



MECANIQUE DU SOLIDE RIGIDE
ENSEIGNEMENT DE LICENCE DE MECANIQUE
UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
LA 201 SECTION B
ANNEE 2006-2007

CHAPITRE I - CALCUL VECTORIEL – RAPPELS DE MATHÉMATIQUES

1 Espace vectoriel et représentation d'un vecteur.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n = 3$, en fait \mathcal{R}^3 , de base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ formée de 3 vecteurs linéairement indépendants. Tout vecteur de E peut être représenté par une combinaison linéaire des vecteurs de base de b :

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 \text{ ou bien sous la forme } \vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i\vec{e}_i.$$

Une autre notation peut être adoptée, appelée aussi convention de l'indice muet ou convention d'Einstein :

$$\vec{v} = v_i\vec{e}_i$$

L'indice répété i est l'indice muet sur lequel se fait l'opération. Cette convention n'est applicable que dans le même monôme.

L'espace vectoriel E est souvent représenté par un repère R possédant une origine O et une base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On notera :

$$R = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

2 Opérations sur les vecteurs

2 – 1 Produit scalaire

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique de $E \times E$ sur \mathcal{R} telle que la forme quadratique associée soit définie positive.

Par définition une forme bilinéaire f est une application qui à deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de E associe le réel $f(\vec{u}, \vec{v})$. Par ailleurs f est une application linéaire par rapport à chacun des arguments.

Notation :

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

La symétrie du produit scalaire est définie par la propriété :

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = f(\vec{v}, \vec{u})$$

Une forme est dite définie positive si le produit scalaire d'un vecteur par lui-même $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est positif et ne s'annule que si le vecteur $\vec{u} = \vec{0}$.

Remarques :

- On définit le produit scalaire de 2 vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans une base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_i \vec{e}_i) \cdot (v_j \vec{e}_j) = u_i v_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i \cdot \sum_{j=1}^3 v_j \vec{e}_j$$

- Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Cette dernière propriété nous permet d'écrire que dans le cas d'une base orthonormée nous avons :

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

D'où une autre écriture possible pour le produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_i \vec{e}_i) \cdot (v_j \vec{e}_j) = u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Norme d'un vecteur : Parmi les définitions possibles de la norme on retiendra celle de la norme euclidienne :

$$\|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{1/2} = \sqrt{u_i \cdot u_i} = \sqrt{\sum_i u_i^2}$$

On se sert de cette dernière définition pour introduire une nouvelle notation du produit scalaire impliquant l'angle entre les deux vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

2 – 2 Produit mixte

Soit E un espace vectoriel de base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On appelle produit mixte des vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} de E , leur déterminant dans la base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On le note :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

On démontre que le déterminant est invariant par changement de la base b .

Propriétés :

- Le produit mixte est invariant par rotation circulaire des vecteurs. Cette propriété est directement liée à celle des déterminants :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$$

- Le produit mixte de 3 vecteurs coplanaires est nul :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ liés}$$

Les autres cas de nullité du produit mixte se vérifient dans le cas où deux des trois vecteurs sont colinéaires, et lorsque un des vecteurs est nul.

2 – 3 Produit vectoriel :

Théorème :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de E .

- l'application

$$\varphi : E \rightarrow R$$

$$\vec{w} \mapsto (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

est une forme linéaire.

- Il existe un unique vecteur $\vec{\alpha}$ de E tel que :

$$\forall \vec{w} \in E, \varphi(\vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{w}$$

Démonstration :

- φ est linéaire puisque le déterminant est linéaire par rapport au dernier argument.
- unicité de la deuxième proposition :

Supposons qu'il existe deux vecteurs $\vec{\alpha}$ et $\vec{\alpha}'$ tel que :

$$\forall \vec{w} \in E, \varphi(\vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{w} = \vec{\alpha}' \cdot \vec{w}$$

alors $\forall \vec{w} \in E (\vec{\alpha} - \vec{\alpha}') \cdot \vec{w} = 0$ et donc le vecteur $(\vec{\alpha} - \vec{\alpha}')$ est orthogonal à tout vecteur de E . C'est un vecteur nul $\Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\alpha}'$

Existence :

Notons P la matrice constituée des vectrices colonnes de \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} :

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

Nous aurons $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det[P] = w_1(u_2v_3 - u_3v_2) - w_2(u_1v_3 - u_3v_1) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)$

Si l'on pose pour $\vec{\alpha}$:

$$\vec{\alpha} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3$$

Nous obtenons alors :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{w}$$

Le vecteur $\vec{\alpha}$ ainsi défini est le produit vectoriel des deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} et on note :

$$\vec{\alpha} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

Retour au produit mixte :

Nous pouvons donc aisément écrire le produit mixte de la manière suivante :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Les propriétés du déterminant et la symétrie du produit scalaire permettent d'écrire :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$$

Expression du produit vectoriel :

Le produit vectoriel $\vec{\alpha} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ peut s'écrire de diverses manières, en particulier en se servant de l'expression du déterminant précédente, on aura :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

Propriétés du produit vectoriel :

- L'application \wedge de $E \times E$ dans E est anticommutative, bilinéaire et non associative.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ colinéaires

Formule du double produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

(démonstration en TD)

2 – 4 Division vectoriel :

Soient deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} connus, existe-t-il un vecteur \vec{x} tel que :

$$\vec{v} \wedge \vec{x} = \vec{w} ?$$

Remarque :

- \vec{v} doit être non nul
- \vec{v} et \vec{w} doivent être orthogonaux

Si \vec{x} existe, alors $\vec{x} + \lambda\vec{v}$ est aussi solution.

Recherchons maintenant le vecteur \vec{x} en fonction de \vec{v} et \vec{w} .

En multipliant vectoriellement par \vec{v} , on obtient :

$$\vec{v}(\vec{v} \wedge \vec{x}) = \vec{v} \wedge \vec{w}$$

En utilisant la formule du double produit vectoriel, on aboutit à l'expression suivante :

$$(\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{x} = \vec{v} \wedge \vec{w} \Rightarrow \vec{x} = \lambda\vec{v} - \frac{1}{\vec{v}^2} \vec{v} \wedge \vec{w}$$

On peut démontrer, à ce niveau la deuxième remarque ci-dessus :

$$\vec{v} \wedge \vec{x} = \vec{v} \wedge \left(\lambda\vec{v} - \frac{1}{\vec{v}^2} \vec{v} \wedge \vec{w} \right) = \frac{-\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})}{\vec{v}^2} \text{ en développant ce double produit vectoriel, on}$$

obtient :

$$\vec{v} \wedge \vec{x} = \frac{-(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{w}}{\vec{v}^2} + \vec{w}$$

Cette solution n'est valable que si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

3 - Identité de Lagrange

Théorème :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de E .

L'identité de Lagrange est définie par la relation suivante :

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$$

Démonstration :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u}) = (\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}), \vec{u})$$

En utilisant la formule du double produit vectoriel on obtient :

$$\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{u} - (\vec{v} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

D'où : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

L'identité de Lagrange nous permet d'écrire une autre formulation du produit vectoriel :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

Démonstration :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2(\vec{u}, \vec{v})) = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 (\sin^2(\vec{u}, \vec{v}))$$

et donc :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

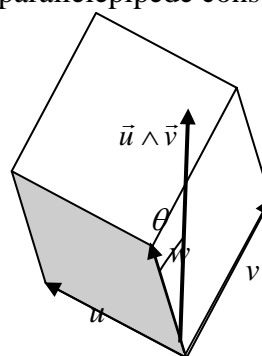
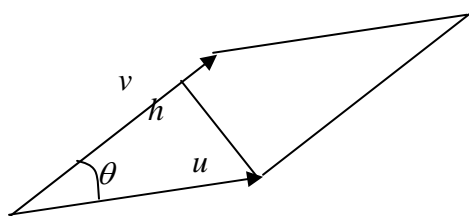
Orientation du produit vectoriel :

Considérons le plan passant par le point O et contenant les vecteurs \vec{u} et \vec{v} . Soient (\vec{e}_1, \vec{e}_2) une base de ce plan. Soit \vec{e}_3 un vecteur perpendiculaire à ce plan et tel que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ constitue une base orthonormée directe de E : on dit que le plan est orienté par \vec{e}_3 . On a alors l'expression du produit vectoriel :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{e}_3$$

4 – Applications

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur les vecteurs \vec{u}, \vec{v} .
- le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$



Aire parallélogramme :

$$\text{Aire} = \text{Base} \cdot \text{Hauteur} = \|\vec{v}\| \cdot h = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cos \theta$$

Volume parallélépipède :

$$\text{Volume} = \text{Base} * \text{Hauteur} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

CHAPITRE 2 - TORSEURS

I- Applications antisymétriques.

Soit une application de l'espace vectoriel E dans E :

$$\bar{u} (M) \rightarrow L(\bar{u} (M))$$

$$L \text{ est antisymétrique } \Leftrightarrow \forall (\bar{u}, \bar{v}) \in E \times E : \bar{u} L (\bar{v}) = -\bar{v} L (\bar{u})$$

Propriété : Toute application antisymétrique est linéaire.

$\forall \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in E$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{R}$ on a :

$$L (\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2) = \alpha_1 L (\bar{u}_1) + \alpha_2 L (\bar{u}_2).$$

Soit maintenant $[L]$ la matrice représentant l'application par rapport à la base orthonormée directe $\beta (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de E :

$$[L] = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} l_{11} &= \vec{e}_1 L (\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 L (\vec{e}_1) = -l_{11} = 0 \\ l_{ij} &= \vec{e}_i L (\vec{e}_j) = -\vec{e}_j L (\vec{e}_i) = -l_{ji} \text{ pour tout } i \neq j \end{aligned}$$

Posons arbitrairement $l_{12} = -r_3 ; l_{13} = r_2 ; l_{23} = -r_1$

$$\text{d'où } [L] = \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on remarque alors que } \forall \bar{u} \in E ;$$

$$\boxed{L (\bar{u}) = \vec{R} \wedge \bar{u}}$$

où $\vec{R} = r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3$ est appelé le vecteur caractéristique de l'application antisymétrique L .

Expression du vecteur caractéristique :

Si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont les vecteurs unitaires de la base orthonormée de l'espace vectoriel E , alors on a la relation suivante :

$$\vec{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \wedge L(\vec{e}_i)$$

Démonstration : En utilisant la relation du double produit vectoriel ;

$$\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \wedge L(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \wedge (\vec{R} \wedge \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i) \cdot \vec{R} - (\vec{e}_i \cdot \vec{R}) \cdot \vec{e}_i = 2\vec{R}$$

Champ antisymétrique :

Le champ $\alpha : Q \rightarrow \vec{\alpha}(Q)$ est antisymétrique, s'il existe une application antisymétrique L , telle que :

$$\forall M \text{ et } P \in \mathcal{E} : \vec{\alpha}(M) = \vec{\alpha}(P) + L(\overrightarrow{PM})$$

$$\text{Soit } \forall M, P \in \mathcal{E} : \vec{\alpha}(M) = \vec{\alpha}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{MP}$$

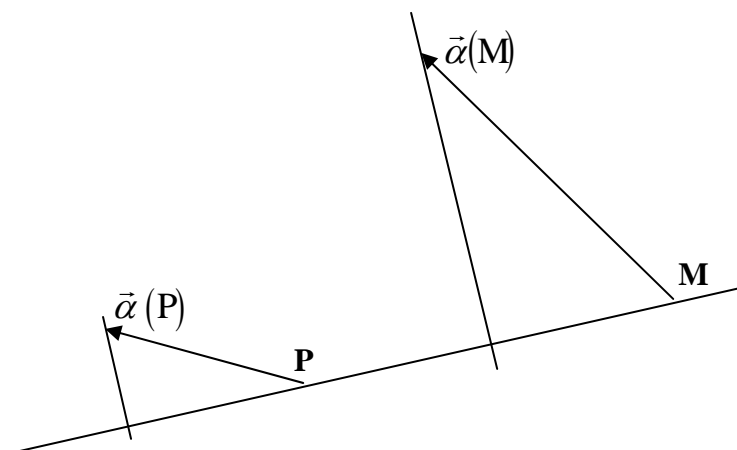
Propriété : Multiplions scalairement par \overrightarrow{MP} :

$$\vec{\alpha}(M) \cdot \overrightarrow{MP} = \vec{\alpha}(P) \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP} \cdot (\vec{R} \wedge \overrightarrow{MP})$$

$$\text{or } \overrightarrow{MP} \cdot (\vec{R} \wedge \overrightarrow{MP}) = 0 \Rightarrow \vec{\alpha}(M) \cdot \overrightarrow{MP} = \vec{\alpha}(P) \cdot \overrightarrow{MP}$$

Le vecteur $\vec{\alpha}(M)$ a la même projection que $\vec{\alpha}(P)$ sur la direction \overrightarrow{PM} .

Un champ antisymétrique est équijectif.



Démontrons la réciproque

$$\vec{\alpha}(M) \cdot \overline{MP} = \vec{\alpha}(P) \cdot \overline{MP}$$

En insérant un point fixé O , l'expression devient :

$$\vec{\alpha}(M) \cdot (\overline{OP} - \overline{OM}) = \vec{\alpha}(P) \cdot (\overline{OP} - \overline{OM})$$

Par ailleurs nous pouvons aussi écrire :

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(M) \cdot \overline{OM} - \vec{\alpha}(M) \cdot \overline{OP} &= \vec{\alpha}(P) \cdot \overline{OM} - \vec{\alpha}(P) \cdot \overline{OP} \\ \Leftrightarrow \vec{\alpha}(O) \cdot \overline{OM} - \vec{\alpha}(M) \cdot \overline{OP} &= \vec{\alpha}(P) \cdot \overline{OM} - \vec{\alpha}(O) \cdot \overline{OP} \\ \Leftrightarrow \overline{OM} \cdot (\vec{\alpha}(O) - \vec{\alpha}(P)) &= \overline{OP} \cdot (\vec{\alpha}(M) - \vec{\alpha}(O)) \end{aligned}$$

On définit une application L telle que :

$$\begin{aligned} L(\overline{OP}) &= (\vec{\alpha}(P) - \vec{\alpha}(O)) \\ L(\overline{OM}) &= -(\vec{\alpha}(O) - \vec{\alpha}(M)) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\overline{OM} \cdot L(\overline{OP}) = -\overline{OP} \cdot L(\overline{OM})$$

L'application L est donc bien antisymétrique. De plus nous avons

$$\vec{\alpha}(P) = \vec{\alpha}(O) + L(\overline{OP})$$

$\vec{\alpha}(P)$ est donc un champ de vecteur associé à une application antisymétrique.

II - Torseurs.

1 - Définition

On appelle torseur $\{T\}$ l'ensemble d'un champ antisymétrique m et de son vecteur \vec{R} caractérisé en un point M (quelconque) par le vecteur $\vec{m}_{(M)}$ appelé moment du torseur et le vecteur \vec{R} appelé résultante du torseur.

On a donc la relation pour tout couple de point (M, P)

$$\vec{m}_{(M)} = \vec{m}_{(P)} + \overline{MP} \wedge \vec{R} \text{ appelé formule de transport.}$$

On écrit aussi : $\{T\}_M = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{m}_{(M)} \end{array} \right\}$.

2 - Invariant scalaire

Multiplions scalairement cette relation par \vec{R} .

$$\vec{m}_{(M)} \cdot \vec{R} = \vec{m}_{(P)} \cdot \vec{R} + (\overline{MP} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{R} = cste$$

or $(\overline{MP} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{R} = 0$

d'où l'invariant I :

$$I = \vec{m}_{(M)} \cdot \vec{R} = \vec{m}_{(P)} \cdot \vec{R}$$

Invariant vectoriel

On définit le vecteur $\vec{u} = \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}$; $\vec{u} \cdot \vec{m}_{(M)} = \vec{u} \cdot \vec{m}_{(P)} = cste$

L'invariant vectoriel est le vecteur $\vec{I} = I \vec{u}$. (vecteur projection de \vec{m} sur \vec{R}).

3 - Opérations sur les torseurs

• Sommes $\{L\}_M = \{L_1\}_M + \{L\}_{M_2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{m}_M = \vec{m}_{1M} + \vec{m}_{2M} \end{array} \right\}$

• Multiplications par un scalaire.

$$\{L\}_M = \alpha \{L_1\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \alpha \vec{R}_1 \\ \vec{m}_M = \alpha \vec{m}_{1M} \end{array} \right.$$

• Produit (Comoment de deux torseurs).

Soient les deux torseurs suivants:

$$\{T_1\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{m}_1(M) \end{array} \right\} \text{ et } \{T_2\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{m}_2(M) \end{array} \right\}$$

Le comoment de deux torseurs est obtenu en multipliant les éléments de réductions de deux

$$P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{m}_1(M) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{m}_2(M) \end{array} \right\}$$

torseurs de la manière suivante

$$C'est\ donc\ le\ réel\ P = \vec{R}_1 \cdot \vec{m}_{(M)} + \vec{R}_2 \cdot \vec{m}_{(M)}.$$

Il est indépendant du choix du point M. (pour le calculer il faut impérativement que les deux torseurs soient définis au même point).

Démonstration :

$$P = \vec{R}_1 \cdot \vec{m}_2(M) + \vec{R}_2 \cdot \vec{m}_1(M) = \vec{R}_1 \cdot (\vec{m}_2(Q) + \vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{QM}) + \vec{R}_2 \cdot (\vec{m}_1(Q) + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{QM}) \\ \Rightarrow P = \vec{R}_1 \cdot \vec{m}_2(Q) + \vec{R}_2 \cdot \vec{m}_1(Q)$$

Le scalaire P n'est pas affecté lorsqu'on exprime les torseurs

4 - Exemples de torseur : Torseur associé à un vecteur lié.

Soit (A, \vec{u}) un vecteur lié de E . En mécanique on rencontre beaucoup de grandeurs représentées par un vecteur défini en un point de l'espace. C'est le cas d'une force appliquée en point (exemple le poids), du champ des vitesses d'un solide ... A chaque point M faisons correspondre le vecteur $\vec{m}_{(M)} = \overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}$, moment du vecteur lié.

L'ensemble formé par le vecteur \vec{u} et le champ m forme un torseur. En effet :

$$\vec{m}_{(P)} = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{PM} \wedge \vec{u} + \vec{m}_{(M)}$$

$\vec{m}_{(P)}$ est un champ antisymétrique donc un champ de moment de torseur.

Pour que le moment soit nul en un point M, il faut et il suffit que le vecteur lié passe par M. Il faut en effet que \overrightarrow{MA} et \vec{u} soient colinéaires.

5 - Torseurs élémentaires

a) Glisseur Un torseur est un glisseur s'il existe un vecteur lié dont il soit le torseur associé.

$$\{L\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \\ \vec{m} \end{array} \right\} \text{ est un glisseur } \Leftrightarrow \text{ il existe un vecteur lié } (A, \vec{u}) \text{ tel que } \forall P, \vec{m}_P = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{u} .$$

Axe d'un glisseur non nul. Soit B point de la droite (A, \vec{u})

$$\vec{m}_{(P)} = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{PB} \wedge \vec{u} .$$

$\{L\}$ est un glisseur associé à (B, \vec{u}) ceci $\forall B \in$ la droite (A, \vec{u})

Par définition cette droite passant par A et parallèle à \vec{u} est l'axe du glisseur.

Le moment d'un glisseur est donc nul en tout point de l'axe.

Réciproquement pour qu'un torseur soit un glisseur, il faut il suffit qu'il existe un point où son moment soit nul.

Donc si un torseur de résultante \vec{R} , a un moment nul en A, alors c'est un glisseur associé au vecteur lié (A, \vec{R}) .

On peut que l'ensemble des points P tels que $\vec{m}_{(P)} = \vec{0}$ est un axe parallèle à la résultante \vec{R} :

$$\vec{m}_{(P)} = \vec{m}_{(A)} + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R} = \vec{0}, \text{ or } \vec{m}_{(A)} = \vec{0}, \text{ ce qui entraîne } \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R} = \vec{0}. \text{ Nous en concluons que } \overrightarrow{PA} // \vec{R}. \text{ L'axe ainsi défini est appelé axe du glisseur.}$$

Propriété

L'invariant scalaire d'un glisseur est nul.

$$\vec{u} \cdot \vec{m}_{(P)} = \vec{u} \cdot (\overrightarrow{PA} \wedge \vec{u}) = 0$$

b) Couples Considérons un torseur tel que son moment soit indépendant du point où on le calcule :

$$\forall M, P \text{ distincts } \vec{m}_{(P)} = \vec{m}_{(M)} + \overrightarrow{PM} \wedge \vec{R} = \vec{m}_{(M)} \Rightarrow \overrightarrow{PM} \wedge \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = \vec{0} .$$

Remarque : Un couple peut-être obtenu d'une infinité de façon en particulier par la somme de deux glisseurs de résultantes parallèles, de même module et de sens contraires.

6 - Décomposition

$$\text{Soit } \{L\}_M = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}_M \end{Bmatrix}$$

$$\{L\}_M = \begin{Bmatrix} M \\ \vec{m}_A \end{Bmatrix} + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{R} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{MA} \wedge \vec{R} \end{Bmatrix}}_{\substack{\text{glisseur} \\ \text{associé } \vec{R}}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{m}_A \end{Bmatrix}}_{\text{couple}}$$

Un torseur quelconque est donc la somme d'un glisseur associé à (A, \vec{R}) et d'un couple de moment \vec{m}_A .

7 - Axe centrale d'un torseur.

L'axe central d'un torseur est le lieu des points où le moment du torseur est colinéaire à la résultante

$$A.C = \{ P \in (\zeta) / \vec{m}_p = \lambda \vec{R} \}$$

$$\lambda = \frac{\vec{m}_p \cdot \vec{R}}{R^2} \quad \text{est le pas de l' A. C}$$

CHAPITRE 3 - CINEMATIQUE DU SOLIDE RIGIDE

I – Rappels

1 – Notions de référentiel

Lors de l'étude d'un système, la formulation mathématique de certains concepts liés à ce système nécessite que l'on procède à sa description et à son repérage tout au long de son évolution.

- Définition d'un référentiel

La notion de référentiel est liée à celle d'observateur : le référentiel en quelque sorte l'espace euclidien entraîné par l'observateur. D'où la définition mathématique :

- On suppose choisie une fois pour toute la chronologie (l'axe des temps) valable pour tous les observateurs
- On appelle alors référentiel l'ensemble des points de l'espace euclidien animés d'un mouvement de corps rigide de l'observateur. Le référentiel noté R , est dit lié à l'observateur. Pour repérer les positions des points du référentiel, on utilise un repère R lié au référentiel.

Il ne faut pas confondre référentiel et repère. Un référentiel peut être associé à plusieurs repères.

2 – Repérage d'un point dans un référentiel associé à un repère R .

Soit un point M mobile par rapport à R de base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et d'origine O . On peut écrire :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{x} + y(t)\vec{y} + z(t)\vec{z}$$

Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont continues et continument différentiables par morceaux.

La trajectoire de $M(t)$ est l'ensemble des points de l'espace occupés par M quand t varie.

3 – Vitesse d'un point dans un repère

La vitesse du point M est définie par :

$$\vec{v}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_R = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\tau) - \overrightarrow{OM}(t)}{\tau}$$

d'où $\vec{v}_{M/R} = \dot{x}(t)\vec{x} + \dot{y}(t)\vec{y} + \dot{z}(t)\vec{z}$ avec $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$

II - Définition d'un solide – Torseur cinématique

Le mouvement du solide est étudié par rapport à un repère $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

1 – Définition

Soient M et P deux points d'un solide (S), pour tout instant t on a la propriété suivante pour un solide :

$$\overline{M(t)P(t)}^2 = cste$$

Propriété : Soient 4 points A, B, C, D quatre points de (S) choisis tels que ;

si $(A, \overline{A(t_0)B(t_0)}, \overline{A(t_0)C(t_0)}, \overline{A(t_0)D(t_0)})$ est un repère orthogonal direct alors

$(A, \overline{A(t)B(t)}, \overline{A(t)C(t)}, \overline{A(t)D(t)})$ est aussi un repère orthogonal directe.

2 – Champ de vitesse des points d'un solide. Torseur cinématique

Le champ de vitesse des points d'un solide est le champ noté V_t qui à tout point P du solide associe le vecteur vitesse $\vec{V}(P, t)$ de la particule du solide dont la position à cet instant est le point P .

Soient maintenant deux points M et P du solide. Nous pouvons donc écrire que :

$\overline{M(t)P(t)}^2 = cste$ et par dérivation par rapport au temps, obtenir la propriété d'équiprojectivité du champ des vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[(\overline{MP})^2] &= 2\left[\frac{d}{dt}\overline{MP}\right] \cdot \overline{MP} = 0 \text{ d'où} \\ (\vec{V}_P - \vec{V}_M) \cdot \overline{MP} &= 0 \Leftrightarrow \vec{V}_P \cdot \overline{MP} = \vec{V}_M \cdot \overline{MP} \end{aligned}$$

D'où on peut conclure que le champ de vitesse d'un solide est un champ équiprojectif (*voir le cours sur les torseurs*). C'est donc un champ de moment d'un torseur appelé torseur cinématique. La résultante de ce torseur est notée $\vec{\Omega}(S/R, t)$. Nous allons montrer plus loin que la résultante du torseur cinématique est le vecteur rotation instantanée du solide. Elle indépendante du point où l'on définit le torseur et donc le moment.

Pour deux points M et P **d'un même solide** peut appliquer les propriétés des champs antisymétriques :

$$\vec{V}_{P/R} - \vec{V}_{M/R} = \overline{PM} \wedge \vec{\Omega}_{(S)/R}$$

Notation : Le torseur cinématique est défini en un point A par ses deux éléments de réduction et que l'on représente sous la forme suivante :

$$\{C\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_{A \in (S)/R} \end{array} \right\}$$

3 - Dérivation d'un vecteur lié au solide par rapport à un repère.

On considère le vecteur \vec{u} ayant pour extrémités deux points d'un solide (S) en mouvement dans le repère $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tels que :

$$\vec{u} = \overline{KL}$$

Dérivons le vecteur \vec{u} dans ce repère par rapport au temps :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \overline{KL} \right]_R = \vec{V}_L - \vec{V}_K = \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \overline{KL} = \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{u}$$

- **Dérivation composée**

On considère le mouvement d'un solide (S) en mouvement dans un repère mobil dans le repère $R(O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, lui-même, en mouvement par rapport à un repère $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Soit le vecteur $\overline{O_1M} = x_1 \vec{x}_1 + y_1 \vec{y}_1 + z_1 \vec{z}_1$

On dérive le vecteur \overline{OM} dans le repère R.

$$\left[\frac{d}{dt} \overline{OM} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} (\overline{OO_1} + \overline{O_1M}) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \overline{OO_1} \right]_R + \left[\frac{d}{dt} (\overline{O_1M}) \right]_R$$

$$\left[\frac{d}{dt} \overline{O_1M} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} (x_1 \vec{x}_1 + y_1 \vec{y}_1 + z_1 \vec{z}_1) \right]_R = \dot{x}_1 \vec{x}_1 + \dot{y}_1 \vec{y}_1 + \dot{z}_1 \vec{z}_1 + x_1 \frac{d}{dt} (\vec{x}_1) + y_1 \frac{d}{dt} (\vec{y}_1) + z_1 \frac{d}{dt} (\vec{z}_1)$$

$$\left[\frac{d}{dt} \overline{O_1M} \right]_R = \vec{V}_{M \in (S)/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overline{O_1M}$$

Ce qui nous donne la composition des vitesses suivantes :

$$\vec{V}_{M \in (S)/R} = \vec{V}_{M \in (S)/R_1} + [\vec{V}_{O_1 \in R_1/R} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overline{O_1M}]$$

Cette expression traduit la composition du vecteur vitesse

4 - Mouvements particuliers.

Nous allons montrer à travers quelques mouvements particuliers que la résultante du torseur cinématique est bien le vecteur de rotation instantanée du solide.

4 - 1 translation pure.

Un solide est animé d'un mouvement de translation par rapport au repère R , si à chaque instant t , tous les points du solide ont même vecteur vitesse par rapport à R :

$\forall t, \forall A$ et $B \in (S)$ ou rigidement lié à ce solide on a :

$$\vec{V}_{A/R}(t) = \vec{V}_{B/R}(t)$$

Dans cette relation les vecteurs vitesses sont déterminés au même instant. A un instant t' , les vitesses d'un même point A du solide peut être différente. dans ce cas le solide est animé d'un mouvement rectiligne. Si en plus la vitesse de ce point reste constante en module, on parle alors de mouvement de translation rectiligne uniforme.

Reprenons l'expression du champ des vitesses :

$$\vec{V}_{A/R}(t) = \vec{V}_{B/R}(t) + \overline{AB} \wedge \vec{\Omega}_{(S)/R} \Rightarrow \overline{AB} \wedge \vec{\Omega}_{(S)/R} = \vec{0}$$

les points A et B étant des points quelconques du solide, on peut écrire que

$$\vec{\Omega}_{(S)/R} = \vec{0}$$

Inversement si $\forall t, \vec{\Omega}_{(S)/R} = \vec{0}$, on a alors $\vec{V}_{A/R}(t) = \vec{V}_{B/R}(t)$.

Ceci traduit que dans le cas du mouvement de translation, le torseur des vitesses est un couple.

Pour qu'un solide soit animé d'un mouvement de translations, il faut et il suffit que les axes

d'un repère lié au solide garde des directions constantes : $(\frac{d\vec{e}_i}{dt})_R = \vec{0}$, puisque la résultante est

calculée par la formule : $\vec{\Omega}_{(S)/R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \wedge \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{0}$ (démonstration donnée ci-dessous)

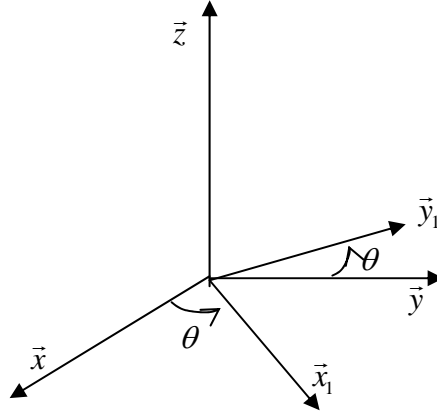
4 - 2 Rotation autour d'un axe fixe.

On dit qu'un solide (S) est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe

$(\Delta) = (O; \vec{z})$ si deux points distinct A et B ont une vitesse nulle. Il s'ensuit :

- tous les points de l'axe $(\Delta) = (O; \vec{z})$ ont une vitesse nulle,
- le torseur cinématique est un glisseur d'axe (Δ) parallèle à la résultante du torseur cinématique $\vec{\Omega}$ (voir cours sur les torseurs)
- tous les points du solide dessinent des trajectoires circulaires autour de l'axe fixe (Δ) appelé axe de rotation.

Nous définissons le repère $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au solide tel que $\vec{z}_1 = \vec{z}$ et $(\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1) = \theta$ angle mesuré autour $(O; \vec{z})$.



La variation des vecteurs du solide $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ sont déterminés par les relations établies précédemment :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_R = \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{x}_1$$

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_R = \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{y}_1$$

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{z}_1 \right]_R = \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{z}_1$$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_R + \vec{y}_1 \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_R + \vec{z}_1 \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{z}_1 \right]_R = \vec{x}_1 \wedge (\vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{x}_1) + \vec{y}_1 \wedge (\vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{y}_1) + \vec{z}_1 \wedge (\vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{z}_1)$$

D'où en utilisant la formule du double produit vectoriel, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{x}_1 \wedge (\vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{x}_1) + \vec{y}_1 \wedge (\vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{y}_1) + \vec{z}_1 \wedge (\vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{z}_1) &= (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1) \vec{\Omega}_{(S)/R} - (\vec{x}_1 \cdot \vec{\Omega}_{(S)/R}) \vec{x}_1 + \\ (\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_1) \vec{\Omega}_{(S)/R} - (\vec{y}_1 \cdot \vec{\Omega}_{(S)/R}) \vec{y}_1 + (\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_1) \vec{\Omega}_{(S)/R} - (\vec{z}_1 \cdot \vec{\Omega}_{(S)/R}) \vec{z}_1 &= \\ = 3\vec{\Omega}_{(S)/R} - \vec{\Omega}_{(S)/R} = 2\vec{\Omega}_{(S)/R} \end{aligned}$$

Dans le cas du mouvement de rotation autour d'un axe fixe nous cette relation devient :

$$\vec{x}_1 \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_R + \vec{y}_1 \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_R = 2\vec{\Omega}_{(S)/R} \text{ car } \left[\frac{d}{dt} \vec{z}_1 \right]_R = \vec{0}$$

Dans le repère $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les vecteurs de base de R_1 s'expriment en fonction de l'angle θ :

$\bar{x}_1 = \bar{x} \cos \theta + \bar{y} \sin \theta$ et $\bar{y}_1 = -\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta$ et leurs dérivées par rapport au temps sont données par :

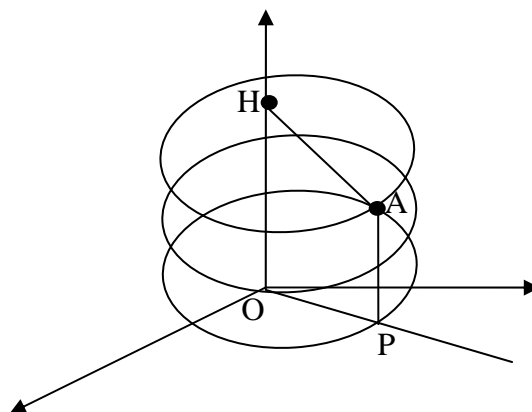
$$\left[\frac{d}{dt} \bar{x}_1 \right] = -\bar{x} \dot{\theta} \sin \theta + \bar{y} \dot{\theta} \cos \theta = \dot{\theta} \bar{y}_1 \quad \text{et} \quad \left[\frac{d}{dt} \bar{y}_1 \right] = -\bar{x} \dot{\theta} \cos \theta - \bar{y} \dot{\theta} \sin \theta = \dot{\theta} \bar{x}_1$$

d'où le résultat :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{(S)/R} = \dot{\theta} \vec{z}}$$

4 - 3 Mouvement hélicoïdal

Un solide est animé d'un mouvement hélicoïdal si une droite du solide glisse sur un axe fixe $(O; \vec{z}_0)$ et si une particule du solide non située sur cette droite a un mouvement hélicoïdal d'axe $(O; \vec{z}_0)$.



Calculons la vitesse du A, point du solide animé d'un mouvement hélicoïdal.

$$\vec{V}_{A/R} = \vec{V}_{H/R} + \overrightarrow{AH} \wedge \vec{\Omega} \quad \text{qui est la formule du champ des vitesses champ antisymétrique.}$$

Par ailleurs, on a :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OP} \Rightarrow \vec{V}_{A/R} = \vec{V}_{H/R} + \vec{V}_{P/R}$$

Le point P étant la projection du point A sur le plan $(O; \bar{x}, \bar{y})$, il décrit une trajectoire circulaire dans ce plan. De ce fait, et en vertu des expressions obtenues pour le mouvement de rotation autour d'un axe fixe on a :

$$\vec{V}_{P/R} = \dot{\theta} \vec{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{z}$$

D'où le résultat pour le vecteur vitesses du point A :

$$\vec{V}_{A/R} = \vec{V}_{H/R} + \overrightarrow{AH} \wedge \vec{\Omega} \Rightarrow \dot{\lambda} \vec{z} + \overrightarrow{AH} \wedge \dot{\theta} \vec{z}$$

4 - 4 Mouvement quelconque.

Nous analysons le mouvement quelconque d'un solide (S) par rapport à un repère donné R.

Axe instantané de rotation : Le torseur cinématique peut être décomposé en un couple et un glisseur.

Choisissons de passer par un point P dont la vitesse est parallèle au vecteur résultante $\vec{\Omega}$.

Nous avons alors la décomposition suivante :

$$\{C\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_{A \in (S)/R} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}_{P \in (S)/R} = \lambda \vec{\Omega} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Omega} \end{array} \right\}$$

Ce mouvement quelconque se décompose donc un mouvement de translation parallèle à un axe (Δ) (parallèle à la direction de la résultante $\vec{\Omega}$) plus un mouvement associé au glisseur d'axe parallèle à la résultante $\vec{\Omega}$.

Nous avons donc un mouvement qui s'apparente à un mouvement hélicoïdal d'axe parallèle à la résultante $\vec{\Omega}$. La direction de $\vec{\Omega}$ étant variable dans le temps, on appelle cet axe l'axe instantané de rotation.

Cet axe (Δ) est un axe parallèle à $\vec{\Omega}$ et passant par un point P défini par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{\Omega^2} (\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_A). \text{ Nous avons aussi à calculer la valeur du pas } \lambda = \frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{V}_A}{\Omega^2}.$$

$$\text{Pour cela il suffit d'écrire } \vec{V}_{A \in (S)/R} \cdot \vec{\Omega} = \lambda \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\Omega^2} \vec{V}_{A \in (S)/R} \cdot \vec{\Omega}$$

5 - Composition des vitesses

Ici nous reprenons les calculs précédents pour exprimer le vecteur vitesse par rapport à un repère R_I lorsqu'on la connaît dans un repère de départ R .

Par définition, on peut écrire :

$$\vec{V}_{M/R} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} \right]_R = \left[\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}) \right]_R = \vec{V}_{O_1/R} + \vec{V}_{M/R_1} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{M/R} = \vec{V}_{M/R_1} + (\vec{V}_{O_1/R} + \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \overrightarrow{O_1M}) \text{ avec}$$

$$\vec{V}_{M \in R_1/R} = \vec{V}_{O_1/R} + \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

D'où :

$$\Rightarrow \vec{V}_{M/R} = \vec{V}_{M/R_1} + \vec{V}_{M \in R_1/R} \text{ et on peut écrire}$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

avec V_a la vitesse absolue, V_r la vitesse relative et V_e la vitesse d'entraînement.

La signification physique de cette composition des vecteurs vitesse peut être imagée par le voyageur dans le train observé par une personne sur le quai.

L'observateur mesure la vitesse du voyageur, c'est la vitesse absolue. La vitesse du voyageur par rapport au wagon du train, c'est la vitesse relative. Le wagon est donc lié au repère relatif. Enfin la vitesse du wagon par rapport à l'observateur sur le quai est la vitesse d'entraînement du voyageur. Elle s'interprète comme étant la vitesse du voyageur lié au wagon mais entraîné dans son mouvement.

6 - Composition des rotations

Nous allons montrer que la composition des vitesses de rotation instantanée se compose de la même manière que les vitesses de translation des points d'un solide.

Pour cela on considère un solide (S) en mouvement par rapport au repère $R_1(O_1; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, repère qui est lui-même en mouvement par rapport à un repère fixe $R(O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Nous considérons le mouvement de deux points M et P du solide (S) :

$$\vec{V}_{M/R} = \vec{V}_{M/R_1} + \vec{V}_{M \in R_1/R} \text{ et}$$

$$\vec{V}_{P/R} = \vec{V}_{P/R_1} + \vec{V}_{P \in R_1/R} \text{ et donc}$$

$$\vec{V}_{M/R} + \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \overrightarrow{MP} = \vec{V}_{M/R_1} + \vec{\Omega}_{(S)/R_1} \wedge \overrightarrow{MP} + \vec{V}_{M \in R_1/R} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{MP}$$

On obtient alors le résultat :

$$\vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \overrightarrow{MP} = \vec{\Omega}_{(S)/R_1} \wedge \overrightarrow{MP} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \overrightarrow{MP}$$

Le produit vectoriel étant distributif, on obtient :

$$\vec{\Omega}_{(S)/R} = \vec{\Omega}_{(S)/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R}$$

Généralisation à un n repère pour le torseur cinématique.

Pour un solide en mouvement par rapport à n repères, nous écrivons

$$\left\{ C_{(S)/R_1} \right\}_A = \left\{ C_{(S)/R_n} \right\}_A + \left\{ C_{R_n/R_{n-1}} \right\}_A + \dots + \left\{ C_{R_2/R_1} \right\}_A$$

7 – Composition des accélérations

Nous allons reprendre l'expression du vecteur vitesse obtenu par dérivation composée. Nous écrivons alors :

$$\vec{V}_{M/R} = \vec{V}_{M/R_1} + (\vec{V}_{O_1/R} + \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

Par dérivation nous avons :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} (\vec{V}_{M/R}) \right]_R &= \left[\frac{d}{dt} (\vec{V}_{M/R_1} + (\vec{V}_{O_1/R} + \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \overline{O_1M})) \right]_R \\ \Rightarrow \vec{\Gamma}_{M/R} &= \left[\frac{d}{dt} (\vec{V}_{M/R_1}) \right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{V}_{M/R_1} + \vec{\Gamma}_{O_1/R} + \left[\frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_{(S)/R}) \right]_R \wedge \overline{O_1M} + \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \left[\frac{d}{dt} (\overline{O_1M}) \right]_R \\ \vec{\Gamma}_{M/R} &= \vec{\Gamma}_{M/R_1} + \vec{\Gamma}_{O_1/R} + \left[\frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_{(S)/R}) \right]_R \wedge \overline{O_1M} + \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge (\vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \overline{O_1M}) + 2\vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{V}_{M/R_1} \end{aligned}$$

$\vec{\Gamma}_{M/R}$ représente l'accélération absolue,

$\vec{\Gamma}_{M/R_1}$ est l'accélération relative,

$\vec{\Gamma}_{O_1/R} + \left[\frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_{(S)/R}) \right]_R \wedge \overline{O_1M} + \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge (\vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \overline{O_1M})$ représente l'accélération

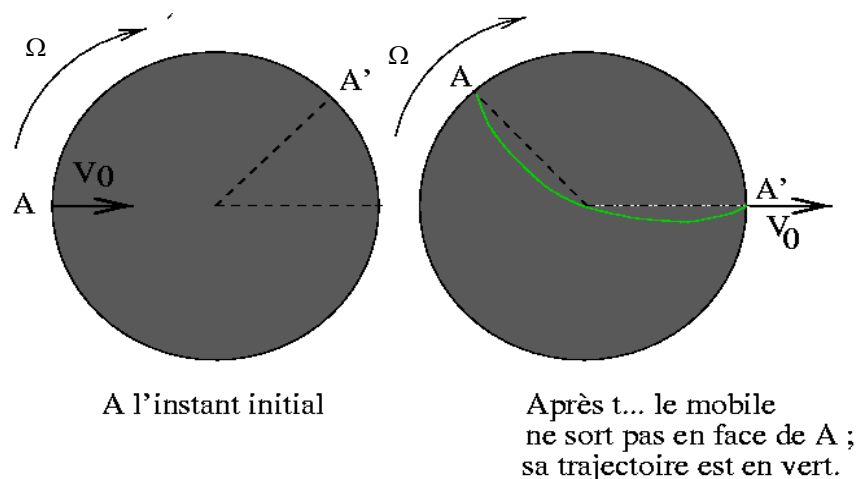
d'entraînement,

$2\vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{V}_{M/R_1}$ est l'accélération complémentaire ou de Coriolis

Exemple de l'effet de la force de Coriolis

Considérons un disque horizontal tournant à la vitesse angulaire constante Ω , et un objet (par exemple un glaçon) glissant sans frottement, lancé à l'instant du bord du disque vers son centre à une vitesse V_0 dans le référentiel du laboratoire. Nous allons observer le mouvement dans le référentiel fixe du laboratoire (galiléen), puis dans le référentiel du disque (non galiléen).

Dans le référentiel galiléen, comme il n'y a pas de frottement, le glaçon n'est soumis à aucune force, et donc sa vitesse est uniforme et le glaçon décrit une ligne droite, comme prévu par le principe d'inertie. Mais si notre mobile a laissé une trace d'eau sur le disque, celle-ci n'est clairement pas rectiligne : le point de sortie A' du glaçon n'est pas diamétralement opposé à A .



III – Angles d'Euler

1 – définition

Le mouvement quelconque d'un solide (S) dans l'espace peut toujours être considéré à chaque instant comme la somme d'un mouvement de translation pure et d'une rotation autour d'un point de l'espace. Nous allons uniquement analyser le mouvement de rotation que nous allons décomposer en 3 rotations possibles qui sont associées aux angles d'Euler.

2 - Repérage

On définit d'abord un repère R lié à (S) d'origine A particule de (S) et de base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Ce repère est construit en tenant compte des propriétés géométriques de (S).

On note R_0 défini par $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère de référence.

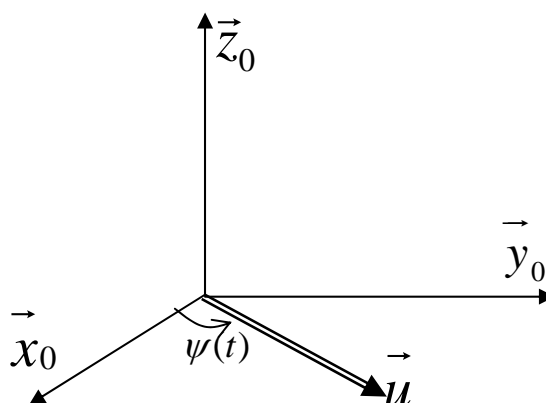
On introduit un vecteur unitaire \vec{u} tel que $\vec{u} \cdot \vec{z}_0 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{z} = 0$

On construit les repères intermédiaires R_v et R_w d'origine O, de bases orthonormées respectives :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0) \text{ et } (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$$

On introduit $\psi(t)$ pour repérer \vec{u} dans le plan $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ orienté par \vec{z}_0 :

$$\psi(t) = (\vec{x}_0, \vec{u}) = (\vec{y}_0, \vec{v}) \text{ mesuré autour de } \vec{z}_0$$



De même on introduit $\theta(t)$ pour repérer \vec{z} dans le plan $(O; \vec{v}, \vec{z}_0)$ orienté par \vec{u} .

$$\theta(t) = (\vec{z}_0, \vec{z}) = (\vec{v}, \vec{w}) \text{ mesuré autour de } \vec{u}$$

Enfin on introduit $\varphi(t)$ pour repérer \vec{x} dans le plan $(O; \vec{u}, \vec{w})$ orienté par \vec{z} .

$\varphi(t) = (\vec{u}, \vec{x}) = (\vec{w}, \vec{y})$ mesuré autour de \vec{z} .

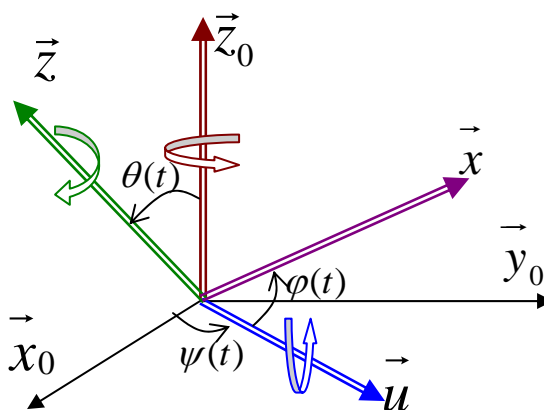
Repères obtenus :

$$R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

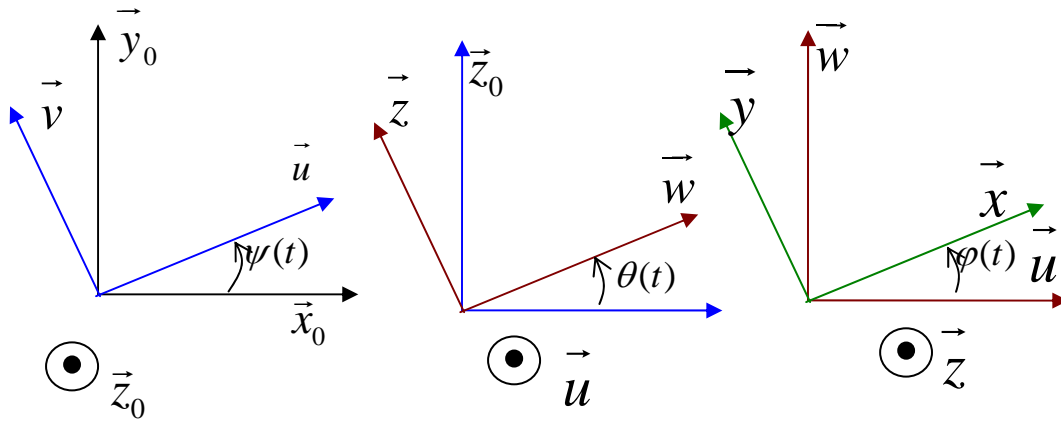
$$R_v(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$$

$$R_w(O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$$

$$R(A; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ lié à (S).}$$



Pour réaliser les projections et le calcul des rotations, il est souvent préférable de donner les figures planes de calcul qui permettent d'obtenir les angles de rotations dans différentes bases.

\vec{v}


Les angles $\psi(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ sont appelés les angles d'Euler. Ces angles définissent toutes les possibilités de rotation d'un solide dans l'espace.

III – Mouvement plan sur plan

1 Définition

Le solide (S) est animé d'un mouvement plan sur plan par rapport au repère R_0 si un plan (π) lié au solide (S) glisse sur un plan (π_0) du repère R_0 .

Exemples de tels mouvements :

- Mouvement d'une échelle en contact constant sur le sol et le mur
- Mouvement d'un fer à repasser
- Mouvement d'une table d'une machine à fraiser.

2 Propriétés

- Un point M quelconque du solide (S) a le même mouvement que sa projection m sur le plan (π).

Il suffit donc d'étudier le mouvement des points du plan (π) du repère $R(O'; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ en mouvement par rapport au repère $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Nous choisissons le plan ($O; \vec{x}_0, \vec{y}_0$) comme étant le plan (π_0). L'axe ($O; \vec{z}_0$) est donc un axe perpendiculaire au plan (π).

– Le vecteur vitesse instantané de rotation est orthogonal au plan (π) et (π_0).

En se reportant à la définition du mouvement de rotation autour d'un axe fixe, et pour un mouvement paramétré par l'angle θ , nous pouvons en déduire que la vitesse de rotation instantanée est donnée par :

$$\vec{\Omega}_{(\pi)/(\pi_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0.$$

Cette propriété peut être aussi démontrée si l'on écrit la formule de transport pour le champ de vitesse de deux points du plan (π) M et A :

$$\vec{V}_{A/\pi_0}(t) = \vec{V}_{M/\pi_0}(t) + \overline{AM} \wedge \vec{\Omega}_{(\pi)/(\pi_0)}$$

Avec $\vec{V}_{A/\pi_0}(t)$ et $\vec{V}_{M/\pi_0}(t)$ deux vecteurs appartenant au plan (π). Ce qui implique que le vecteur $\overline{AM} \wedge \vec{\Omega}_{(\pi)/(\pi_0)}$ appartient aussi au plan (π). Or quand le point M décrit le plan (π), le

vecteur $\overline{AM} \wedge \vec{\Omega}_{(\pi)/(\pi_0)}$ balaie toutes les directions du plan orthogonal à $\vec{\Omega}_{(\pi)/(\pi_0)}$. Ce plan est donc contenu dans (π) , donc égal à (π) , ce qui implique que $\vec{\Omega}_{(\pi)/(\pi_0)}$ est orthogonal à (π)

3 Centre instantané de rotation (CIR)

Le torseur cinématique du mouvement de (π) par rapport à (π_0) s'écrit alors :

$$\left\{ \mathbf{C}_{(\pi)/(\pi_0)} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{(\pi)/(\pi_0)} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ V_{M/(\pi_0)} \end{array} \right\}$$

Nous avons la propriété suivante des champs de vitesse :

$$\vec{V}_{M \in (\pi)/(\pi_0)} \cdot \vec{z}_0 = 0$$

Par ailleurs, les points I de l'axe instantané de rotation (Δ) du mouvement d'un solide (S) par rapport à un repère R_0 vérifient la propriété suivante:

$$I \in (\Delta) \Leftrightarrow \vec{V}_{I \in (S)/R_0} = \lambda \vec{\Omega}_{(S)/R_0}$$

Dans le cas du mouvement plan sur plan, si le point I appartient aussi au plan (π) , son vecteur vitesse est tel que : $\vec{V}_{I/(\pi_0)} \in (\pi)$. Le point I intersection entre l'axe instantané de rotation et les plans (π) et (π_0) a donc une vitesse nulle à chaque instant.

Ce point I est appelé Centre Instantané de Rotation (CIR) du mouvement plan sur plan.

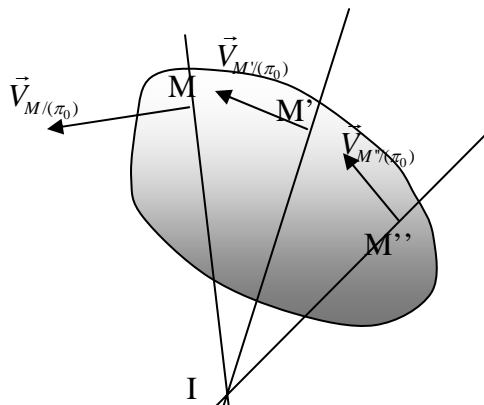
Construction du CIR.

Soient deux points M et M' de (π) . Leur vitesse peut être calculée en utilisant la vitesse du point I :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{M/(\pi_0)} &= \vec{V}_{I/(\pi_0)} + \vec{\Omega}_{(\pi)/(\pi_0)} \wedge \overline{IM} = \vec{\Omega}_{(\pi)/(\pi_0)} \wedge \overline{IM} \\ \vec{V}_{M'/(\pi_0)} &= \vec{V}_{I/(\pi_0)} + \vec{\Omega}_{(\pi)/(\pi_0)} \wedge \overline{IM}' = \vec{\Omega}_{(\pi)/(\pi_0)} \wedge \overline{IM}' \end{aligned}$$

Ce qui aboutit, par produit scalaire au résultat suivant :

$\vec{V}_{M/(\pi_0)} \cdot \overline{IM} = 0$ et $\vec{V}_{M'/(\pi_0)} \cdot \overline{IM}' = 0$. Le centre instantané de rotation est donc situé sur les droites perpendiculaires à $\vec{V}_{M/(\pi_0)}$ et $\vec{V}_{M'/(\pi_0)}$ respectivement en M et M'.



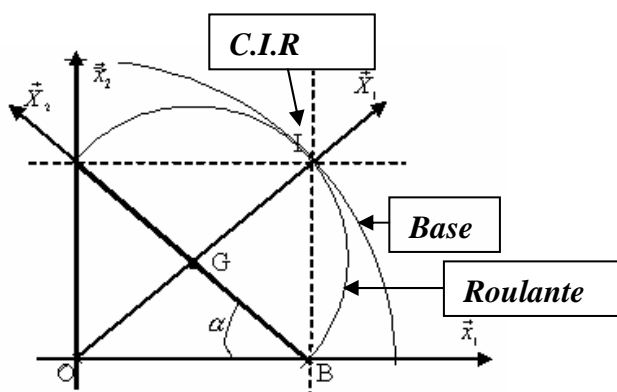
4 Base et roulante

La position du point I varie au cours du temps.

- On appelle base \mathcal{B} du mouvement du solide (π) par rapport au solide (π_0) la trajectoire du point I dans le repère R_0 lié au plan (π_0) .
- On appelle roulante, la trajectoire du point I dans le repère R lié à (π) .

Exemple de détermination de la base et de la roulante

On considère le mouvement plan d'une tige (AB) sur le plan $(O; \vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Le point A est assujéti à rester sur l'axe $(O; \vec{x}_2)$ et le point B sur l'axe $(O; \vec{x}_1)$.



On définit le repère lié au solide $(G; \vec{X}_1, \vec{X}_2)$. ; G est le centre de la tige. Le centre instantané du mouvement de la tige par rapport au plan fixe $(O; \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ est facilement identifiable : le point B a sa trajectoire portée par l'axe $(O; \vec{x}_1)$ et le point A a sa trajectoire portée par l'axe $(O; \vec{x}_2)$. Les points A, O, B, I forment un parallélogramme dont la longueur des diagonales restent

constantes pendant le mouvement. Le déplacement du point I par rapport au plan $(O; \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ a lieu donc sur un cercle de centre O et de rayon la longueur de la barre (AB), c'est la base du mouvement de la barre (AB) par rapport au plan fixe $(O; \vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

Par ailleurs La distance $\|\vec{GI}\|$ est constante et égale à la demi longueur de la barre (AB). Le déplacement du point I par rapport au plan $(G; \vec{X}_1, X_2)$ a donc lieu sur un cercle de centre G et de rayon la demi longueur de la barre (AB). C'est la roullante du mouvement plan sur plan de la barre (AB) par rapport au plan $(O; \vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

Mouvement relatif de 3 plans

L'objectif de cette partie est de montrer que le mouvement relatif de 3 plans parallèles engendre trois centres instantanés de rotation alignés.

En premier lieu si I_{jk} est le CIR du plan (π_j) par rapport au plan (π_k) alors $\vec{V}_{I_{j/k}} = \vec{0}$.

On a aussi $\vec{V}_{I_{k/j}} = \vec{0}$. On en déduit que I_{kj} est aussi le CIR de (π_k) par rapport à (π_j) .

On peut exprimer aussi cette propriété en disant que la base et la roullante sont tangentes au point $I_{jk} = I_{kj}$.

On considère les plans $(\pi_1), (\pi_2), (\pi_3)$ en mouvements relativement parallèles les uns par rapport aux autres. Soient I_{jk} ($j, k = 1, 2, 3$) les CIR des plans (π_j) et (π_k) .

Notons ω_{jk} la vitesse de rotation du plan (π_j) par rapport au plan (π_k) .

On a : $\omega_{kj} = -\omega_{jk}$ et $\omega_{jk} = \omega_{jm} + \omega_{mk}$

Théorème :

Les trois centres instantanés I_{12}, I_{23}, I_{31} sont alignés.

Considérons le CIR I_{31} point lié à (π_3) . Nous avons alors $\vec{V}_{I_{31/\pi_1}} = \vec{0}$. ceci peut être développé sous forme de composition des vitesses :

$$\vec{V}_{I_{31/\pi_1}} = \vec{V}_{I_{31/\pi_2}} + \vec{V}_{I_{31 \in \pi_2/\pi_1}} = \vec{0} \text{ où } \vec{V}_{I_{31 \in \pi_2/\pi_1}} \text{ est la vitesse d'entraînement.}$$

On a $\vec{V}_{I_{31/\pi_2}} = \omega_{32} \vec{z} \wedge \overrightarrow{I_{23}I_{31}}$ et $\vec{V}_{I_{31 \in \pi_2/\pi_1}} = \omega_{21} \vec{z} \wedge \overrightarrow{I_{12}I_{31}}$ d'où :

$$\vec{V}_{I_{31/\pi_1}} = \vec{V}_{I_{31/\pi_2}} + \vec{V}_{I_{31 \in \pi_2/\pi_1}} = \omega_{32} \vec{z} \wedge \overrightarrow{I_{23}I_{31}} + \omega_{21} \vec{z} \wedge \overrightarrow{I_{12}I_{31}} = \vec{0}$$

Les points I_{12}, I_{23}, I_{31} étant sur un plan normal à \vec{z} cette relation implique donc que

$\omega_{32} \overrightarrow{I_{23}I_{31}} + \omega_{21} \overrightarrow{I_{12}I_{31}} = \vec{0}$. Il en résulte que les points I_{12}, I_{23}, I_{31} sont alignés, et aussi que :

$$\frac{\omega_{12}}{I_{13}I_{32}} = \frac{\omega_{23}}{I_{21}I_{13}} = \frac{\omega_{31}}{I_{32}I_{21}}.$$

CINETIQUE

I – REPRESENTATION DES MASSES DANS UN SYSTEME MATERIEL, OPERATEURS D'INERTIE ;

1 – Système matériel. Notion de masse

Un système matériel est un système ne perdant pas de matière au cours du temps. Pour les besoins de la modélisation mécanique un système matériel peut être considéré comme discret (ensemble de points matériels pesant par exemple), ou continu à densité de masse (un solide par exemple).

La cinématique des solides que nous venons d'étudier ne suffit pas pour décrire le mouvement d'un système matériel dans tous ses aspects (causes et conséquences). Il faut introduire une quantité extensive (croissante quand le corps croît et inversement) caractérisant l'inertie : la masse.

A chaque matériel on associe donc un scalaire m qui est la masse. Dans un système continu on

définit une grandeur locale : la masse volumique : $\rho(M) = \frac{dm}{dv}$.

En fait un système matériel est caractérisé par 10 constantes d'inertie :

- m , la masse
- x_G, y_G, z_G les coordonnées dans un référentiel donné de G, centre d'inertie du solide
- A, B, C les moments d'inertie par rapport aux axes du repère de référence
- D, E, F les produits d'inertie par rapport aux plans du même repère.

Nous allons définir et mettre en évidence ces différents paramètres dans les paragraphes qui suivent.

2 – Centre d'inertie

2 – 1 Système de points discrets

On considère un système discret de n points M_i pesant de masse m_i . On dit que le point G est centre d'inertie de ce système s'il vérifie la relation suivante :

$$m\vec{OG} = \sum_{i=1}^n \vec{OM}_i m_i$$

avec $m = \sum m_i$

2 – 2 Système continu

Dans le cas d'un système continu, il s'agit de diviser le domaine en sous-système de masse dm autour d'un point dit courant M :

$$\vec{OG} = \iiint_{(S)} \vec{OM} dm$$

Le point G est le centre d'inertie du système continu (S) .

2 – 3 Recherche pratique

- Système continu homogène

Dans ce cas le centre d'inertie du système est le centre géométrique. Par exemple le centre d'inertie d'un cerceau, d'une sphère, d'un cube ... sont facilement déterminables puisqu'on connaît leur centre géométrique.

- Systèmes à axe de symétrie

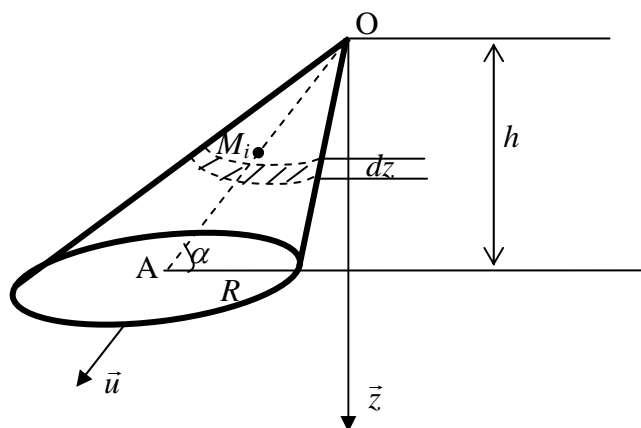
Le centre d'inertie est sur l'axe de symétrie. On choisit un repère dont un des axes est confondu avec l'axe de symétrie et l'on projette la relation précédente.

- Systèmes que l'on sait décomposer en petits éléments dont les centres d'inertie M_i partiels sont alignés.

On sait alors que G est sur la droite portant les M_i , on projette la relation sur cet axe.

On calcul donc le dm associé au M_i . On calcul $\int dm$ (même si on connaît le résultat, car c'est un bon moyen de vérifier le dm et les bornes d'intégration).

Exemple de calcul : centre d'inertie d'un cône gauche.



On choisit comme volume élémentaire un petit disque de centre M_i parallèle à la base du cône. Tous les M_i sont alignés sur la droite (OA) . On projette la relation sur l'axe portant cette droite :

$$\vec{OG} \cdot \vec{u} \iiint_{(S)} dv = \iiint_{(S)} \vec{OM}_i \cdot \vec{u} dv$$

$$dv = \pi r^2 dz, \text{ avec } r = \frac{R}{h} z \Rightarrow dv = \frac{\pi R^2}{h^2} z^2 dz$$

$$\iiint_{(S)} \overrightarrow{OM}_i \cdot \vec{u} dv = \int_0^h \frac{z}{\sin \alpha} \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4 \sin \alpha}$$

$$V = \iiint_{(S)} dv = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 dz = \frac{\pi}{3} R^2 h$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{OG} \cdot \vec{u} = \frac{3}{4 \sin \alpha} h = \frac{3}{4} \|\overrightarrow{OA}\|.$$

Donc G est situé au 3/4 de la médiane.

3 - Moments d'inertie, Produits d'inertie.

3 – 1 Définitions

On appelle moment d'inertie d'un système (S) par rapport à un axe (respectivement un plan, un point) la grandeur définie par :

$$J = \iiint_{(S)} r^2 dm$$

où r désigne la distance de l'élément de volume de masse dm à l'axe (resp. au plan, resp. au point).

Remarque :

On mettra toujours le moment d'inertie sous la forme d'un produit d'une masse par un paramètre associé à une distance élevé au carré :

$$J = md^2$$

m est la masse du système et d est le rayon de giration.

3 – 2 Expressions dans une base orthonormée.

a – Moments d'inertie

Soit $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé. On définit les moments d'inertie par les expressions données ci-dessous.

$$J / \text{axe}(O; \vec{e}_1) = \iiint_{(S)} (x_2^2 + x_3^2) dm = A$$

$$J / \text{axe}(O; \vec{e}_2) = \iiint_{(S)} (x_1^2 + x_3^2) dm = B$$

$$J / \text{axe}(O; \vec{e}_3) = \iiint_{(S)} (x_1^2 + x_2^2) dm = C$$

$$J / \text{plan}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2) = \iiint_{(S)} x_3^2 dm$$

$$J / \text{plan}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_3) = \iiint_{(S)} x_2^2 dm$$

$$J / \text{plan}(O; \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \iiint_{(S)} x_1^2 dm$$

$$J / \text{point}O = \iiint_{(S)} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dm$$

b – Produits d'inertie

Par définition les produits d'inertie sont définis par les expressions ci-dessous.

$$P / \text{plans}((O; \vec{e}_1, \vec{e}_2), (O; \vec{e}_1, \vec{e}_3)) = \iiint_{(S)} x_2 x_3 dm \text{ noté D}$$

$$P / \text{plans}((O; \vec{e}_1, \vec{e}_2), (O; \vec{e}_2, \vec{e}_3)) = \iiint_{(S)} x_1 x_3 dm \text{ noté E}$$

$$P / \text{plans}((O; \vec{e}_1, \vec{e}_3), (O; \vec{e}_2, \vec{e}_3)) = \iiint_{(S)} x_1 x_2 dm \text{ noté F}$$

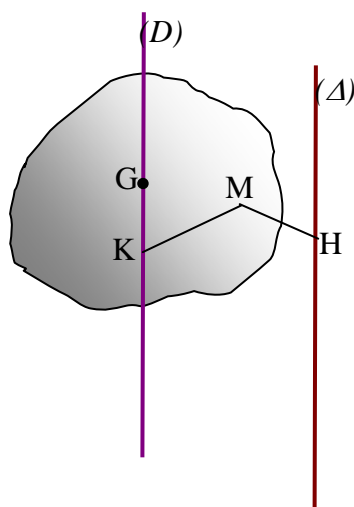
3 – 3 Théorème de Huyghens.

Le théorème de Huyghens permet de simplifier les calculs des grandeurs liées à l'inertie d'un système. Les calculs de ces grandeurs sont relativement aisées si l'origine du repère est au centre d'inertie. Pour obtenir ces grandeurs en un autre point, on dispose d'une relation donnée par le théorème de Huyghens.

Enoncé :

Le moment d'inertie du système par rapport à un axe (Δ) est égal au moment d'inertie de ce système par rapport à un axe (D) passant par le centre d'inertie G du système augmenté du moment d'inertie par rapport à (Δ) d'un point matériel de masse m (la masse total du système) situé sur (D)

Démonstration :



Soit M le point courant du système (S). Soit le plan (π) normal à (Δ) et passant par le point M.

Il coupe (Δ) et (D) respectivement en H et K.

On écrit que :

$$J /(\Delta) = \iiint_{(S)} \|\overrightarrow{HM}\|^2 dm = \iiint_{(S)} \|\overrightarrow{HK}\|^2 dm + \iiint_{(S)} \|\overrightarrow{KM}\|^2 dm + 2\overrightarrow{HK} \cdot \iiint_{(S)} \overrightarrow{KM} dm$$

$$\Leftrightarrow J /(\Delta) = \iiint_{(S)} \|\overrightarrow{HK}\|^2 dm + \iiint_{(S)} \|\overrightarrow{KM}\|^2 dm + 2\overrightarrow{HK} \cdot \underbrace{\iiint_{(S)} (\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GM}) dm}_{=0}$$

$$\Rightarrow J /(\Delta) = \|\overrightarrow{HK}\|^2 \iiint_{(S)} dm + \iiint_{(S)} \|\overrightarrow{KM}\|^2 dm = J /(\Delta) + md^2$$

4 – Opérateur d’inertie

4 – 1 Construction de l’opérateur d’inertie

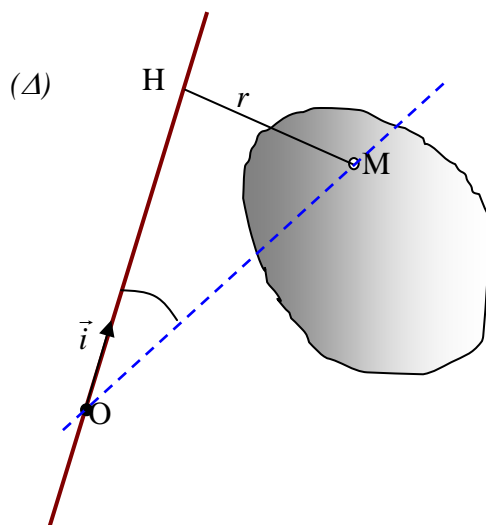
Nous allons mettre en évidence un opérateur d’inertie sous forme de matrice dont les composantes sont les moments et les produits d’inerties précédemment définis.

Nous plaçons dans un repère orthonormé ($O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$). Calculons le moment d’inertie d’un système matériel (S) par rapport à un axe (Δ) passant par O et de vecteur directeur

$\vec{i} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$ dans cette base.

Nous avons écrit que par définition le moment d’inertie par rapport à l’axe (Δ) s’écrit comme ci-dessous :

$$J /(\Delta) = \iiint_{(S)} r^2 dm$$



On remarque d'abord que :

$$\|i \wedge \overline{OM}\| = \|\overline{OM}\| \sin \theta = r$$

$$r^2 = (\vec{i} \wedge \overline{OM})^2 = \vec{i} \cdot (\overline{OM} \wedge \vec{i} \wedge \overline{OM})$$

$$\text{d'où : } \Rightarrow J /(\Delta) = \iiint_{(S)} r^2 dm = \vec{i} \cdot \iiint_{(S)} (\overline{OM} \wedge \vec{i} \wedge \overline{OM}) dm$$

Donnons les composantes des grandeurs vectorielles utilisées :

$$\overline{OM} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases}, \vec{i} \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{OM} \wedge \vec{i} \wedge \overline{OM} = \vec{U} \begin{cases} \alpha x_2^2 + \alpha x_3^2 - \beta x_1 x_2 - \gamma x_1 x_3 \\ \beta x_3^2 + \beta x_1^2 - \beta x_3 x_2 - \alpha x_1 x_2 \\ \gamma x_1^2 + \gamma x_2^2 - \alpha x_1 x_3 - \beta x_2 x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow J /(\Delta) = {}^t(\vec{i}) \begin{bmatrix} \alpha \iiint_{(S)} (x_2^2 + x_3^2) dm - \beta \iiint_{(S)} x_1 x_2 dm - \gamma \iiint_{(S)} x_1 x_3 dm \\ -\alpha \iiint_{(S)} x_1 x_2 dm + \beta \iiint_{(S)} (x_2^2 + x_3^2) dm - \gamma \iiint_{(S)} x_2 x_3 dm \\ -\alpha \iiint_{(S)} x_1 x_3 dm - \gamma \iiint_{(S)} x_2 x_3 dm + \gamma \iiint_{(S)} (x_1^2 + x_2^2) dm \end{bmatrix}$$

Cette expression peut être exprimée sous forme vectorielle :

$$J /(\Delta) = \vec{i} \cdot I_o(\vec{i})$$

I_o est une application linéaire symétrique de matrice :

$$[I_o] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

Ne pas oublier que cette matrice a été calculée dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Les composantes changent si le point O change ou si la base change.

Théorème de Huyghens pour l'opérateur I_o

Supposons que le changement de repère $(G; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tel que $\vec{OG} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$

On peut montrer que :

$$[I_o] = [I_G] + m \begin{bmatrix} a_2^2 + a_3^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 \\ -a_2a_1 & a_1^2 + a_3^2 & -a_2a_3 \\ -a_3a_1 & -a_3a_2 & a_1^2 + a_2^2 \end{bmatrix}$$

4 – 2 Valeurs principales, directions principales.

Rappels :

Nous rappelons que \vec{u} vecteur unitaire est vecteur propre de la matrice $[I_o]$ associé à la valeur propre λ si l'on peut écrire :

$$[I_o] \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}$$

Ce qui équivaut au système d'équations :

$$\begin{cases} (A - \lambda)\alpha - F\beta - E\gamma = 0 \\ -F\alpha + (B - \lambda)\beta - D\gamma = 0 \\ -E\alpha - D\beta + (C - \lambda)\gamma = 0 \end{cases}$$

On a des solutions non triviales si :

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & -F & -E \\ -F & B - \lambda & -D \\ -E & -D & C - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

C'est le polynôme caractéristique de 3^{ème} degré en λ .

A chaque valeur propre correspond un système d'équation dont les solutions

$(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ donnent les composantes d'un vecteur propre. La matrice étant symétrique, les 3 vecteurs propres unitaires sont orthogonaux. Les supports des vecteurs propres sont les axes principaux d'inertie du solide.

Dans le repère $(O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, la matrice d'inertie s'écrit :

$$[I_o] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Cas particulier d'une racine double :

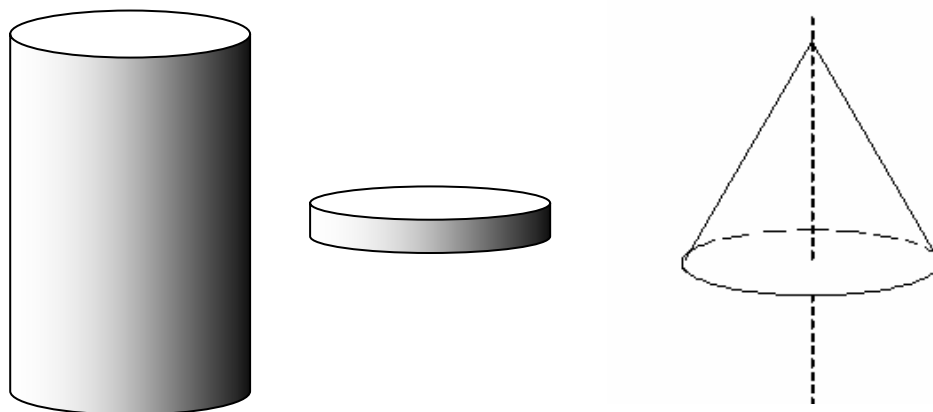
Soit $\lambda_1 = \lambda_2$. Choisissons l'axe $(O; \vec{e}_3)$ l'axe principal correspondant à la racine simple. On a

donc $[I_o] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$, soit \vec{i} un vecteur quelconque mais normal à l'axe $(O; \vec{e}_3)$. Les

coordonnées de ce vecteur sont : $\vec{i} \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{cases}$.

On remarque alors que $[I_o].\vec{i} = \lambda_1 \vec{i}$.

\vec{i} est donc vecteur propre d'inertie par rapport à l'axe $(O; \vec{e}_3)$. On en déduit que tous les axes du plan $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ passant par O sont axes principaux d'inertie. L'opérateur possède une symétrie de révolution. C'est le cas des solides cylindriques à section droite circulaire.



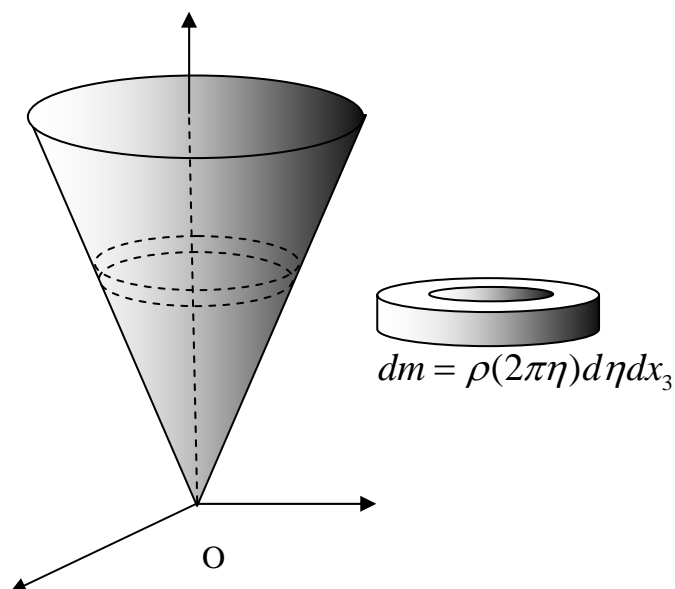
Cas particulier d'une racine triple.

Soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ la racine triple. $\Rightarrow [I_o] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Quelque soit l'axe de vecteur

unitaire \vec{i} et passant par le point O est axe principale.

Exemple de calcul d'opérateur d'inertie.

Soit le cône d'axe $(O; \vec{e}_3)$, de hauteur h , de rayon de la base R et d'angle au sommet α .



On peut aisément montrer que ce solide a une symétrie axiale. De ce fait l'opérateur est représenté par une matrice dite diagonale.

$$[I_o] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

Le calcul de la masse du cône donne : $m = \frac{\rho\pi R^3}{3 \tan \alpha}$

Les trois composantes A , B , C sont calculés à partir de leur définition :

$$A = \iiint_{(S)} (x_2^2 + x_3^2) dm$$

$$B = \iiint_{(S)} (x_1^2 + x_3^2) dm$$

$$C = \iiint_{(S)} (x_1^2 + x_2^2) dm$$

Du fait de la symétrie axiale on a $\iiint_{(S)} x_2^2 dm = \iiint_{(S)} x_1^2 dm = C/2$.

Le calcul de C doit être fait en premier afin de faciliter le calcul de A et B .

$$C = \iiint_{(S)} (x_1^2 + x_2^2) dm = \iiint_{(S)} \eta^2 dm$$

η est la distance du point courant M à l'axe $(O; \vec{e}_3)$.

Nous choisissons comme élément de volume une petite couronne de rayon moyen η et comme épaisseur dx_3 :

$$dm = \rho(2\pi\eta)d\eta dx_3$$

$$C = \int_0^R \left[\int_0^r 2\pi\eta^3 d\eta \right] \frac{dr}{\tan \alpha} = \frac{\rho\pi R^5}{10 \tan \alpha} = \frac{3}{10} mR^2$$

sachant que $dx_3 = \frac{dr}{\tan \alpha}$.

Il nous reste à calculer le terme $\iiint_{(S)} x_3^2 dm$:

$$\iiint_{(S)} x_3^2 dm = \rho \int x_3^2 \pi r^2 dx_3 = \rho \int_0^R \frac{\pi r^2}{\tan^3 \alpha} dr = \frac{\rho\pi R^5}{5 \tan^3 \alpha} = \frac{3mR^2}{5 \tan^2 \alpha}.$$

La matrice d'inertie du cône est alors donnée par :

$$[I_o] = \frac{3}{10} \begin{bmatrix} 1/2 + \frac{2}{\tan^2 \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 + \frac{2}{\tan^2 \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} mR^2$$

II –grandeurs associées aux vitesses.

1 – Torseur cinétique

1 – 1 Résultante cinétique, quantité de mouvement

Soit (S) un système matériel en mouvement dans un repère fixe $R(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On considère un élément de volume autour d'un point M courant de (S).

On définit la quantité de mouvement de (S) dans le repère fixe $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par la quantité :

$$\vec{p} = \iiint_{(S)} \vec{V}_{M/R} \rho dv$$

Nous pouvons développer cette expression en nous servant de la définition du centre d'inertie donnée précédemment :

$$\vec{p} = \iiint_{(S)} \vec{V}_{M/R} \rho dv = \iiint_{(S)} \frac{d(\overline{OM})}{dt} \rho dv = \frac{d}{dt} \iiint_{(S)} \overline{OM} \rho dv = \frac{d}{dt} (m \overline{OG}) = m \vec{V}_{G/R}$$

La résultante cinétique d'un système est égale à la quantité de mouvement d'un point matériel, portant la masse totale du système et qui serait confondu avec le centre d'inertie.

On appelle repère propre d'un système, un repère dans lequel sa quantité de mouvement est nulle à chaque instant.

Si en plus son origine est en G, il est appelé alors repère barycentrique. Si en plus les axes gardent une direction fixe, c'est alors le repère de Koenig.

1 – 2 Moment cinétique – Torseur cinétique

On définit le moment cinétique par la grandeur :

$$\vec{\sigma}_Q = \iiint_{(S)} \overline{QM} \wedge \vec{V}_{M/R} dm$$

Si le point Q est un point du système (S) alors on peut écrire :

$$\vec{V}_{M/R} = \vec{V}_{Q/R} + \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \overline{QM}$$

D'où :

$$\vec{\sigma}_Q = \iiint_{(S)} \overline{QM} \wedge \vec{V}_{M/R} dm = \iiint_{(S)} \overline{QM} \wedge \vec{\Omega} \wedge \overline{QM} dm + \iiint_{(S)} \overline{QM} \wedge \vec{V}_{Q/R} dm = I_Q(\vec{\Omega}) + m \overline{QG} \wedge \vec{V}_{Q/R}$$

L'expression se simplifie si $Q = G$ alors $\vec{\sigma}_G = I_G(\vec{\Omega})$

ou bien si $Q = O$ point fixe : $\vec{\sigma}_O = I_O(\vec{\Omega})$

Montrons que ce moment est un champ antisymétrique et donc un moment d'un torseur appelé *torseur cinétique*.

Comparons les moments cinétiques d'un même système en P et Q :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_P &= \iiint_{(S)} \overrightarrow{PM} \wedge \vec{V}_{M/R} dm = \iiint_{(S)} (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QM}) \wedge \vec{V}_{M/R} dm = \iiint_{(S)} \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{V}_{M/R} dm + \iiint_{(S)} \overrightarrow{QM} \wedge \vec{V}_{M/R} dm \\ &= \vec{\sigma}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{p}\end{aligned}$$

Nous définissons ainsi le torseur cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère (S) par ses deux éléments de réduction :

$$\left\{ \sigma_{(S)/R} \right\}_Q = \left\{ \begin{array}{l} \vec{p} = m\vec{V}_{G/R} \\ \vec{\sigma}_{Q,(S)/R} \end{array} \right\}_Q$$

Cas du centre de gravité et d'un point fixe :

Nous pouvons utiliser la propriété de la formule de transport pour le champ antisymétrique, pour l'exprimer au point G, centre d'inertie pour le solide :

$$\vec{\sigma}_Q = \vec{\sigma}_G + \overrightarrow{QG} \wedge m\vec{V}_{G/R} = I_G(\vec{\Omega}_{(S)/R} + m\overrightarrow{QG} \wedge \vec{V}_{G/R})$$

Nous pouvons voir que pour un mouvement de type translation pure ($\vec{\Omega}_{(S)/R} = \vec{0}$) alors

$$\vec{\sigma}_G = I_G(\vec{\Omega}_{(S)/R} = \vec{0}) \text{ et donc } \vec{\sigma}_Q = m\overrightarrow{QG} \wedge \vec{V}_{G/R}$$

Le torseur est un glisseur passant par G.

Dans le cas d'un mouvement de rotation à point fixe O, nous avons :

$$\vec{\sigma}_O = I_O(\vec{\Omega}_{(S)/R} = \vec{0})$$

Ce qui permet de formuler le théorème de Koenig pour le torseur cinétique :

Le moment cinétique d'un solide (S) animé d'un mouvement quelconque est égal à la somme du moment cinétique de ce solide animé d'un mouvement de translation pure de vitesse égale à la vitesse du centre d'inertie et du moment cinétique de ce solide en rotation autour de G (considéré comme fixe).

2 – Energie cinétique

2 – 1 Définition

Soit (S) un solide en mouvement par rapport au repère R et soit un point courant M.

L'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport au repère R est donnée par l'expression suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint_{(S)} \vec{V}_{M/R}^2 dm$$

Cette expression peut être expliciter en prenant un autre point Q du même solide (S).

Le champ des vitesses est donné par :

$$\vec{V}_{M/R} = \vec{V}_{Q/R} + \vec{\Omega}_{(S)/R} \wedge \vec{QM}$$

En introduisant cette expression dans celle de l'énergie cinétique, nous obtenons

$$2E_c = m\vec{V}_Q^2 + \vec{\Omega} \cdot I_Q(\vec{\Omega}) + 2m(\vec{V}_Q, \vec{\Omega}, \vec{QG})$$

Cette expression de l'énergie assez complexe peut être avantageusement simplifiée si on l'exprime en des point Q tels que :

- \vec{QG} parallèle à $\vec{\Omega}$
- $\vec{V}_{Q/R}$ parallèle à $\vec{\Omega}$
- Le point Q est en G . Le cas le plus intéressant :

$$2E_c = m\vec{V}_G^2 + \vec{\Omega} \cdot I_G(\vec{\Omega}) = \vec{V}_G \cdot \vec{p} + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_G$$

On reconnaît ici le comoment de deux torseurs : le torseur cinématique par le torseur cinétique. Or le produit de 2 torseurs est indépendant du choix du point où ils sont définis.

Donc $\forall Q, 2E_c = \vec{V}_Q \cdot \vec{p} + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_Q$

2 – 2 Théorème de Koenig

- Mouvement de translation pure de vitesse $\vec{V}_{G/R}$

$$2E_c = m\vec{V}_{G/R}^2$$

- Mouvement de rotation autour d'un point fixe O :

$$2E_c = \vec{\Omega} \cdot I_O(\vec{\Omega})$$

D'où l'énoncé du théorème de Koenig pour l'énergie cinétique :

L'énergie cinétique d'un solide (S) animé d'un mouvement quelconque est égal à la somme l'énergie cinétique de ce solide animé d'un mouvement de translation pure de vitesse égale à la vitesse du centre d'inertie et de l'énergie cinétique de ce solide en rotation autour de G (considéré comme fixe).

III – GRANDEURS ASSOCIEES AUX ACCELERATIONS

1 – Résultante dynamique- Quantité d'accélération

1 – 1 Définition

Soit le solide (S) en mouvement dans un repère R . On désigne par G son centre d'inertie, m sa masse. Soit M un point courant de (S).

On désigne par \bar{R} la résultante dynamique du solide (S). Cette résultante dynamique est aussi appelée quantité d'accélération par analogie avec la quantité de mouvement \bar{p} définie précédemment.

1 – 2 Calcul

\bar{R} est définie par l'expression suivante :

$$\bar{R} = \iiint_{(S)} \bar{\Gamma}_{M/R} dm = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{(S)} \bar{V}_{M/R} dm \right) = \left[\frac{d^2}{dt^2} (\overline{OG}) \right]_R = m \bar{\Gamma}_{G/R} = \left[\frac{d}{dt} (\bar{p}) \right]_R$$

La résultante dynamique d'un solide est donc égale à la quantité d'accélération d'un point pesant de masse m et qui serait confondu avec le centre d'inertie G . On constate aussi que c'est la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement \bar{p} .

2 – Moment dynamique – torseur dynamique

2 – 1 Définition

Le moment dynamique est défini d'une manière équivalente au moment cinétique.

Soit Q un point quelconque de l'espace, on définit le moment dynamique par l'expression suivante :

$$\bar{\delta}_Q = \iiint_{(S)} \overline{QM} \wedge \bar{\Gamma}_{M/R} dm$$

2 – 2 Relation entre moment dynamique et moment cinétique

Reprenons l'expression du moment cinétique et dérivons par rapport au temps relativement au repère de départ R .

$$\bar{\sigma}_Q = \iiint_{(S)} \overline{QM} \wedge \vec{V}_{M/R} dm = \iiint_{(S)} (\overline{OM} - \overline{OQ}) \wedge \vec{V}_{M/R} dm \text{ et la dérivée donne :}$$

$$\left[\frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_Q) \right]_R = \iiint_{(S)} (\vec{V}_{M/R} - \vec{V}_{Q/R}) \wedge \vec{V}_{M/R} dm + \iiint_{(S)} (\overline{QM}) \wedge \vec{\Gamma}_{M/R} dm$$

$$\text{soit } \vec{\delta}_Q = \iiint_{(S)} \overline{QM} \wedge \vec{\Gamma}_{M/R} dm = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_Q \right]_R + m \vec{V}_{Q/R} \wedge \vec{V}_{G/R}$$

Le second terme s'annule pour Q en G ou bien au point fixe O.

$$\text{Dans ce cas } \vec{\delta}_G = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_G \right]_R$$

3 – Torseur dynamique

Nous allons montrer que le moment dynamique a les propriétés d'un champ antisymétrique. Pour cela nous allons l'exprimer en deux points et voir si l'on obtient la fameuse relation de transport des moments de torseurs ;

Soit P et Q deux points du solide (S). Nous avons la définition de base du moment dynamique :

$$\vec{\delta}_Q = \iiint_{(S)} \overline{QM} \wedge \vec{\Gamma}_{M/R} dm = \iiint_{(S)} \overline{QP} \wedge \vec{\Gamma}_{M/R} dm + \iiint_{(S)} \overline{PM} \wedge \vec{\Gamma}_{M/R} dm = \vec{\delta}_P + \overline{QP} \wedge \vec{R}$$

Nous avons bien obtenu la propriété des champs antisymétriques, le moment dynamique est donc un moment de torseur appelé torseur dynamique défini en un point Q par ses éléments de réduction :

$$\left\{ \delta_{(S)/R} \right\}_Q = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = m \vec{\Gamma}_{G/R} \\ \vec{\delta}_Q \end{array} \right\}$$

Si le point Q est en G ou bien en point O fixe alors on peut écrire de manière global :

$$\left\{ \delta_{(S)/R} \right\}_G = \left[\frac{d}{dt} \left\{ \sigma_{(S)/R} \right\}_G \right]_R$$

Cette formulation, on le verra, est souvent utilisée dans la résolution des problèmes de dynamique.

CHAPITRE IV - STATIQUE ET REPRESENTATION DES ACTIONS MECANIQUES

I – MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES AGISSANT SUR UN SYSTEME MATERIEL

1 – Définition :

Action mécanique : toute cause qui a pour effet de maintenir au repos, de modifier l'état du repos ou de mouvement d'un système matériel ou d'une partie du système.

* *Exemple d'actions mécanique :*

- l'action de la pesanteur provoque la chute de la pomme de Newton
- le soleil dévie la trajectoire rectiligne de la terre
- l'écoulement de l'eau est arrêté par la présence de la paroi du barrage ...

2 – Classification des actions mécaniques

On classe les actions mécaniques selon leur mode d'action et leur nature. On distingue ainsi :

- les actions mécaniques qui s'exercent à distance telles l'action de la pesanteur, l'action d'un champ magnétique.
- les actions mécaniques de contact telle l'action de l'eau sur une paroi de barrage (force de pression)

Les deux types d'actions peuvent s'exercer sous forme d'action ponctuelle, c'est-à-dire en un point de l'espace. Cette hypothèse est physiquement difficile à réaliser. On modélise cependant souvent des forces s'appliquant en un point du système par un vecteur force appliquée en ce point. Ce mode d'action est alors associé à un vecteur lié et donc sa représentation peut être faite, comme nous l'avons vu dans le cours sur les torseurs, à l'aide glisseur.

L'ensemble des actions évoquées précédemment sont modélisées par des torseurs associés à des densités de force (sauf pour ce qui est de la force ponctuelle).

Nous allons successivement examiner les actions mécaniques à densité volumique de force puis surfacique ou linéique.

a – Action mécanique à densité volumique de force.

Considérons un système matériel (Σ) continu occupant un volume V de l'espace à trois dimensions. Chaque élément de volume dV autour d'un point courant M peut être sollicité par une force :

$$\overline{dF} = \vec{r}dV$$

Nous avons donc un glisseur associé au vecteur lié (M, \overline{dF}) .

On peut en déduire la densité de force volumique :

$$\vec{r} = \frac{\overline{dF}}{dV}$$

\vec{r} est donc un vecteur densité volumique de force.

En mécanique des milieux continus, on se ramène à des grandeurs locales et l'on écrit :

$$\vec{r} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\overline{dF}}{dV}$$

L'ensemble de ces forces \overline{dF} appliquées sur chaque élément de volume entourant le point courant M constitue un ensemble de glisseurs associés aux vecteurs liés (M, \overline{dF}) . L'ensemble de ces glisseurs constituent un torseur de résultante :

$$\vec{R} = \iiint_{(V)} \vec{r}(M)dV$$

et de moment en un point A quelconque ::

$$\vec{M}_A = \iiint_{(V)} \overline{AM} \wedge \vec{r}(M)dV$$

Remarque : On peut facilement vérifier que cet ensemble de vecteur est bien un torseur. Il suffit pour cela d'écrire cette formulation en passant par un point B quelconque :

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \iiint_{(V)} (\overline{AB} + \overline{BM}) \wedge \vec{r}(M)dV = \overline{AB} \wedge \iiint_{(V)} \vec{r}(M)dV + \iiint_{(V)} \overline{BM} \wedge \vec{r}(M)dV \\ &= \vec{M}_B + \overline{AB} \wedge \vec{R} \end{aligned}$$

On se retrouve bien avec la forme d'un champ antisymétrique.

Exemple particulier : Champ de pesanteur uniforme.

La pesanteur terrestre agit sur l'ensemble des milieux matériels par l'intermédiaire d'une force à distance qui agit sur l'ensemble du milieu et donc sur le volume de matière constituant le milieu en question. Nous avons donc une action à densité volumique. Chaque élément de volume est de ce fait soumis à une force de la forme :

$$\overline{dF} = \vec{r}dV = \rho \vec{g}dV$$

La densité volumique de force est donc défini par :

$$\vec{r} = \rho \vec{g}$$

Le torseur ainsi constitué pour tout le volume V a pour résultante :

$$\vec{R} = \iiint_{(V)} \rho(M) \vec{g} dV = m \vec{g}$$

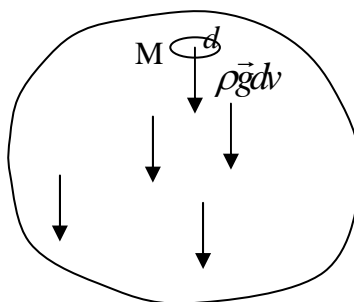
m étant la masse totale du système.

Son moment en un point A est défini de la manière suivante :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_G + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{g}$$

Cette dernière expression est justifiée si l'on remarque que $\vec{M}_G = \iiint_{(V)} \overrightarrow{GM} \wedge m \vec{g} dV = \vec{0}$ par définition du centre de masse G .

Le torseur associé aux forces réparties de pesanteur de densité $\vec{r} = \rho \vec{g}$ est donc un glisseur associé au vecteur lié $(G, m \vec{g})$.



b – Actions mécaniques à densité massique (ou linéique)

La même démarche peut-être faite lorsqu'on traite des actions mécaniques à densité surfacique (ou linéique) :

Nous reprenons pour cela le solide (Σ) de frontière (S) . Chaque élément de volume dS autour d'un point courant M de (Σ) peut être sollicité par une force :

$$\overrightarrow{dF} = \vec{r} dS$$

Nous avons donc un glisseur associé au vecteur lié (M, \overrightarrow{dF}) .

On peut en déduire la densité surfacique (ou linéique) de force:

$$\vec{r} = \frac{\overrightarrow{dF}}{dS}$$

\vec{r} est donc un vecteur densité surfacique de force.

En mécanique des milieux continus, on se ramène à des grandeurs locales et l'on écrit :

$$\vec{r} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dS}$$

L'ensemble de ces forces $d\vec{F}$ appliquées sur chaque élément de surface (ou de ligne) entourant le point courant M constitue un ensemble de glisseurs associés aux vecteurs liés $(M, d\vec{F})$. L'ensemble de ces glisseurs constituent un torseur de résultante :

$$\vec{R} = \iiint_{(S)} \vec{r}(M) dS$$

et de moment en un point A quelconque ::

$$\vec{M}_A = \iiint_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{r}(M) dS$$

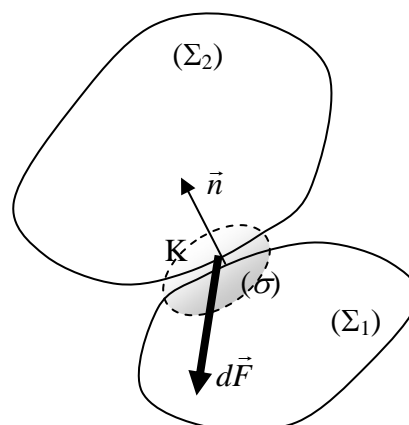
Remarque : On peut facilement vérifier que cet ensemble de vecteur est bien un torseur. Il suffit pour cela d'écrire cette formulation en passant par un point B quelconque :

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \iiint_{(S)} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \wedge \vec{r}(M) dS = \overrightarrow{AB} \wedge \iiint_{(S)} \vec{r}(M) dS + \iiint_{(S)} \overrightarrow{BM} \wedge \vec{r}(M) dS \\ &= \vec{M}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R} \end{aligned}$$

On se retrouve bien avec la forme d'un champ antisymétrique.

3 – Modélisation des actions de contact – Loi de Coulomb

Nous venons de traiter des actions mécaniques de contact. Nous allons analyser ce problème à travers le contact entre deux solides (Σ_1) et (Σ_2) . Supposons que ces deux solides soient en contact au travers d'une portion de surface (σ) . Nous considérons un point K de (σ) et la normale en K orientée de (Σ_1) vers (Σ_2)



La force élémentaire $d\vec{F}$ qui s'exerce sur une surface élémentaire ds peut être décomposée sur le plan tangent commun à (σ) de la manière suivante :

$$\overline{dF} = \vec{f}(M)dS = (-f_n\vec{n} + \vec{f}_t)dS$$

f_n est la composante normale de la densité de force élémentaire de contact en K, elle exprime la pression exercée par le solide (Σ_2) sur (Σ_1).

\vec{f}_t est la densité de force élémentaire tangentielle (dite de cisaillement) au point K.

d – Lois de Coulomb (1726,1805).

Le contact entre deux solides s'accompagne de phénomènes de frottement dans certaines conditions. Ces frottements dépendent principalement de la nature du mouvement relatif entre les deux solides en contact, de la nature des matériaux qui les constituent et aussi de l'état des surfaces en contact.

Nous allons voir que dans certaines conditions les forces mises en œuvre dans le contact peuvent s'annuler ou non.

Les lois de Coulomb donnent une relation entre les composantes des actions locales de contact.

Nous allons préciser les différentes configurations de l'action de contact et leur valeur.

- Cas du glissement non nul ($\vec{V}_{g,(S_1)/(S_2)} \neq \vec{0}$)

Dans ce cas il y a frottement de glissement et on a une propriété géométrique entre les résultantes du torseur cinématique et le torseur de l'action locale de contact.

Au point K le torseur cinématique du mouvement d u mouvement de (S_1) par rapport à (S_2) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{(S_1)/(S_2)} \\ \vec{V}_{K \in (S_1)/(S_2)} \end{array} \right\}$$

et le torseur de l'action locale en K s'exprime par :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{F} = -f_n\vec{n} + \vec{f}_t \\ \vec{M}_K = M_n\vec{n} + \vec{M}_t \end{array} \right\}$$

Nous avons alors :

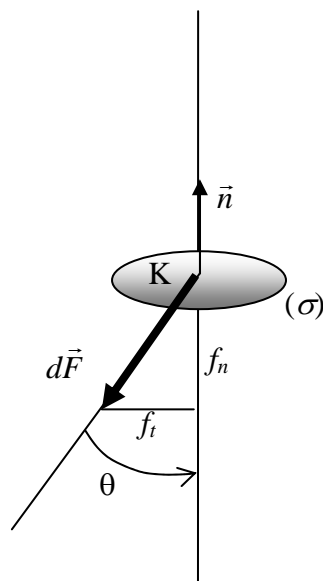
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_K \wedge \vec{f}_t = 0 \\ \vec{V}_K \cdot \vec{f}_t \leq 0 \end{array} \right.$$

Ceci traduit le fait que l'effort de frottement est colinéaire à la vitesse de glissement mais de sens opposé.

La loi de Coulomb définit un rapport entre les deux composantes de $\vec{f}(M)$:

$$f = \frac{\|\vec{f}_t\|}{f_n} = \tan \theta$$

f est le coefficient de frottement entre les deux surfaces. Ce coefficient dépend de la nature des matériaux mis en contact. On appelle θ , l'angle de frottement.



Dans le cas où le vecteur est quelconque dans le plan tangent (σ), le vecteur force de contact $\vec{f}(M)$ décrit un cône d'angle au sommet θ .

Torseur résultant de l'action de contact

Lorsque l'action de contact s'exerce sur une surface (ou un tronçon de ligne) il est possible d'exprimer le torseur résultant de l'action de contact entre deux solides. Pour cela on somme sous forme d'intégrale sur la surface (la ligne) de contact.

$$\{A_{(S1) \rightarrow (S2)}\}_K = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_P = \int_{(S)} -f_n (\vec{n} - f \vec{t}) = N\vec{n} + \vec{T} \\ \vec{M}_P = \int_{(S)} \overrightarrow{PM} \wedge -f_n (\vec{n} - f \vec{t}) = M_n \vec{n} + \vec{M}_t \end{array} \right\}$$

Loi de Coulomb pour les frottements et le roulement.

Il est possible d'énoncer des lois de Coulomb de frottement dans le cas des mouvements faisant intervenir des rotations de pivotement et de roulement.

Pour cela nous reprenons l'écriture du torseur cinématique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{(S1)/(S2)} \\ \vec{V}_{K \in (S1)/(S2)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{(S1)/(S2)} = \Omega_n \vec{n} + \vec{\Omega}_t \\ \vec{V}_{K \in (S1)/(S2)} \end{array} \right\}$$

a – cas où le $\Omega_n \neq 0$ (pivotement)

$M_n \vec{n}$ est supposé opposé à $\Omega_n \vec{n}$.

$$M_n \vec{n} \cdot \Omega_n \vec{n} < 0.$$

Nous avons alors la loi de Coulomb pour le frottement de pivotement :

$$k = \frac{|M_n|}{|N|}, k \text{ est le coefficient de frottement de pivotement.}$$

b – Cas où $\vec{\Omega}_t \neq \vec{0}$

\vec{M}_t est supposé opposé à $\vec{\Omega}_t$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_t \wedge \vec{\Omega}_t = \vec{0} \\ \vec{M}_t \cdot \vec{\Omega}_t < 0 \end{array} \right.$$

Nous avons alors la loi de Coulomb pour le frottement de roulement :

$$k' = \frac{|M_t|}{|N|}, k' \text{ est le coefficient de frottement de roulement.}$$

II – LES LIAISONS

1 – Degrés de liberté et définition d'une liaison

Un degré de liberté est un mouvement de base pour un solide en mouvement dans un référentiel. Une rotation autour d'un axe est un degré de liberté, une translation suivant une direction est aussi un degré de liberté. En somme un solide peut posséder 6 degrés de liberté au maximum. Ce sont les 3 paramètres de positions d'un point du solide et les 3 rotations possible du solide.

Une liaison est un dispositif entre deux solides permettant de limiter le nombre de degrés de liberté. Ces liaisons peuvent être associées à des mouvements de translation suivant une direction ou bien à des mouvements de rotation autour d'un point. On distingue ainsi des liaisons glissière, rotule, pivot, pivot glissant...

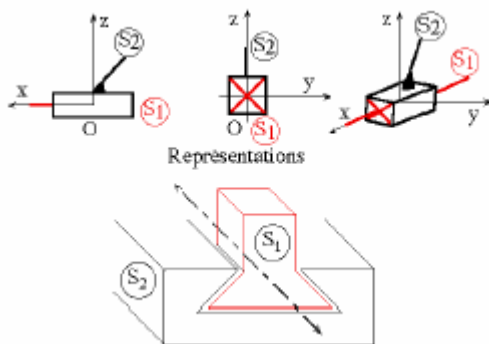
Lorsqu'une liaison est permanente on dit que la liaison est bilatérale. Dans le cas contraire la liaison est unilatérale. Une vis dans un écrou constitue une liaison bilatérale, tandis que le contact d'une bille sur un plan est une liaison unilatérale.

2 – Les différentes liaisons de base

2 -1 Liaison glissière

On dit qu'une liaison entre deux solides est une liaison glissière si le seul mouvement permis entre les deux solides est un mouvement de translation suivant une direction liée à un des deux solides.

Nous avons alors un seul degré de liberté associé au mouvement relatif des deux solides.



Représentation de la liaison glissière selon G. HENON

La caractérisation cinématique de la liaison est donnée par le torseur cinématique suivant :

$$\{C_{1/2}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{12} = \vec{0} \\ \vec{V}_A = \dot{\lambda} \vec{x} \end{array} \right\} \text{ si la direction de mobilité est suivant la direction } \vec{x}$$

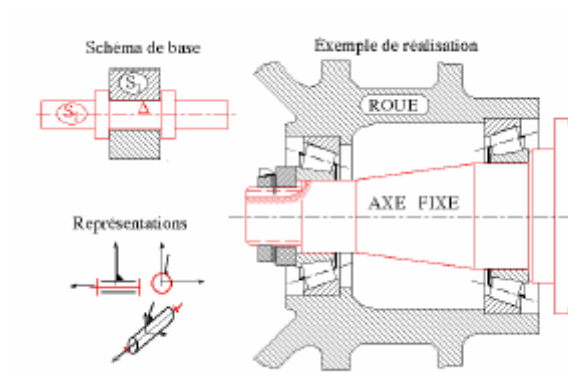
Le torseur de l'action du solide (S₁) sur le solide (S₂) est de la forme :

$$\{A_{(S1) \rightarrow (S2)}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_p = Y_{12} \vec{y} + Z_{12} \vec{z} \\ \vec{M}_{A,12} = L_{12} \vec{x} + M_{12} \vec{y} + N_{12} \vec{z} \end{array} \right\}$$

2 – 2 Liaison pivot

Deux solides sont en liaisons pivot si le seul mouvement relatif permis e est un mouvement de rotation autour d'un axe de l'un des deux solides.

Là aussi nous avons un seul degré de liberté.



Roue de véhicule

Liaison pivot selon G. HENON

Le torseur cinématique associé à cette liaison est le suivant :

$$\{C_{1/2}\}_o = \begin{cases} \vec{\Omega}_{12} = \alpha \vec{x} \\ \vec{V}_o = \vec{0} \end{cases}$$

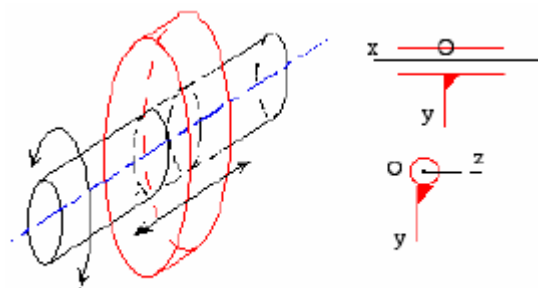
Le torseur des actions mutuelles entre les deux solides est donné par :

$$\{A_{(S1) \rightarrow (S2)}\}_A = \begin{cases} \vec{R}_{12} = X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y} + Z_{12} \vec{z} \\ \vec{M}_{A,12} = M_{12} \vec{y} + N_{12} \vec{z} \end{cases}$$

2 – 3 Liaison pivot glissant

Deux solides sont en liaisons pivot glissant si le seul mouvement relatif permis est un mouvement de rotation autour d'un axe lié à un des deux solides combiné à un mouvement de translation suivant le même axe..

Le mouvement relatif entre les deux solides est caractérisé par deux degrés de libertés.



Liaison pivot glissant selon G. HENON

Le torseur cinématique associé à cette liaison est le suivant :

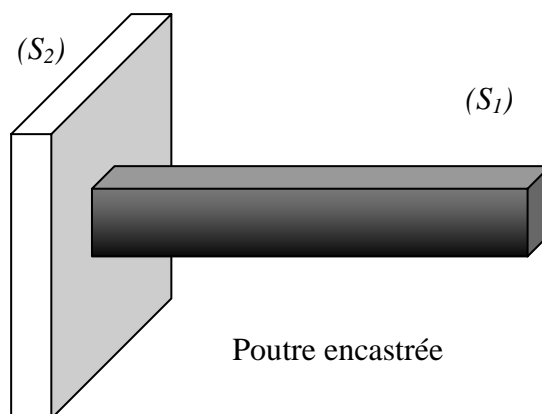
$$\{C_{1/2}\}_o = \begin{cases} \vec{\Omega}_{12} = \alpha \vec{x} \\ \vec{V}_o = \lambda \vec{x} \end{cases}$$

Le torseur des actions mutuelles entre les deux solides est donné par :

$$\{A_{(S1) \rightarrow (S2)}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{12} = Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{A,12} = M_{12}\vec{y} + N_{12}\vec{z} \end{array} \right\}$$

2 - 4 Liaison encastrement

Deux solides sont en liaisons encastrement si aucun mouvement relatif n'est permis entre les deux solides en question.



Le torseur cinématique associé à cette liaison est le suivant :

$$\{C_{1/2}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{12} = \vec{0} \\ \vec{V}_O = \vec{0} \end{array} \right\}$$

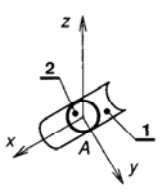
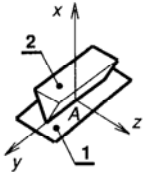
Le torseur des actions mutuelles entre les deux solides est donné par :

$$\{A_{(S1) \rightarrow (S2)}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{12} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{A,12} = L_{12}\vec{x} + M_{12}\vec{y} + N_{12}\vec{z} \end{array} \right\}$$

2 – 5 Tableau des liaisons

Torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite (Source L. Granjon))

Désignation de la liaison	Schématisme spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié
Pivot d'axe (A, \vec{X})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \vec{y}, \vec{z}) $_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$
Glissière d'axe (A, \vec{X})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} Tx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{z}) $_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$
Pivot glissant d'axe (A, \vec{X})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} Tx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \vec{y}, \vec{z}) $_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$
Appui plan de normale (A, \vec{X})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 \\ Ty \\ Tz \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & M_{12} \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{y}) $_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}$
Rotule de centre A		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ Ry \\ Rz \end{vmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{y}) $_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

Linéaire annulaire d'axe (A, \vec{X})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} Tx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ Ry \\ Rz \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à (A, \vec{X}, \vec{Z}) $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$
Linéaire rectiligne de normale (A, \vec{X}) et de contact (A, \vec{Y})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 \\ Ty \\ Tz \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ Ry \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	Symétrie par rapport à (A, \vec{X}, \vec{Z}) $\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$

III – Principe fondamental de la statique.