline{m}_{(M)} = \underline{m}_{(P)} + \underline{MP} \wedge \underline{R} \text{ appelé formule de transport.}$$

$$\text{On écrit aussi : } \{T\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \underline{R} \\ \underline{m}_{(M)} \end{array} \right\}.$$

2) Invariant scalaire

Multiplions scalairement cette relation par \vec{R} .

$$\underline{m}(M) \cdot \underline{R} = \underline{m}_{(P)} \cdot \underline{R} + (\underline{MP} \wedge \underline{R}) \cdot \underline{R} = cste$$

$$\text{or } (\underline{MP} \wedge \underline{R}) \cdot \underline{R} = 0$$

d'où l'invariant I :

$$I = \underline{m}(M) \cdot \underline{R} = \underline{m}_{(P)} \cdot \underline{R}$$

3) Invariant vectoriel

$$\text{On définit le vecteur } \underline{u} = \frac{\underline{R}}{\|\underline{R}\|} ; \underline{u} \cdot \underline{m}_{(M)} = \underline{u} \cdot \underline{m}_{(P)} = cste$$

L'invariant vectoriel est le vecteur $\underline{I} = I \underline{u}$. (vecteur projection de \underline{m} sur \underline{R}).

4) Opérations sur les torseurs

• Sommes $\{L\}_M = \{L_1\}_M + \{L\}_{M_2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{R} = \underline{R}_1 + \underline{R}_2 \\ \underline{m}_M = \underline{m}_{1M} + \underline{m}_{2M} \end{array} \right\}$

• Multiplications par un scalaire.

$$\{L\}_M = \alpha \{L_1\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{R} = \alpha \underline{R}_1 \\ \underline{m}_M = \alpha \underline{m}_{1M} \end{array} \right.$$

• Produit (Comoment de deux torseurs).

C'est le réel $P = \underline{R}_1 \cdot \underline{m}_{2(M)} + \underline{R}_2 \cdot \underline{m}_{1(M)}$. Il est indépendant du choix du point M. (pour le calculer il faut impérativement que les deux torseurs soient définis au même point).

5) Exemple de torseur : Torseur associé à un vecteur lié.

Soit (A, \underline{u}) un vecteur lié de E . En mécanique on rencontre beaucoup de grandeurs représentées par un vecteur défini en un point de l'espace. C'est le cas d'une force appliquée en point (exemple le poids), du champ des vitesses d'un solide ... A chaque point M faisons correspondre le vecteur $\underline{m}_{(M)} = \underline{MA} \wedge \underline{u}$, moment du vecteur lié.

L'ensemble formé par le vecteur \vec{u} et le champ m forme un torseur. En effet :

$$\underline{m}_{(P)} = \underline{PA} \wedge \vec{u} = (\underline{PM} + \underline{MA}) \wedge \underline{u} = \underline{PM} \wedge \underline{u} + \underline{m}_{(M)}$$

$\underline{m}_{(P)}$ est un champ antisymétrique donc un champ de moment de torseur.

Pour que le moment soit nul en un point M, il faut et il suffit que le vecteur lié passe par M. Il faut en effet que \underline{MA} et \underline{u} soient colinéaires.

6) Torseurs élémentaires

a) Glisseur : Un torseur est un glisseur s'il existe un vecteur lié dont il soit le torseur associé.

$$\{L\} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{u} \\ \underline{m} \end{array} \right\} \text{ est un glisseur } \Leftrightarrow \text{ il existe un vecteur lié } (A, \underline{u}) \text{ tel que } \forall P, \underline{m}_P = \underline{PA} \wedge \underline{u}.$$

Axe d'un glisseur non nul. Soit B point de la droite (A, \underline{u})

$$\underline{m}_{(P)} = \underline{PA} \wedge \underline{u} = (\underline{PB} + \underline{BA}) \wedge \underline{u} = \underline{PB} \wedge \underline{u}.$$

$\{L\}$ est un glisseur associé à (B, \underline{u}) ceci $\forall B \in$ à la droite (A, \underline{u})

Par définition cette droite passant par A et parallèle à \underline{u} est l'axe du glisseur.

Le moment d'un glisseur est donc nul en tout point de l'axe.

Réciproquement pour qu'un torseur soit un glisseur, il faut il suffit qu'il existe un point où son moment soit nul.

Donc si un torseur de résultante \underline{R} , a un moment nul en A, alors c'est un glisseur associé au vecteur lié (A, \underline{R}) .

Propriété L'invariant scalaire d'un glisseur est nul.

$$\underline{u} \cdot \underline{m}_{(P)} = \underline{u} \cdot (\underline{PA} \wedge \underline{u}) = 0$$

b) Couples Considérons un torseur tel que son moment soit indépendant du point où on le calcule :

$$\forall M, P \text{ distincts } \underline{m}_{(P)} = \underline{m}_{(M)} + \underline{PM} \wedge \underline{R} = \underline{m}_{(M)} \Rightarrow \underline{PM} \wedge \underline{R} \Rightarrow \underline{R} = 0 .$$

Remarque : Un couple peut-être obtenu d'une infinité de façon en particulier par la somme de deux glisseurs de résultantes parallèles, de même module et de sens contraires.

7) Décomposition

$$\text{Soit } \{L\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \underline{R} \\ \underline{m}_M \end{array} \right\}$$

$$\{L\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \underline{R} \\ \underline{m}_A + \underline{MA} \wedge \underline{R} \end{array} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \underline{R} \\ \underline{MA} \wedge \underline{R} \end{array} \right\}}_{\text{Glisseur associé à } (A; \underline{R})} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \underline{O} \\ \underline{m}_A \end{array} \right\}}_{\text{Couple}}$$

Un torseur quelconque est donc la somme d'un glisseur associé à (A, \underline{R}) et d'un couple de moment \underline{m}_A .

8) Axe centrale d'un torseur.

L'axe central d'un torseur est le lieu des points où le moment du torseur est colinéaire à la résultante

$$A.C = \{ P \in (\zeta) / \underline{m}_P = \lambda \underline{R} \}$$

$$\lambda = \frac{\underline{m}_P \cdot \underline{R}}{R^2} \text{ est le pas de l' Axe. Central (C. A.)}$$

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES

RESISTANCE DES MATERIAUX

P. AGATI, F. LEROUGE , M. ROSSETTO

Edition DUNOD

RESISTANCE DES MATERIAUX

M. KERGUIGNAS, G. CAIGNAERT

Edition DUNOD UNIVERSITE

RESISTANCE DES MATERIAUX

W. A. NASH

Edition Mc GRAW HILL

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

J. SALENCON

Edition ELLIPSES

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

G. DUVAUT

Edition EYROLLES

COURS D'ELASTICITE

J. P. HENRY, F. PARSY

Edition DUNOD UNIVERSITE

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

J. COIRIE

Edition DUNOD

MECANIQUE DES SOLIDES

L. GRANJON

Cours ESISAR - INPG

WEB COURS

J. BASTIEN

<http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/index.html>

J. GARRIGUES

<http://jgarrigues.perso.ec-marseille.fr/>

G. HENON

<http://ufr-math.univ-lille1.fr/Fiches/MecaSolide/index.html>

ASSOCIATION LIBRE COURS

<http://www.librecours.org/cgi-bin/main>

IMAGES ET REPRESENTATIONS TIREES EN PARTIE DE :

<http://images.google.fr/>