

RESISTANCE DES MATERIAUX II THEORIE DES POUTRES

A. ALLICHE
Maître de Conférences Paris 6

SOMMAIRE

I - STATIQUE DES MILIEUX CURVILIGNES	3
1 – INTRODUCTION	3
2 - DEFINITIONS DES POUTRES ET DES EFFORTS DE LA RDM	4
3 - EQUATIONS D'EQUILIBRE DANS LES POUTRES.	5
4 – EFFORTS INTERIEURS	7
II - CARACTERISTIQUES DES SURFACES ET DES SECTIONS DROITES DES POUTRES	14
1 - AIRES ET BARYCENTRE D'UNE SECTION DROITE	14
2 – MOMENT STATIQUE D'UNE SURFACE	15
3 – MOMENT QUADRATIQUE D'UNE SURFACE PLANE.	16
4 – MOMENT QUADRATIQUE POLAIRE	17
5 – MOMENT PRODUIT	18
III - ETAT DES CONTRAINTES DANS UNE SECTION DROITE DE POUTRE	19
1 – CAS GENERAL	19
2 – PRINCIPE DE SAINT –VENANT	19
4 – CONTRAINTES DUES A L'EFFORT TRANCHANT	22
IV - CALCUL A LA TORSION DES POUTRES DROITES PLEINES	26
1 – INTRODUCTION	26
2 – ETUDE DES DEFORMATIONS ET DES CONTRAINTES	26
3 – FONCTION DE CONTRAINTE	28
V - LOIS DE COMPORTEMENT DANS LES MILIEUX CURVILIGNES	32
1 INTRODUCTION	32
2 – LOI DE COMPORTEMENT POUR LES POUTRES DROITES.	33
3 – RECAPITULATIF	37
4 – CAS DES STRUCTURES PLANES CHARGÉES DANS LEUR PLAN	37
VI - METHODES ET THEOREMES ENERGETIQUES	41
1 – GENERALITES. NOTIONS DE SYSTEME DE FORCES GENERALISEES.	41
2 – THEOREME DE CLAPEYRON	41
3 – THEOREME DE RECIPROCITE DE MAXWELL-BETTI.	42
4 – THEOREME DE CASTIGLIANO	46

I - STATIQUE DES MILIEUX CURVILIGNES

1 – Introduction

Une poutre est engendrée par une section droite plane dont le centre appartient à une courbe (C) appelée ligne moyenne du solide. La théorie des milieux curvilignes élastiques adopte l'hypothèse selon laquelle la poutre peut-être modélisée par la courbe (C). L'ensemble des efforts appliqués sur la surface est reporté sur la ligne moyenne. Le calcul en est ainsi simplifié.

La statique des poutres permet d'accéder, moyennant quelques hypothèses, aux efforts locaux de cohésion dans le solide. Les équations de l'élasticité tridimensionnelle sont utilisées pour déterminer la distribution de ces efforts le long de la ligne moyenne précédemment définie.

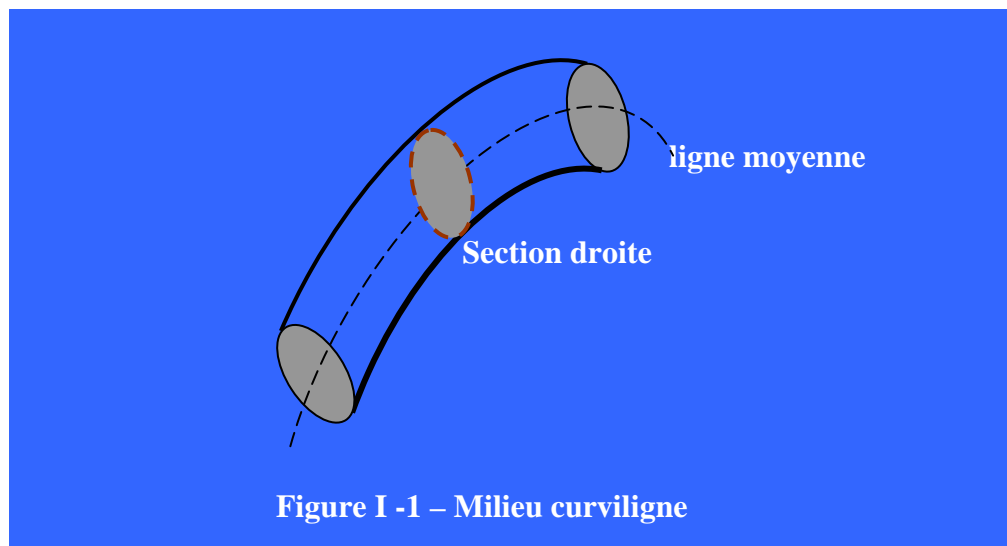
Cette analyse tient compte d'un certain nombre d'hypothèses de RDM adoptées pour les poutres :

- hypothèse des petites déformations. On suppose que les efforts sont appliqués sur la configuration déformée.
- hypothèse du comportement élastique linéaire
- principe de superposition des effets des forces. Les effets (contraintes, déformations et déplacements) en un point d'une poutre soumise à plusieurs forces extérieures sont la somme des contraintes, déformations, déplacements provoqués par ces sollicitations prises isolément.
- principe de Saint Venant : Dans une section éloignée des points d'application des forces concentrées (forces données et réactions d'appui), les contraintes et les déformations ne dépendent que de la résultante et du moment du système de forces dans cette section. Ce principe signifie que si l'on est suffisamment éloigné du point d'application des efforts, les contraintes et les déformations et déplacements ne dépendent pas de la manière dont on les applique.
- hypothèse de Navier-Bernouilli : Après déformation de la poutre, les sections droites normales à la fibre moyenne restent planes et orthogonales à la fibre moyenne déformée.

Domaine de validité des hypothèses de la RDM.

Pour que les hypothèses de la RDM puissent s'appliquer on doit vérifier certaines conditions :

- l'élanement (rapport de la longueur de la poutre sur la hauteur de la section) doit rester dans un intervalle de 5 à 40 (entre la corde et un solide tridimensionnel).
- le rayon de courbure ne doit pas être trop petit.
- Les caractéristiques des sections droites ne doivent pas varier trop rapidement le long de la section droite.



2 - Définitions des poutres et des efforts de la RDM

Convention d'orientation

Plusieurs conventions d'orientation existent pour le repérage géométrique et la définition des efforts agissant dans la poutre. Pour définir le repère local sur chaque section, on définit le point G comme étant le centre de gravité de la section droite le long de la fibre moyenne. On note s l'abscisse curviligne le long de la poutre.

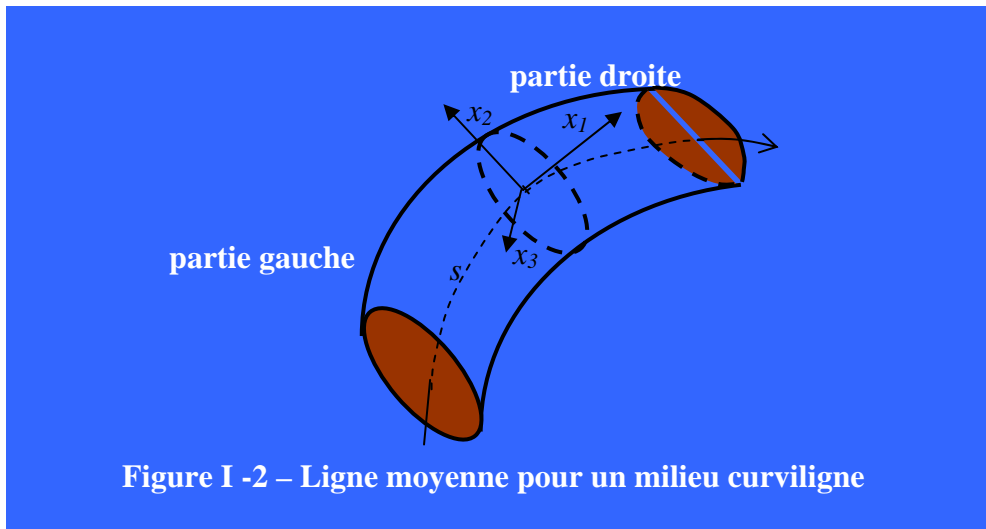
Le repère local en tout point de la fibre moyenne est défini par $(G; \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$:

- \underline{x}_1 tangent à la fibre moyenne au point G

\underline{x}_1 est défini de la manière suivante :

$$\underline{x}_1 = \frac{dOG}{ds} \quad (\text{I-1})$$

- \underline{x}_2 et \underline{x}_3 sont les axes principaux de la section droite
- on note $x_1(s), x_2(s), x_3(s)$ les coordonnées du centre de gravité G(s)



Torseur des efforts de liaison dans les poutres

On définit le torseur des efforts intérieurs pour une section (S) comme le torseur des efforts exercés par la partie droite sur la partie gauche. Ce torseur est donné par sa résultante \underline{R}_G , appliquée en G et son moment résultant \underline{M}_G défini au point G .

$$\underline{R}_G = N\underline{x}_1 + T_2\underline{x}_2 + T_3\underline{x}_3 \quad (\text{I-2})$$

N est l'effort normal à la section S , on l'appelle aussi tension.

$N > 0$ état de traction

$N < 0$ état de compression

T_2 et T_3 sont appelés efforts tranchants sur la section S .

De même pour \underline{M}_G , nous avons les définitions suivantes :

$$\underline{M}_G = M_1\underline{x}_1 + M_2\underline{x}_2 + M_3\underline{x}_3 \quad (\text{I-3})$$

M_1 est le moment de torsion

M_2 et M_3 sont les moments de flexion.

Les différentes composantes de \underline{R}_G et \underline{M}_G peuvent dépendre de l'abscisse curviligne s . Elles sont donc propres à une section droite donnée.

Dans le cas des problèmes plan, on a $T_3 = 0$, et $M_1 = M_2 = 0$.

3 - Equations d'équilibre dans les poutres.

Hypothèses sur les efforts extérieurs appliqués

Les efforts appliqués sont constants ou quasi statiques, c'est-à-dire qu'ils varient lentement dans le temps. Nous négligeons les effets dynamiques. Pendant le passage de l'état initial à l'état déformé, on considère que la poutre passe par une succession d'états d'équilibre.

Dans le cas de la statique on rappelle le principe fondamental de la statique sous forme de condition sur les efforts extérieurs :

$$\{A_{est \rightarrow (S)}\}_Q = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R} = \underline{0} \\ \underline{M}_Q = \underline{0} \end{array} \right\} \quad (I-4)$$

Remarque : Dans le cas où le torseur est exprimé en un autre point de l'espace, on peut appliquer la formule de transport. Soit P ce point, nous avons alors:

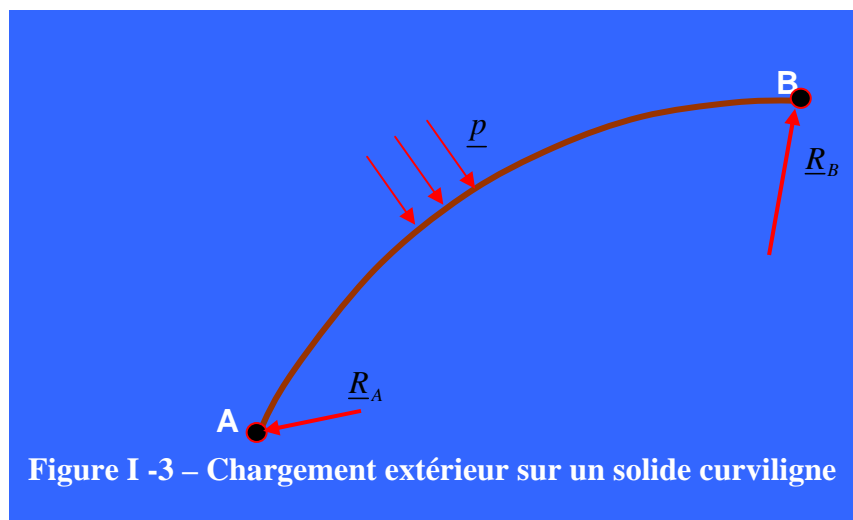
$$\{A_{est \rightarrow (S)}\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R} \\ \underline{M}_P = \underline{M}_Q + \underline{PQ} \wedge \underline{R}_G \end{array} \right\} \quad (I-5)$$

Actions mécaniques extérieures

Si on isole une poutre, on appelle action mécaniques extérieures les actions appliquées par le milieu extérieur sur la partie isolée;

On distingue deux types d'actions mécaniques extérieures :

- les charges : ce sont les efforts de service auxquels est soumise la poutre.
- les actions de liaison : ce sont les actions mécaniques exercées par les liaisons.



Les charges sont des données du problème et donc connues, les actions des liaisons sont les inconnues du problème.

Dans l'exemple précédent, \underline{R}_A et \underline{M}_A sont les inconnues du problème et \underline{p} une charge.

Les charges

On distingue :

- les charges concentrées. Le torseur des forces est appliqué en un point. Dans l'exemple 2 la charge $\underline{F} = -F \underline{x}_2$ correspond à un glisseur défini en B.
- Les charges réparties: ce sont les forces réparties à densité linéique appliquées sur la poutre ou sur un tronçon de poutre.

Les actions de liaison

La poutre est maintenue en équilibre en partie grâce aux liaisons avec le milieu extérieur. On associe à ces liaisons des torseurs d'action défini conventionnellement au point de la liaison en question. Sur le solide de la figure I - 3, le torseur de l'action de la liaison en A est défini par :

$$\{A_{liaison \rightarrow (S)}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}_A \\ \underline{M}_A = \underline{0} \end{array} \right\} \quad (\text{I-6})$$

Les torseurs des liaisons sont décrits dans le cours de RDM1.

4 – Efforts intérieurs

Relation entre torseur des charges extérieures et torseurs des efforts intérieurs

Pour accéder aux efforts de cohésion (efforts intérieurs), et dans l'objectif d'appliquer le principe fondamental de la statique, on opère une coupe dans le milieu curviligne étudié.

Le milieu curviligne est modélisé par sa ligne moyenne (C).

Considérons une poutre en équilibre sous l'action des efforts extérieurs (charges et actions de liaison). On opère une coupure au point courant G (centre de la section droite d'abscisse curviligne s). Cette coupure divise le milieu en deux parties (C⁻) et (C⁺).

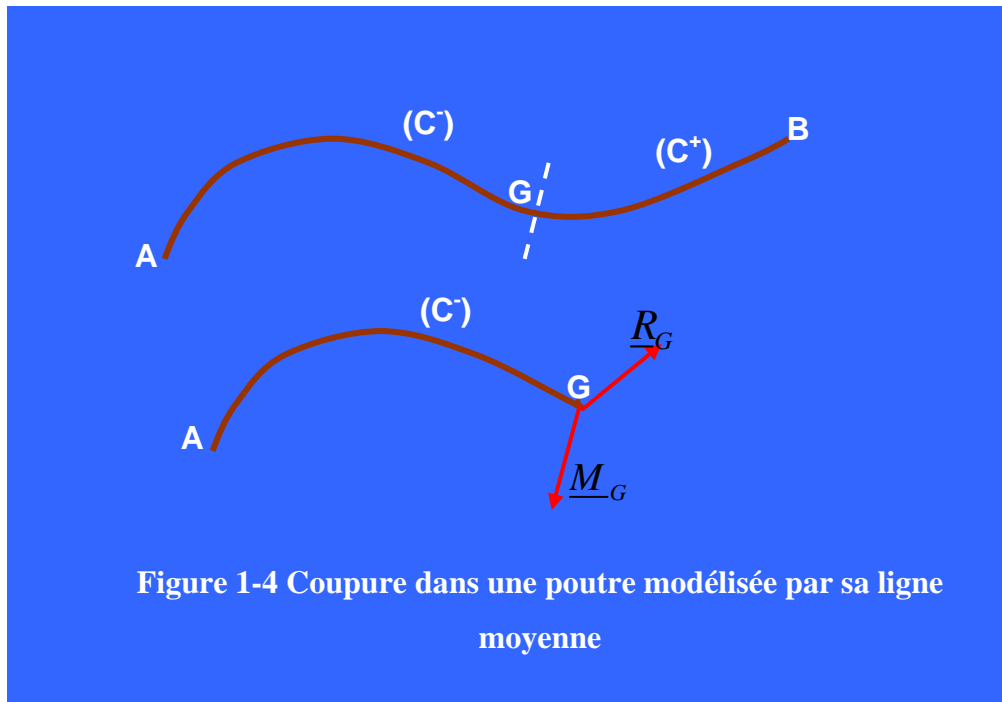


Figure 1-4 Coupure dans une poutre modélisée par sa ligne moyenne

Les efforts mis en jeu sur la poutre (AB) sont :

$\{A^-_{ext \rightarrow (S)}\}$ représentant le torseur résultant des efforts extérieurs appliqués sur la partie (C⁻)

$\{A^+_{ext \rightarrow (S)}\}$ représentant le torseur résultant des efforts extérieurs appliqués sur la partie (C⁺)

$\{A_G\}$ le torseur d'action de la partie (C⁺) sur la partie (C⁻). C'est donc le torseur des efforts intérieurs en G.

Le principe fondamental de la statique appliqué à la poutre (AB) s'écrit sous la forme suivante :

$$\{A^+_{ext \rightarrow (S)}\} + \{A^-_{ext \rightarrow (S)}\} = 0 \quad (I-7)$$

L'équilibre du tronçon (AG) s'écrit :

$$\{A_G\} + \{A^-_{ext \rightarrow (S)}\} = 0 \quad (I-8)$$

Ce qui donne la valeur du torseur des efforts intérieurs en G :

$$\{A_G\} = -\{A^-_{ext \rightarrow (S)}\} = \{A^+_{ext \rightarrow (S)}\} \quad (I-9)$$

Si l'on ramène G au point A puis au point B, on a alors :

$$\begin{aligned} \{A_G(x_1 = x_{1A})\} &= -\begin{Bmatrix} \underline{R}_A \\ \underline{M}_A \end{Bmatrix} \\ \{A_G(x_1 = x_{1B})\} &= \begin{Bmatrix} \underline{R}_B \\ \underline{M}_B \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I-10})$$

Le torseur des efforts intérieurs $\{A_G\}$ peut être explicité de la manière suivante :

$$\{A_G\} = \begin{Bmatrix} \underline{R}_G = N\underline{x}_1 + T_2\underline{x}_2 + T_3\underline{x}_3 \\ \underline{M}_G = M_1\underline{x}_1 + M_2\underline{x}_2 + M_3\underline{x}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{I-11})$$

Avec les définitions suivantes :

- N est l'effort normal. Si $N > 0$, la poutre subit un effort de traction au point G. Si $N < 0$, la poutre subit un effort de compression.
- T_2 est l'effort tranchant suivant \underline{x}_2 , T_3 est l'effort tranchant suivant \underline{x}_3 .
- $\underline{T} = T_2\underline{x}_2 + T_3\underline{x}_3$ est le vecteur effort tranchant dans le plan de la section droite.
- $M_1\underline{x}_1$ est le moment de torsion.
- $M_2\underline{x}_2$ est le moment de flexion suivant \underline{x}_2 et $M_3\underline{x}_3$ est le moment de flexion suivant \underline{x}_3 .
- $\underline{M}(s) = M_2\underline{x}_2 + M_3\underline{x}_3$ est le vecteur moment de flexion en G dans le plan de la section droite.

Calcul des efforts intérieurs.

Le tronçon de poutre (AB) précédent est considéré comme une partie d'une poutre de plus grande dimension. Les efforts extérieurs qui s'appliquent sur (AB) sont alors les suivants :

- Une densité linéique d'efforts représentée par le torseur $\begin{Bmatrix} \underline{p}(s) \\ \underline{m}(s) \end{Bmatrix}$
- L'action du reste de la poutre au point B représentée par le torseur $\begin{Bmatrix} \underline{R}_B \\ \underline{M}_B \end{Bmatrix}$
- L'action du reste de la poutre au point A représentée par le torseur $\begin{Bmatrix} -\underline{R}_A \\ -\underline{M}_A \end{Bmatrix}$

Le tronçon (AB) étant en équilibre, on peut écrire que la somme des torseurs des efforts extérieurs est nulle.

Pour la résultante :

$$-\underline{R}_A + \underline{R}_B + \int_A^B \underline{p}(s) ds = \underline{0} \quad (\text{I-12})$$

Et pour les moments au point O :

$$-\underline{M}_A - \underline{OA} \wedge \underline{R}_A + \underline{M}_B + \underline{OB} \wedge \underline{R}_B + \int_A^B \underline{m}(s) ds + \int_A^B \underline{OG} \wedge \underline{p}(s) ds = \underline{0} \quad (\text{I-13})$$

Par ailleurs le torseur T_G dépend de la variable curviligne s , on peut donc écrire les égalités suivantes :

$$\underline{R}_B - \underline{R}_A = \int_A^B \frac{d\underline{R}_G}{ds} ds \quad (\text{I-14})$$

De même :

$$\underline{M}_B - \underline{M}_A = \int_A^B \frac{d\underline{M}_G}{ds} ds \text{ et} \quad (\text{I-15})$$

$$\underline{OB} \wedge \underline{R}_B - \underline{OA} \wedge \underline{R}_A = \int_A^B \frac{d(\underline{OG} \wedge \underline{R}_G)}{ds} ds \quad (\text{I-16})$$

Ces trois équations combinées aux équations d'équilibre écrites précédemment permettent d'obtenir les équations d'équilibre local de la mécanique des milieux curvilignes :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{R}_G}{ds} + \underline{p}(s) &= \underline{0} \\ \frac{d\underline{M}_G}{ds} + \frac{d(\underline{OG} \wedge \underline{R}_G)}{ds} + \underline{m}(s) + \underline{OG} \wedge \underline{p}(s) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (\text{I-17})$$

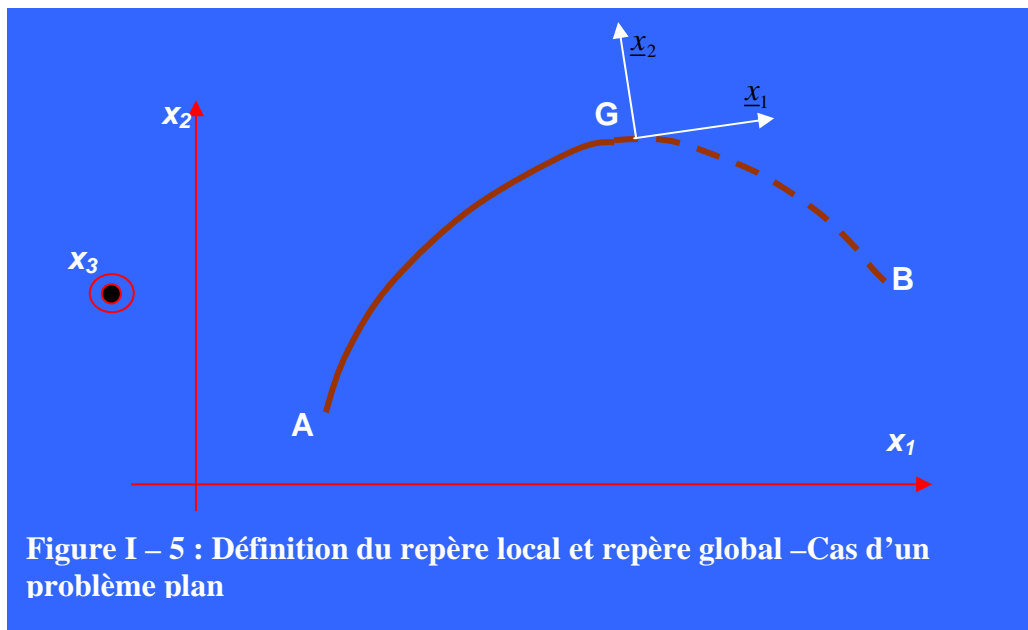
En développant la dérivée du produit vectoriel on obtient les équations :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{R}_G}{ds} + \underline{p}(s) &= \underline{0} \\ \frac{d\underline{M}_G}{ds} + \underline{x}_1 \wedge \underline{R}_G + \underline{m}(s) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (\text{I-18})$$

Cas d'un problème plan :

Les composantes du torseur des efforts de cohésion s'écrit dans le cas d'un problème plan :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}_G = N \underline{x}_1 + T \underline{x}_2 \\ \underline{M}_G = M \underline{x}_3 \end{array} \right\} \quad (\text{I-19})$$



Les expressions des équations d'équilibre local deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{ds} - \frac{T}{\rho} + p_1 &= 0 \\ \frac{dT}{ds} + \frac{N}{\rho} + p_2 &= 0 \\ \frac{dM}{ds} + T + m &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I-20})$$

s est l'abscisse curviligne, ρ est le rayon de courbure de la poutre.

Application aux cas de poutres droites et circulaires

- Poutres droites

Dans le cas de poutres droites les équations d'équilibre précédentes se simplifient. Le rayon de courbure devient infini et la variable curviligne ds est remplacée par la variable d'espace dx suivant la direction \underline{x}_1 . Nous avons alors le système d'équations suivant dans la base locale et globale qui possèdent maintenant les mêmes directions respectives :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} + p_1 &= 0 \\ \frac{dT}{dx} + p_2 &= 0 \\ \frac{dM}{dx} + T + m &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I-21})$$

- Poutre circulaire

De nombreux solides peuvent être modélisés par des structures en arc et plus généralement sous forme de cerceau chargés sur leur périphérie.

Pour ce type de solide le rayon de courbure est constant et le repère local précédemment défini peut être orienté de telle façon à parcourir la poutre dans le sens trigonométrique positif. Ce qui oblige à orienter \underline{x}_1 tangent dans la direction croissante de θ et \underline{x}_2 vers le centre de l'arc.

Exemple de calcul :

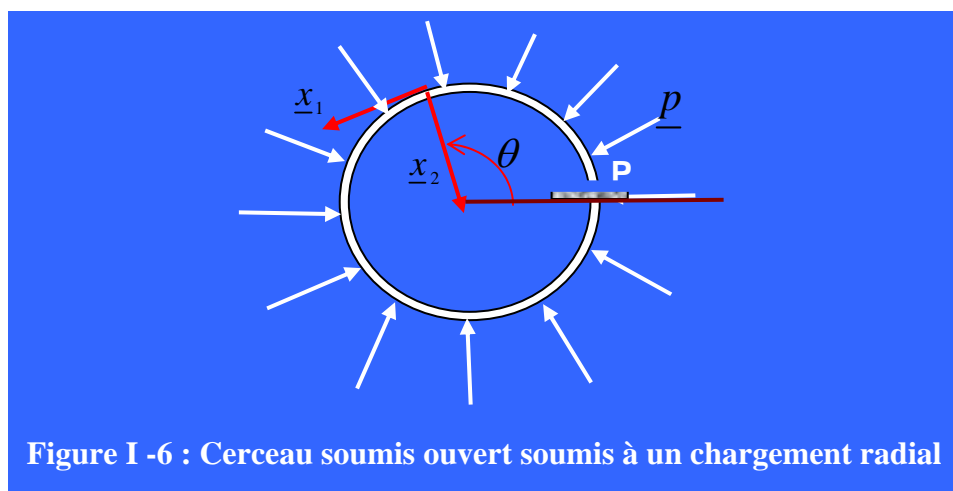


Figure I -6 : Cerceau soumis ouvert soumis à un chargement radial

Dans ce cas les équations d'équilibre portant sur les efforts intérieurs s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\theta} - T + Rp_1 &= 0 \\ \frac{dT}{d\theta} + N + Rp_2 &= 0 \\ \frac{dM}{d\theta} + RT + Rm &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I-22})$$

Dans l'exemple de la figure I - 6 :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\theta} - T &= 0 \quad (1) \\ \frac{dT}{d\theta} + N + Rp &= 0 \quad (2) \\ \frac{dM}{d\theta} + RT &= 0 \quad (3) \end{aligned} \quad (\text{I-23})$$

Attention : La composante de l'effort répartie est positive compte tenu de l'orientation de \underline{x}_2 (vers le centre du demi-cercle)

Nous obtenons une équation différentielle après avoir dérivé l'équation (1) par rapport à θ et remplacé dans (2) :

$$\frac{d^2N}{d\theta^2} + N = -Rp \quad (\text{I-24})$$

Cette équation est de type harmonique avec un second membre constant. La solution est connue sous la forme d'une combinaison linéaire de la solution générale sans second membre et de la solution particulière avec second membre :

$$N(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta - pR \quad (\text{I-25})$$

et donc puisque : $T(\theta) = \frac{dN}{d\theta}$

$$T(\theta) = -A \sin \theta + B \cos \theta$$

Et enfin le moment se calcule en intégrant l'équation (3) par rapport à θ :

$$M(\theta) = -AR \cos \theta - BR \sin \theta + K$$

Les constantes A et B et K sont identifiés par les conditions aux limites en P :

$$\begin{aligned} N(\theta = 0) &= -N_p = 0 \\ T(\theta = 0) &= -T_p = 0 \\ M(\theta = 0) &= -M_p = 0 \end{aligned} \quad (\text{I-26})$$

Nous obtenons $A = pR$, $B = 0$ et $K = AR = pR^2$

Résultats :

$$N(\theta) = -pR(1 - \cos \theta), \quad T(\theta) = -pR \sin \theta, \quad M(\theta) = pR^2(1 - \cos \theta)$$

Les équations obtenues nous permettent de calculer les torseurs des réactions à l'encastrement (point P, $\theta = \pi$) :

$$\begin{aligned} N_p &= N(\pi) = -2pR, \\ T_p &= T(\pi) = 0, \\ M_p &= M(\pi) = -2pR^2 \end{aligned}$$

II - CARACTERISTIQUES DES SURFACES ET DES SECTIONS DROITES DES POUTRES

1 - Aires et barycentre d'une section droite

Définition

Considérons une surface (S) limitée par un contour dans le plan $(O; x_1, x_2)$. On appelle aire A de la surface (S) la quantité scalaire définie par l'intégrale double :

$$A = \iint_{(S)} dS$$

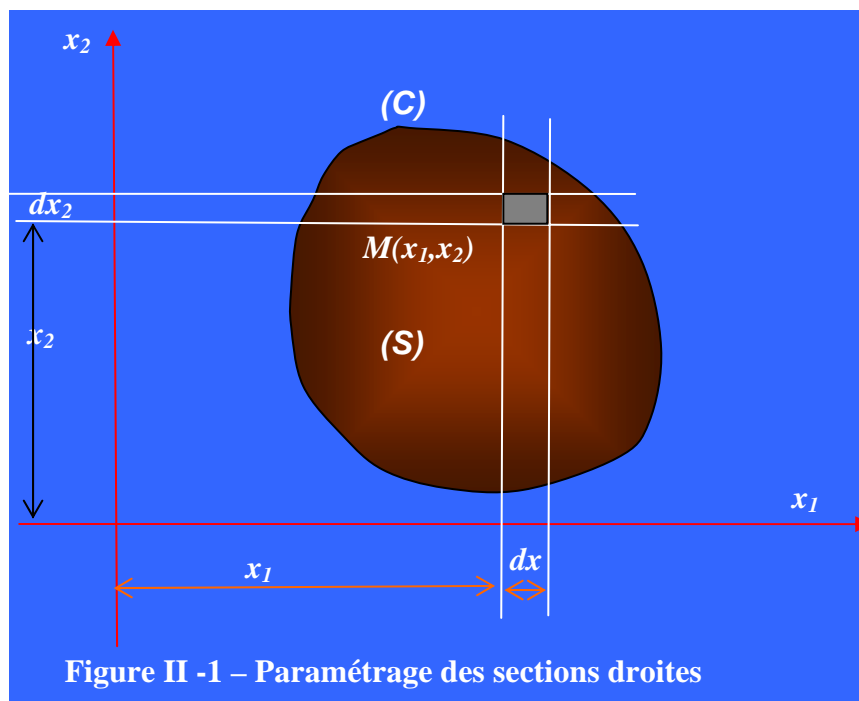


Figure II -1 – Paramétrage des sections droites

En coordonnées cartésiennes l'élément d'aire dS est définie par :

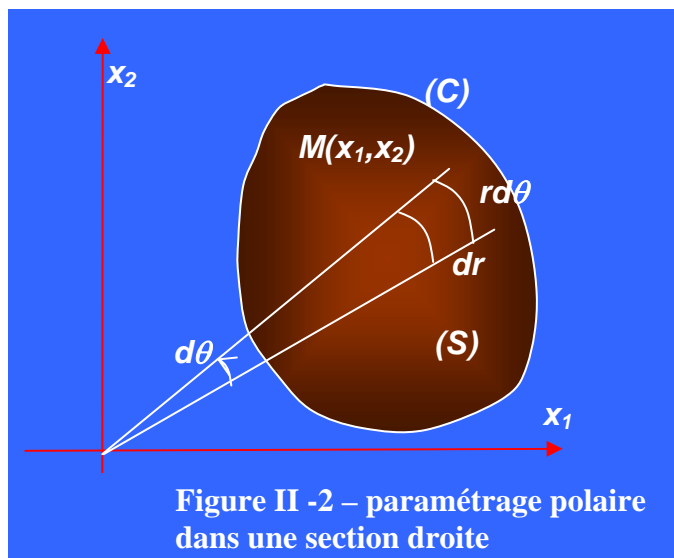
$$dS = dx dy$$

En coordonnées polaires définies par r et θ , l'élément de surface s'exprime de la manière suivante :

$$x_1 = r \cos \theta$$

$$x_2 = r \sin \theta$$

et $dS = r dr d\theta$



Centre d'une surface plane

Le centre de la surface (S) est le barycentre G de l'ensemble des points M de (S) affecté chacun d'un coefficient égal à l'aire de l'élément de surface qui lui est associé :

$$\underline{OGA} = \iint_{(S)} \underline{OM} dS \quad (\text{II-1})$$

Ce qui donne les coordonnées du point G :

$$x_{1G} = \frac{\iint_{(S)} x_1 dS}{A}$$

$$x_{2G} = \frac{\iint_{(S)} x_2 dS}{A} \quad (\text{II-2})$$

2 – Moment statique d'une surface

Définition

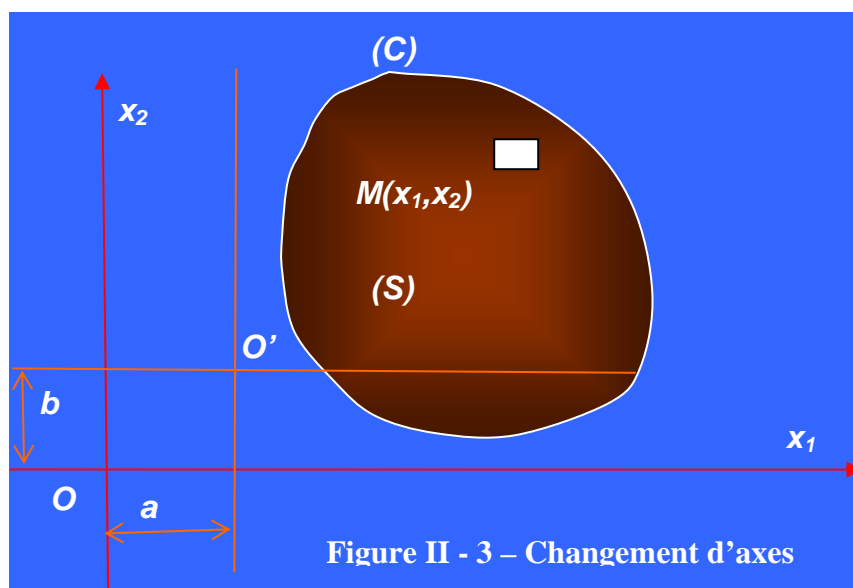
Considérons une surface (S) d'aire A limitée par la courbe (C). On appelle moment statique de (S) par rapport aux axes respectifs $(O; x_1)$, $(O; x_2)$ les quantités :

$$S_{x_1} = \int_{(S)} x_2 dS$$

$$S_{x_2} = \int_{(S)} x_1 dS \quad (\text{II-3})$$

Propriétés dans un changement d'axe

On considère maintenant un autre système d'axe $(O; x'_1, x'_2)$ qui se déduit du précédent par la translation $\underline{OO'}$.



Ce qui donne : $\underline{O'M} = \underline{OM} - \underline{OO'} = (x_1 - a)\underline{e}_1 + (x_2 - b)\underline{e}_2$.

Le calcul des moments statiques aboutit alors aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} S_{x'_1} &= \int_{(S)} x'_2 dS = \int_{(S)} (x_2 - b) dS = \int_{(S)} x_2 dS - \int_{(S)} b dS = S_{x_1} - bA \\ S_{x'_2} &= \int_{(S)} x'_1 dS = \int_{(S)} (x_1 - a) dS = \int_{(S)} x_1 dS - \int_{(S)} a dS = S_{x_2} - aA \end{aligned} \quad (\text{II-4})$$

Remarque :

Soit G le centre de la section et x_{1G} et x_{2G} les coordonnées de G dans le repère en question.

On peut aisément observer que

$$\begin{aligned} S_{x_1} &= \int_{(S)} x_2 dS = x_{2G} A \\ S_{x_2} &= \int_{(S)} x_1 dS = x_{1G} A \end{aligned} \quad (\text{II-5})$$

Si nous choisissons l'origine du repère au centre G de la section, alors $S_{x_1} = 0, S_{x_2} = 0$

3 – Moment quadratique d'une surface plane.

Moment quadratique par rapport à un axe

On considère une surface plane (S) et $R(O; \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$ un repère tel que $(O; \underline{x}_1, \underline{x}_2)$ appartienne au plan de (S) .

Si l'on désigne le point M comme point courant de (S) de coordonnées (x_1, x_2) dans ce plan, le moment quadratique par rapport à l'axe $(O; \underline{x}_1)$ est défini par :

$$I_{Ox_1} = \iint_{(S)} x_2^2 dS \quad (\text{II-6})$$

et le moment quadratique par rapport à l'axe $(O; \underline{x}_2)$ est défini par :

$$I_{Ox_2} = \iint_{(S)} x_1^2 dS. \quad (\text{II-7})$$

Théorème de Huygens

Soit un second repère $R_1(G; \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$ de même base que R mais dont l'origine est le centre de la surface (S) . Soit M de coordonnées (X_1, X_2) dans le nouveau repère.

Exprimons I_{Gx_1} :

$$I_{Gx_1} = \iint_{(S)} X_2^2 dS \quad (\text{II-8})$$

$$\text{Par ailleurs } I_{Ox_1} = \iint_{(S)} x_2^2 dS = \iint_{(S)} (X_2 + x_{2G})^2 dS = \iint_{(S)} x_{2G}^2 dS + \iint_{(S)} X_2^2 dS + 2x_{2G} \iint_{(S)} X_2 dS$$

Dans cette expression, nous avons :

$$\iint_{(S)} x_{2G}^2 dS = x_{2G}^2 A, \quad \iint_{(S)} X_2^2 dS = I_{Gx_1} \quad \text{et} \quad 2x_{2G} \iint_{(S)} X_2 dS = 0$$

propriété du centre de surface.

D'où le théorème de Huygens :

Le moment quadratique d'une surface plane (S) par rapport à un axe $(O; \underline{x}_1)$ de son plan est égal au moment quadratique de (S) par rapport à l'axe $(G; \underline{x}_1)$ passant par son centre de surface G , augmenté du produit de l'aire A par le carré de la distance des axes :

$$I_{Ox_1} = I_{Gx_1} + Ad^2 \quad (\text{II-9})$$

4 – Moment quadratique polaire

On considère une surface plane (S) et $R(O; \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$ un repère tel que $(O; \underline{x}_1, \underline{x}_2)$ appartienne au plan de (S) .

Si l'on désigne le point M comme point courant de (S) de coordonnées (x_1, x_2) dans ce plan, le moment quadratique polaire par rapport au point O est défini par :

$$I_0 = \iint_S r^2 dS \quad (\text{II-10})$$

Remarque :

$$I_0 = \iint_S r^2 dS = \iint_S (x_1^2 + x_2^2) dS = I_{0x_1} + I_{0x_2} \quad (\text{II-10})$$

5 – Moment produit

On considère une surface plane (S) et $R(O; \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$ un repère tel que $(O; \underline{x}_1, \underline{x}_2)$ appartienne au plan de (S .)

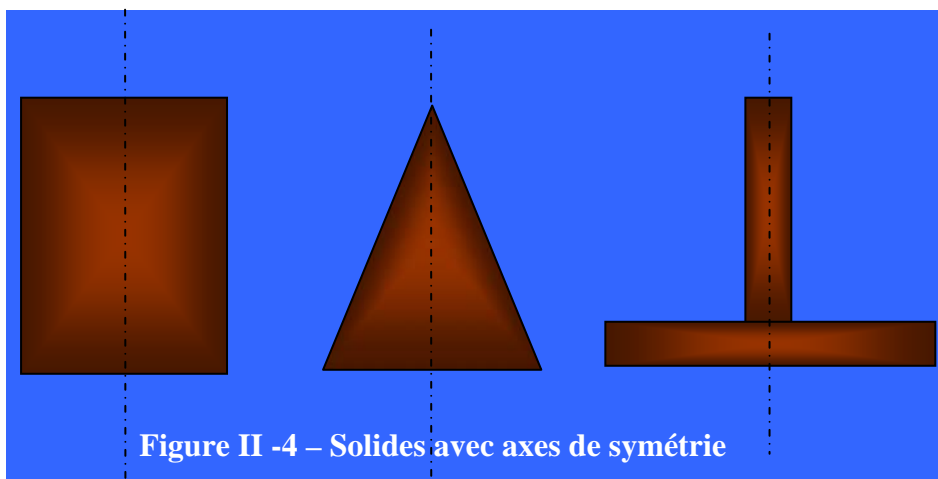
Si l'on désigne le point M comme point courant de (S) de coordonnées (x_1, x_2) dans ce plan, le moment produit $I_{Ox_1x_2}$ par rapport aux axes $(O; \underline{x}_1)$ et $(O; \underline{x}_2)$ de son plan est donné par :

$$I_{Ox_1x_2} = \iint_{(S)} x_1 x_2 dS \quad (\text{II-11})$$

Remarque :

On peut vérifier aisément que si le solide possède un axe de symétrie alors le moment produit associé aux deux axes est nul.

Exemple :



III - ETAT DES CONTRAINTES DANS UNE SECTION DROITE DE POUTRE

1 – Cas général

En tout point $M(x_1, x_2, x_3)$ d'une section droite de poutre, le tenseur des contraintes peut avoir la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \underline{x}_i \otimes \underline{x}_j \quad (\text{III-1})$$

Nous avons alors les relations vectorielles suivantes :

Résultante des efforts intérieurs sur la section droite :

$$\underline{R}_G = \iint_{(S)} \underline{T}(M, \underline{x}_1) dS \quad (\text{III-2})$$

et moment sur la même section droite :

$$\underline{M}_G = \iint_{(S)} \underline{GM} \wedge \underline{T}(M, \underline{x}_1) dS. (\text{III-3})$$

Ce qui donne :

$$N = \iint_{(S)} \sigma_{11} dS, \quad T_2 = \iint_{(S)} \sigma_{12} dS, \quad T_3 = \iint_{(S)} \sigma_{13} dS \quad (\text{III-4})$$

Les composantes de la résultante \underline{R}_G ; et :

$$M_1 = \iint_{(S)} (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) dS, \quad M_2 = \iint_{(S)} x_3 \sigma_{11} dS, \quad M_3 = \iint_{(S)} -x_2 \sigma_{11} dS \quad (\text{III-5})$$

Les composantes du moment résultant sur la même section droite.

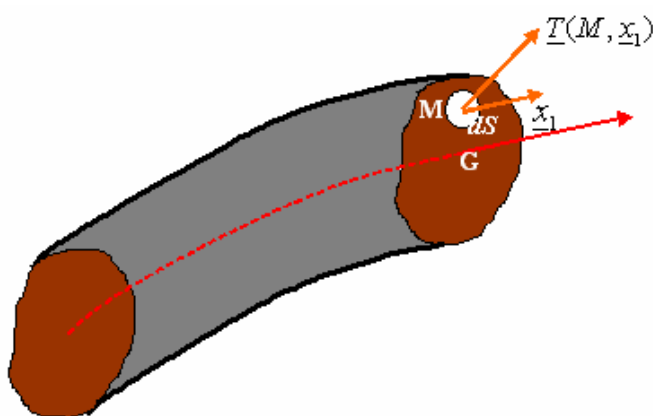


Figure III -1 – Définition des efforts intérieurs locaux pour un solide curviligne

2 – Principe de Saint –Venant

Il est remarquable de constater qu'il suffit de connaître les champs $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ dans la section droite (de normale \underline{x}_1) pour déterminer complètement le torseur intérieur. Les termes $\sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ n'interviennent pas.

Pour une poutre, la normale extérieure au contour de la section droite s'exprime par $\underline{n} = \alpha_2 \underline{x}_2 + \alpha_3 \underline{x}_3$. La condition de non chargement du contour s'écrit :

$$\begin{aligned} \alpha_2 \sigma_{12} + \alpha_3 \sigma_{13} &= 0 \\ \alpha_2 \sigma_{22} + \alpha_3 \sigma_{23} &= 0 \\ \alpha_2 \sigma_{23} + \alpha_3 \sigma_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III-6})$$

Les 2 dernières conditions sont les seules relatives aux champs $\sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$. Le principe de Saint-Venant consiste à poser l'hypothèse que loin des points d'applications des forces extérieures, le tenseur des contraintes agissant dans la poutre est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III-7})$$

Il s'agit maintenant de déterminer la répartition des contraintes dans chaque cas de sollicitation simple, puis d'appliquer le principe de superposition si le chargement est complexe.

Les diverses sollicitations simples sont présentées dans le tableau suivant :

N	T	M₁	$\underline{M} = M_2 \underline{X}_2 + M_3 \underline{X}_3$		Contraintes
≠0	0	0	0	Traction-compression simple	$\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$
0	≠0	0	0	Cisaillement simple	$\sigma_{11} = 0, \underline{\tau} \neq 0$
0	0	≠0	0	Torsion pure	$\sigma_{11} = 0, \underline{\tau} \neq 0$
0	0	0	≠0	Flexion pure	$\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$
≠0	0	0	≠0	Flexion composée	$\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$
0	≠0	0	≠0	Flexion simple	$\sigma_{11} \neq 0, \underline{\tau} \neq 0$

avec $\underline{\tau} = \sigma_{12} \underline{x}_2 + \sigma_{13} \underline{x}_3$

3 – Flexion pure - ($N=T=M_1=0$, $\underline{M} \neq \underline{0}$)

Calcul des contraintes.

Le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} (\text{Tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{1} \quad (\text{III-8})$$

l'hypothèse d'une section droite plane après déformation (hypothèse dite de Bernoulli) impose que la déformation dans la direction \underline{x}_1 soit une fonction linéaire des coordonnées x_2 et x_3 du point M dans la section droite étudiée.

$$\sigma_{11} = k_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \quad (\text{III-9})$$

Par ailleurs :

$$N = 0 \Rightarrow \iint_{(S)} \sigma_{11} dS = 0 \quad \text{et} \quad \underline{M}_G = \iint_{(S)} \underline{GM} \wedge \underline{T}(M, \underline{x}_1) dS \quad (\text{III-10})$$

La première relation conduit à :

$$k_1 \iint_{(S)} dS + k_2 \iint_{(S)} x_2 dS + k_3 \iint_{(S)} x_3 dS = 0 \quad \text{soit} \quad k_1 = 0 \quad (\text{III-11})$$

puisque $\iint_{(S)} x_2 dS = 0$ et $\iint_{(S)} x_3 dS = 0$ origine du repère en G

La deuxième relation s'écrit :

$$M_2 = \iint_{(S)} x_3 \sigma_{11} dS \quad \text{et} \quad M_3 = \iint_{(S)} -x_2 \sigma_{11} dS \quad (\text{III-12})$$

soit :

$$\begin{aligned} M_2 &= k_2 \iint_{(S)} x_2 x_3 dS + k_3 \iint_{(S)} x_3^2 dS \\ M_3 &= -k_2 \iint_{(S)} x_2^2 dS - k_3 \iint_{(S)} x_2 x_3 dS \end{aligned} \quad (\text{III-13})$$

Nous avons la relation donnée par le moment produit

$$\iint_{(S)} x_2 x_3 dS = 0, \quad (\text{III-14})$$

et par ailleurs :

$$\iint_{(S)} x_3^2 dS = I_2 \quad \text{et} \quad \iint_{(S)} x_2^2 dS = I_3 \quad (\text{III-15})$$

On obtient en définitive :

$$\sigma_{11} = \frac{M_2}{I_2} x_3 - \frac{M_3}{I_3} x_2 \quad (\text{III-16})$$

Flexion composée ($(N \neq 0, T=M_1=0$ et $\underline{M} \neq \underline{0}$) :

On superpose les effets de l'effort normal et du moment de flexion :

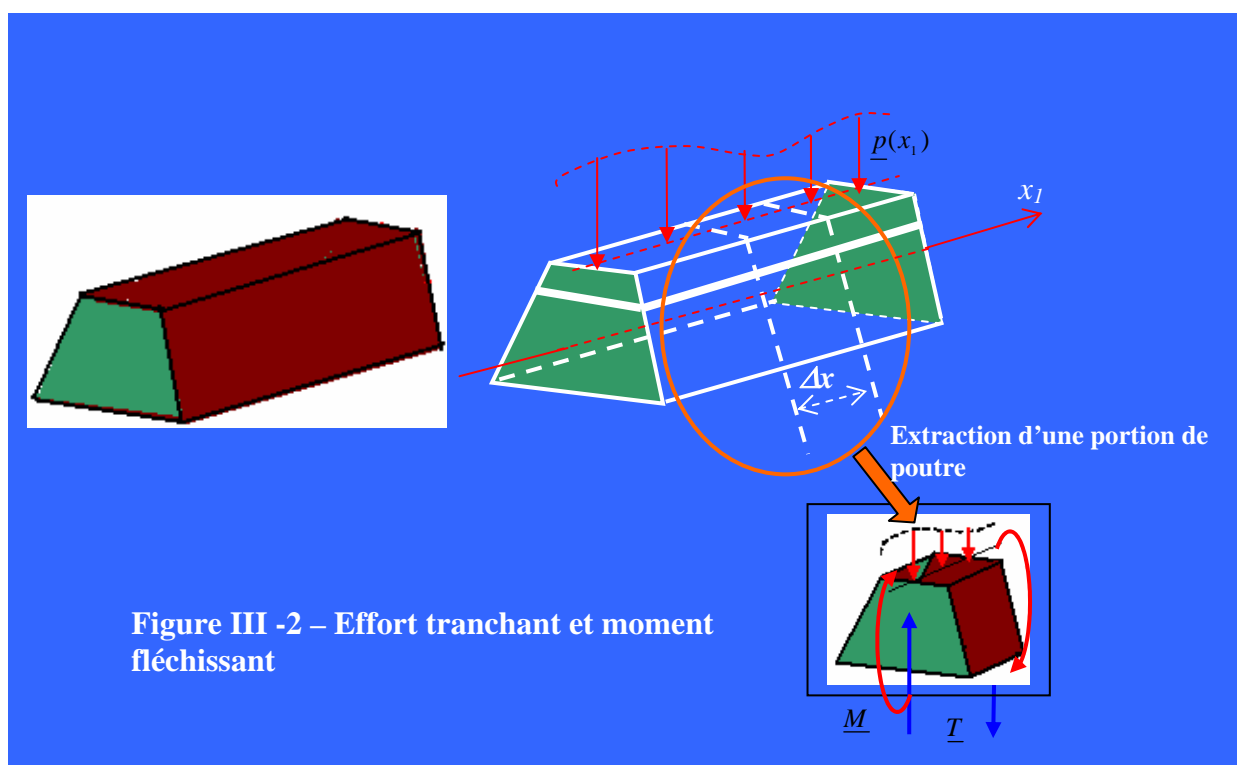
$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} + \frac{M_2}{I_2} x_3 - \frac{M_3}{I_3} x_2 \quad (\text{III-17})$$

4 – Contraintes dues à l'effort tranchant

Il est difficile d'obtenir la solution dans le cas où l'on a la présence simultanée du moment fléchissant et de l'effort tranchant. La solution dans le cas de la flexion pure ou composée est basée sur l'hypothèse de sections restant planes après chargement. Cependant l'effort tranchant génère des contraintes de cisaillement qui ont pour effet un gauchissement des sections droites.

Cependant, en première approximation, on accepte l'hypothèse d'une section plane après chargement y compris s'il y a présence d'un effort tranchant.

On considère la poutre suivante :



Le moment fléchissant varie de \underline{M} à \underline{M}' entre les sections droites (S) et (S') distantes de Δx_1 dans la direction x_1 . De même l'effort tranchant varie de \underline{T} à \underline{T}'

Nous prendrons dorénavant $\underline{M} = M_3 x_3$ et $\underline{T} = T_2 x_2$

Nous écrivons alors :

$$\sigma_{11} = -\frac{M_3}{I_3} x_2 \text{ dans la section (S)}$$

$$\text{et } \sigma'_{11} = -\frac{M'_3}{I_3} x_2 = -\frac{(M_3 - T_2 \Delta x_1)}{I_3} x_2 \quad (\text{III-18})$$

dans la section (S')

Effectuons une coupe à un niveau quelconque x_2 :

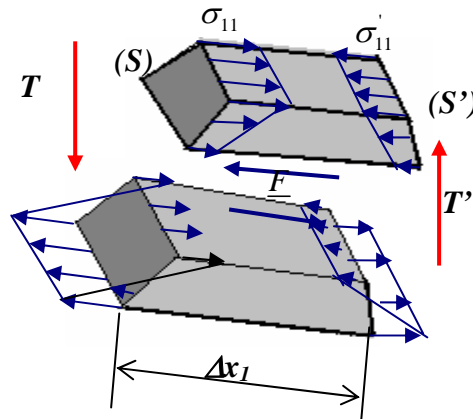


Figure III – 3 Contraintes de cisaillement

Si l'on considère la partie haute et que l'on écrive son équilibre, on obtient :

$$\iint_{(A')} \sigma_{11} dS - \iint_{(A')} \sigma'_{11} dS - \Delta F_1 = 0 \quad (\text{III-19})$$

ΔF_1 est la résultante de l'action exercée par la partie basse sur la partie haute.

En utilisant les équations donnant σ_{11} , on obtient :

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta x_1} = \frac{T_2}{I_3} \iint_{(A')} x_2 dS \quad (\text{III-20})$$

Dans cette expression $\iint_{(A')} x_2 dS$ est le moment statique de la section droite (S') par rapport à l'axe (G, \underline{x}_3) ; celui-ci peut se ramener à l'expression :

$$\iint_{(A')} x_2 dS = \bar{x}_2 A' \quad (\text{III-21})$$

La contrainte de cisaillement moyenne est donnée par :

$$\sigma_{12} = \frac{\Delta F_1}{A_2} = \frac{\Delta F_1}{b \Delta x_1} = \frac{T_2 A_1 \bar{x}_2}{b I_3} \quad (\text{III-22})$$

b est la largeur de la poutre au plan de coupe considéré.

Exemple de Calcul

Une poutre rectangulaire est soumise à un effort tranchant T_2 . On demande d'étudier la contrainte de cisaillement σ_{12} .

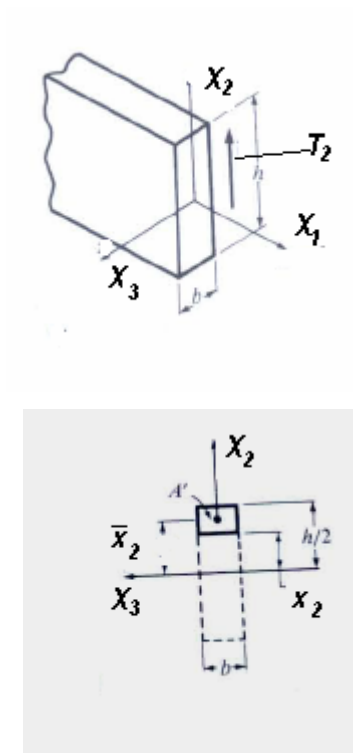


Figure III – 5 Calcul de la contrainte de cisaillement dans une section droite rectangulaire
Moment quadratique par rapport à (G, \underline{x}_3) :

$$I_3 = \frac{bh^3}{12}$$

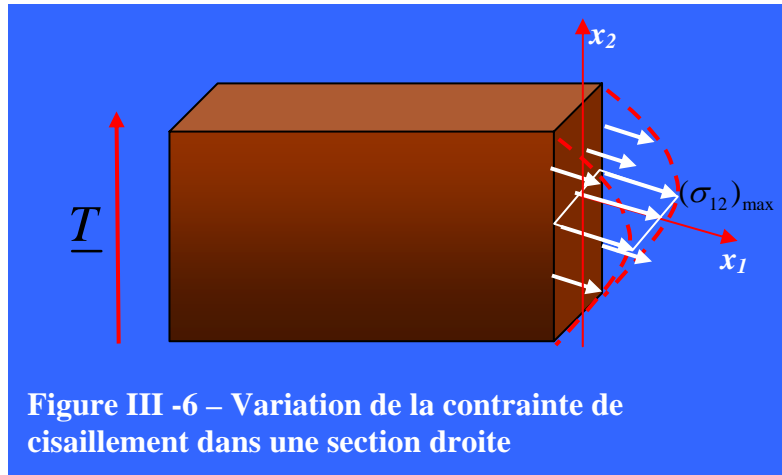
Calcul du moment statique :

$$\iint_{(A)} x_2 dS = \iint_{(A)} bx_2 dx = \frac{b}{2} x_2^2 \Big|_{x_2}^{h/2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - x_2 \right) \left(\frac{h}{2} + x_2 \right) \quad (\text{III-23})$$

Ce qui donne pour σ_{12} :

$$\sigma_{12} = \frac{6T_2}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (\text{III-24})$$

On remarquera que σ_{12} est maximal pour $x_2 = 0$:



IV - CALCUL A LA TORSION DES POUTRES DROITES PLEINES

1 – Introduction

La torsion est un des chargements fondamentaux qui peut agir sur des solides de type curvilignes. Dans le cadre de ce cours nous n'aborderons que le cas des milieux curvilignes rectilignes et à section droite pleine.

Nous adopterons par ailleurs les hypothèses de Saint Venant. En première approximation nous considérerons que les sections droites restent planes après chargement. Ce qui équivaut à dire que nous négligerons le gauchissement des sections droites. La résolution est ainsi facilitée.

Dans le cas général, la solution est complexe et nécessite de prendre compte la géométrie de la pièce et de recourir à des méthodes particulières de l'élasticité. Les plus connues sont celles de Prandtl et de Saint Venant.

2 – Etude des déformations et des contraintes

Tenseur des déformations

Soit une poutre droite cylindrique pleine sollicitées sur une des sections droites extrêmes (S) par un couple $\underline{C} = C\underline{x}_1$. L'autre section droites extrêmes (S') est sollicitée par $-\underline{C}$.

La poutre en question est rapportée à un repère cartésien de base $(O; \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$. L'axe de la poutre est l'axe $(O; \underline{x}_1)$.

Considérons un point $A(x_1, x_2, x_3)$ avant sollicitation. Sa position après l'application du couple devient $A'(x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3)$.

Le déplacement du point A est donc défini par $\underline{u} = u_1\underline{x}_1 + u_2\underline{x}_2 + u_3\underline{x}_3$.

On note β l'angle de rotation de la poutre par unité de longueur suivant la direction \underline{x}_1 .

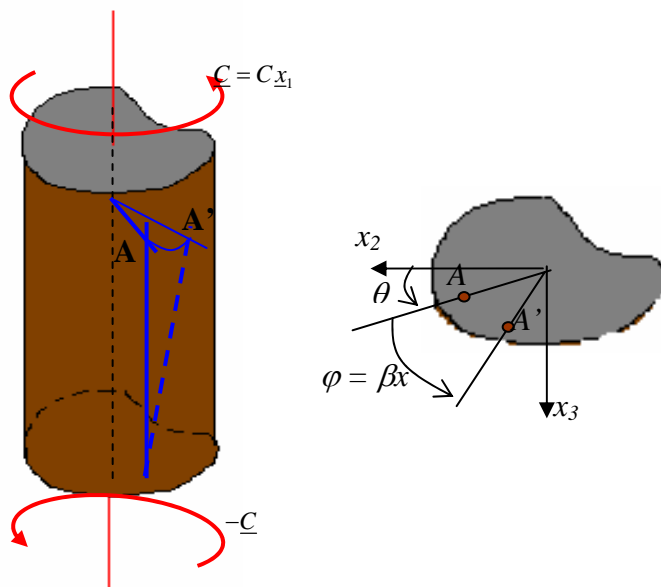


Figure IV -1 Poutre en torsion pure

$$\beta = \frac{d\varphi}{dx_1} \quad (\text{IV-1})$$

Si β est constant on obtient $\varphi = \beta x_1$

Le déplacement du point A est alors donné par la formulation géométrique suivante (voir la figure ci-dessus) :

$$\begin{cases} u_1 \\ u_2 = -r\varphi \sin \theta = -r\beta x_1 \sin \theta = -\beta x_1 x_3 \\ u_3 = r\varphi \cos \theta = r\beta x_1 \cos \theta = \beta x_1 x_2 \end{cases} \quad (\text{IV-2})$$

Le déplacement u_1 suivant x_1 est appelé gauchissement de la section droite.

D'après le principe de Saint Venant u_1 ne dépend pas de x_1 :

$$u_1 = u_1(x_2, x_3) \quad (\text{IV-3})$$

Le tenseur des déformations est défini par :

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{grad}} \underline{\underline{u}})$, et donc :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV-4})$$

Dans cette matrice nous avons les valeurs des composantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \beta x_3 \right) \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \beta x_2 \right)\end{aligned}\quad (\text{IV-5})$$

Les équations de compatibilité s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_k \partial x_i} \quad (\text{IV-6})$$

Parmi toutes ces équations on retiendra :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (\text{IV-7})$$

En tenant compte des valeurs de la matrice des déformations, l'équation devient :

$$\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3} = \beta \quad (\text{IV-8})$$

Tenseur des contraintes

Le matériau étant considéré comme élastique linéaire et isotrope, nous utilisons la loi de comportement pour déterminer le champ des contraintes.

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} \quad 9v$$

Ceci aboutit à la matrice des contraintes de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV-10})$$

avec :

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \beta x_3 \right) \\ \sigma_{13} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \beta x_2 \right)\end{aligned}\quad (\text{IV-11})$$

3 – Fonction de contrainte

Nous allons mettre en évidence une fonction dite fonction de contrainte qui permet le calcul simple du tenseur des contraintes.

Pour cela nous écrivons l'équilibre local et global du milieu ainsi que les conditions de compatibilité et les conditions aux limites.

Equilibre local

L'équation d'équilibre locale s'écrit classiquement :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f} = \underline{0} \quad (\text{IV-12})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-13})$$

L'équation de compatibilité donne :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = 0 \quad (\text{IV-14})$$

Equilibre global

Sur un tronçon de poutre nous pouvons écrire l'équilibre des forces

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{x}_1 dS &= \underline{0} \\ \int_{(S)} \underline{OM} \wedge \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{x}_1 dS - \underline{C} &= \underline{0} \end{aligned} \quad (\text{IV-15})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{(S)} \sigma_{12} dS = 0 \\ \int_{(S)} \sigma_{13} dS = 0 \\ \int_{(S)} (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) dS - \underline{C} \cdot \underline{x}_1 = 0 \end{cases}$$

Conditions aux limites :

sur le pourtour on peut écrire la condition de non chargement :

$$\begin{aligned} \underline{T}(M, \underline{n}) &= \underline{0} \\ \Rightarrow \sigma_{12} \cos \theta + \sigma_{13} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-16})$$

Le problème de torsion est résolu si l'on identifie les quatre inconnues : $\sigma_{12}, \sigma_{13}, u_1$ et β .

Les équations d'équilibre local et l'équation de compatibilité permettent de postuler

l'existence d'une fonction $\varphi(x_2, x_3)$ telle que :

$$\sigma_{12} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \quad \text{et} \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad (\text{IV-17})$$

Les équations de compatibilité donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = -2\mu\beta \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_2} \end{array} \right. \quad (\text{IV-18})$$

Elle doit par ailleurs satisfaire les conditions aux limites sur le contour :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \cos \theta - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \sin \theta = 0 \quad (\text{IV-19})$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} = 0 \Leftrightarrow d\varphi(x_2, x_3) = 0 \quad (\text{IV-20})$$

$\varphi(x_2, x_3)$ est définie à une constante près, on peut la prendre nulle sur le contour.

Méthode de détermination de $\varphi(x_2, x_3)$:

$\varphi(x_2, x_3)$ doit être solution de :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(x_2, x_3) &= -2\mu\beta \\ \varphi(x_2, x_3) &= 0 \text{ sur le contour.} \end{aligned} \quad (\text{IV-21})$$

Soit $f(x_2, x_3) = 0$ l'équation du contour (C) de la section droite.

On prend souvent :

$$\varphi(x_2, x_3) = \lambda f(x_2, x_3), \quad (\text{IV-22})$$

λ constante.

Application au cas d'une section droite circulaire pleine.

L'équation du contour est :

$$f(x_2, x_3) = R^2 - (x_2^2 + x_3^2) = R^2 - r^2$$

et donc :

$$\text{la condition } \Delta \varphi(x_2, x_3) = -2\mu\beta \text{ donne } \lambda = \frac{\mu\beta}{2}$$

d'où

$$\varphi(x_2, x_3) = \frac{\mu\beta}{2} [R^2 - (x_2^2 + x_3^2)] \quad (\text{IV-23})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = -\mu\beta x_3 \\ \text{et} \\ \sigma_{13} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \mu\beta x_2 \end{aligned} \quad (\text{IV-24})$$

Le couple de torsion est calculé par :

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \int_{(S)} \underline{OM} \wedge \underline{T}(M, \underline{x}_1) dS = \int_{(S)} (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) dS \underline{x}_1 \\ \Rightarrow \underline{C} \cdot \underline{x}_1 &= 2 \int_{(S)} \varphi(x_2, x_3) dS = \mu \beta J \end{aligned} \quad (\text{IV-25})$$

J est le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe $(O; \underline{x}_1)$

$J = \frac{\pi \mu R^4}{2}$ est la rigidité à la torsion d'une section droite circulaire pleine.

V - LOIS DE COMPORTEMENT DANS LES MILIEUX CURVILIGNES

1 Introduction

Pour les milieux curvilignes, les efforts intérieurs sont représentés par le tenseur :

$$[\mathbf{X}(s)] = [G; \underline{R}(s), \underline{M}_G(s)] \quad (\text{V-1})$$

De même le déplacement est défini par le tenseur :

$$[\mathbf{U}] = [G; \underline{u}(s), \underline{\omega}(s)] \text{ en tout point de la ligne moyenne.}$$

$\underline{u}(s)$ est le champ des déplacement du point G de la section droite.

$\underline{\omega}(s)$ est la rotation de la section droite

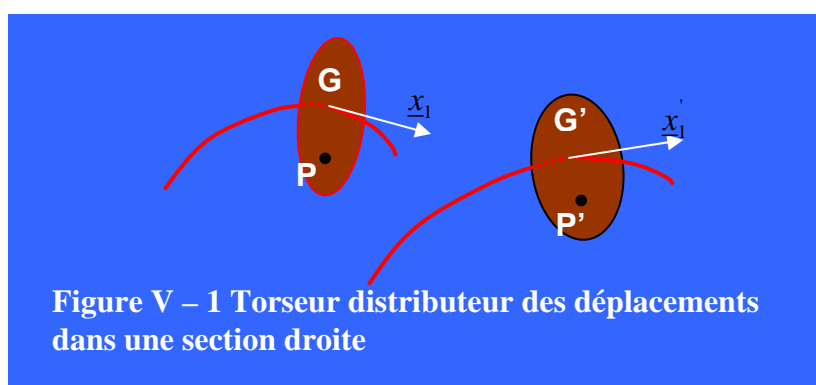
La loi de comportement consiste à chercher la relation à l'instant t entre le tenseur des efforts intérieurs et les déformations.

Nous adoptons les hypothèses suivantes :

on se place d'emblée dans l'hypothèse de transformation infinitésimales. Plus exactement on suppose :

- la rotation $\underline{\omega}(s)$ telle que $\forall G \quad |\underline{\omega}(s)| \ll 1$
- le gradient de \underline{u} tel que $\forall G, \quad \left| \frac{d\underline{u}(s)}{ds} \right| \ll 1$

On adopte l'hypothèse de Navier-Bernoulli sur les mouvements réels.



On écrit la relation de transport pour le tenseur distributeur des vitesses des déplacements. :

$$\begin{aligned} \underline{u}(P) &= \underline{u}(G) + \underline{PG} \wedge \underline{\omega} \\ \underline{G'P'} &= \underline{GP} + \underline{u}(P) - \underline{u}(G) \\ \Rightarrow \delta(\underline{GP}) &= \underline{\omega} \wedge \underline{GP} \end{aligned} \quad (\text{V-2})$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{d(OG')}{ds} = \frac{d(OG)}{ds} + \frac{d(u)}{ds} \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_1 + \frac{d(u)}{ds} \\ \Rightarrow \delta(x_1) &= \frac{d(u)}{ds} \end{aligned} \quad (V-3)$$

L'hypothèse de Bernoulli indique que

$$\forall P, \text{ tel que } \underline{GP} \cdot \underline{x}_1 = 0$$

$$\text{alors } \underline{G}'P' \cdot \dot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow (\underline{GP} + \underline{\omega} \wedge \underline{GP}) \cdot (\underline{x}_1 + \frac{d(u)}{ds}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{GP} \cdot \frac{d(u)}{ds} + (\underline{\omega} \wedge \underline{GP}) \cdot \underline{x}_1 = 0 \text{ au premier ordre} \quad (V-4)$$

$$\Leftrightarrow \underline{GP} \cdot (\frac{d(u)}{ds} - \underline{\omega} \wedge \underline{x}_1) = 0 \Rightarrow \frac{d(u)}{ds} + \underline{x}_1 \wedge \underline{\omega} = \lambda \underline{x}_1$$

Décomposons le vecteur rotation : $\underline{\omega} = \omega_1 \underline{x}_1 + \underline{\omega}_\perp$ tel que $\underline{\omega}_\perp \cdot \underline{x}_1 = 0$

$$\lambda \underline{x}_1 + \underline{\omega}_\perp \wedge \underline{x}_1 = \frac{d(u)}{ds} \Rightarrow \underbrace{(\underline{\omega}_\perp \wedge \underline{x}_1)}_{-\underline{\omega}_\perp} \wedge \underline{x}_1 = \frac{d(u)}{ds} \wedge \underline{x}_1$$

Alors :

$$\Rightarrow \underline{\omega}_\perp = \underline{x}_1 \wedge \frac{d(u)}{ds}$$

On introduit un tenseur déformation de la forme :

$$\frac{d}{ds} \{ \mathbf{U} \} = \frac{d}{ds} \{ G; \underline{u}, \underline{\omega} \} = \left\{ G; \underbrace{\frac{d(u)}{ds} + \underline{x}_1 \wedge \underline{\omega}}_{=\lambda \underline{x}_1 = \varepsilon(s) \underline{x}_1}, \frac{d(\underline{\omega})}{ds} \right\} = \{ E \} \quad (V-6)$$

Le tenseur distributeur des déformations d'un milieu curviligne est donc de la forme

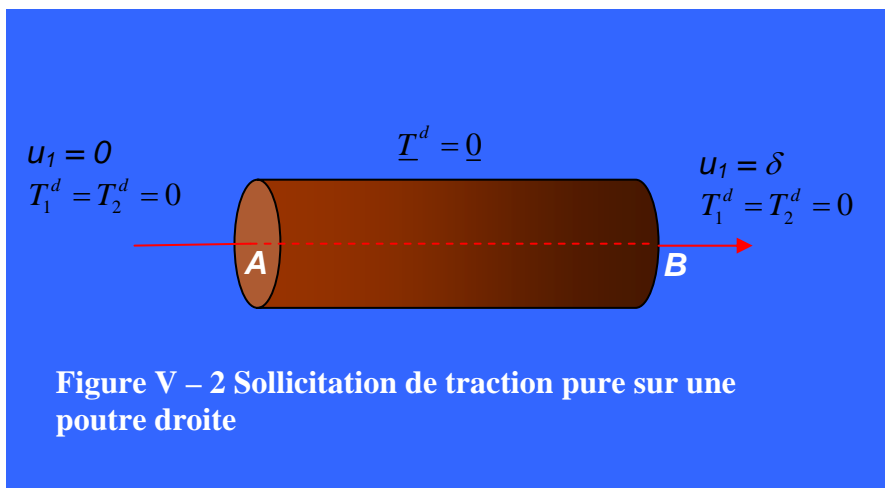
$$\{ E \} = \left\{ G; \varepsilon(s) \underline{x}_1, \frac{d(\underline{\omega})}{ds} \right\}$$

$$\text{avec : } \varepsilon(s) = \underline{x}_1 \cdot \frac{d(u)}{ds} \text{ et } \frac{d(\underline{\omega})}{ds} = \frac{d(\omega_1)}{ds} \underline{x}_1 + \frac{\omega_1}{\rho} \underline{x}_2 + \frac{d(\underline{\omega}_\perp)}{ds} \quad (V-7)$$

2 – Loi de comportement pour les poutres droites.

On peut considérer la poutre rectiligne droite comme un milieu curviligne ou bien comme un milieu $3d$. Les quantités associées à ce milieu doivent être égales que l'on considère le milieu comme un milieu curviligne ou $3d$. Ceci est valable dans le cas de l'énergie de déformation.

Commençons par calculer en utilisant les deux approches pour des cas de sollicitations de traction pure puis de flexion pure puis la superposition des deux sollicitations



a) *Traction uniaxiale.*

- approche $3d$

La solution de ce problème est simple et classique et le tenseur des contraintes prend la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \sigma/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\sigma/E & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\sigma/E \end{pmatrix} \quad (\text{V-8})$$

avec $\sigma = E \frac{\delta}{l}$

L'énergie élastique en contrainte est alors donnée par :

$$W_i^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \int_{(\Omega)} \left[\frac{1+\nu}{2E} \text{Tr} \underline{\underline{\sigma}}^2 - \frac{\nu}{2E} (\text{Tr} \underline{\underline{\sigma}})^2 \right] d\Omega = \frac{\sigma^2}{2E} Sl \quad (\text{V-9})$$

Si l'on considère σ comme constante dans le cas d'une sollicitation de traction pure, et si l'on définit par N l'effort normal dans la poutre, on écrit :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

l'énergie de déformation s'écrit alors :

$$W_i^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{\sigma^2}{2E} Sl = \frac{N^2}{2ES} l \quad (\text{V-10})$$

Par ailleurs le calcul de l'énergie de déformation en considérant le milieu curviligne donne :

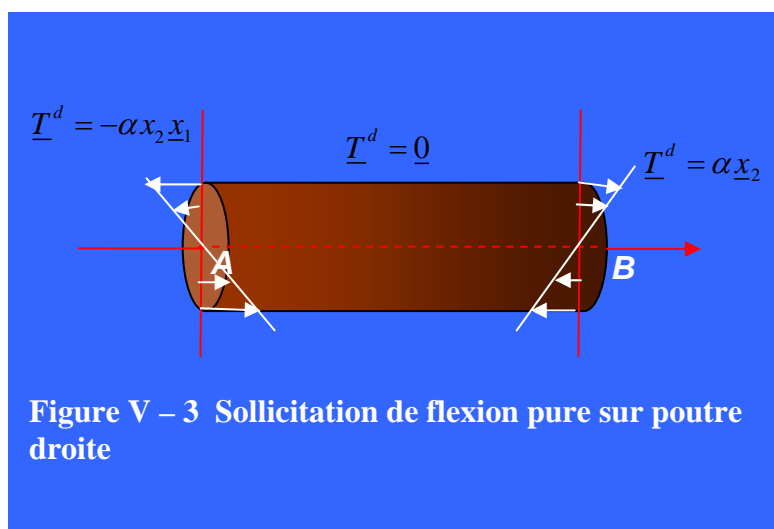
$$W_{(AB)}^*([\mathbf{X}(s)]) = \int_{(AB)} [\mathbf{X}(s)][\mathbf{E}(s)] ds = \int_{(AB)} N(s) \frac{du_1}{ds} ds$$

Là aussi les termes à l'intérieur de l'intégrale sont constants sur la poutre droite pour ce type de sollicitation.

En égalisant les 2 expressions nous obtenons :

$$\frac{du_1}{ds} = \varepsilon(s) = \frac{N}{ES} \quad (\text{V-11})$$

b) Flexion pure



La solution en contrainte de ce problème est :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -\frac{M}{I} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{M}{EI} x_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} \quad (\text{V-12})$$

L'énergie de déformation est alors donnée par :

$$W_i^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \int_{(\Omega)} \left[\frac{1+\nu}{2E} \text{Tr} \underline{\underline{\sigma}}^2 - \frac{\nu}{2E} (\text{Tr} \underline{\underline{\sigma}})^2 \right] d\Omega = \frac{l}{2} \frac{M^2}{EI} \quad (\text{V-13})$$

Les torseurs des efforts intérieurs et des déformations du milieu curviligne sont données par :

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}(x_1)] &= [G; \underline{0}; \underline{M}(x_1)] \\ [\mathbf{E}(x_1)] &= \left[G; \underline{0}; \frac{d\omega_3}{dx_1} x_1 \right] \end{aligned} \quad (\text{V-14})$$

D'où l'énergie de déformation

$$W_{(AB)}^*([\mathbf{X}(x_1)]) = \int_{(AB)} [\mathbf{X}(x_1)][\mathbf{E}(x_1)] ds = \int_{(AB)} M(x) \frac{d\omega_1}{dx_1} dx_1 = \frac{1}{2} M(x) \frac{d\omega_1}{dx_1} l$$

Là aussi les termes à l'intérieur de l'intégrale sont constants sur la poutre droite pour ce type de sollicitation de flexion pure.

En égalisant entre les deux expressions nous obtenons :

$$\frac{d\omega_3}{dx_1} = \frac{M}{EI} \quad (\text{V-15})$$

c) Généralisation

Pour la poutre droite soumise à :

- un effort normal N
- un couple de torsion C
- un moment de flexion de la forme : $\underline{M} = M_1 \underline{x}_1 + M_3 \underline{x}_3$

appliqué au centre de la section droite de la poutre, on a :

$$W_i^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \int_{(\Omega)} \left[\frac{1+\nu}{2E} \text{Tr} \underline{\underline{\sigma}}^2 - \frac{\nu}{2E} (\text{Tr} \underline{\underline{\sigma}})^2 \right] d\Omega = \frac{l}{2} \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M_2^2}{EI_2} + \frac{M_3^2}{EI_3} + \frac{C^2}{\mu J} \right) \quad (\text{V-16})$$

J est le moment polaire de la section droite calculé en son centre.

Pour le milieu curviligne on écrit :

$$W_{(AB)}^*([\mathbf{X}(x_1)]) = \int_{(AB)} [\mathbf{X}(x_1)][\mathbf{E}(x_1)] ds = \frac{l}{2} \left(N \frac{du_1}{dx_1} + M_2 \frac{d\omega_2}{dx_1} + M_3 \frac{d\omega_3}{dx_1} + C \frac{d\omega_1}{dx_1} \right) \quad (\text{V-17})$$

Et on peut écrire $W^*(\underline{\underline{\sigma}}) = W^*([\mathbf{X}(x_1)])$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(x) = \frac{du_1}{dx_1} = \frac{N}{ES}, \\ \frac{d\omega_2}{dx_1} = \frac{M_2}{EI_2}, \quad \frac{d\omega_3}{dx_1} = \frac{M_3}{EI_3} \\ \frac{d\omega_1}{dx_1} = \frac{C}{\mu J} \end{array} \right. \quad (\text{V-18})$$

Pour un élément de poutre curviligne on définit la densité d'énergie de déformation par :

$$w_i^* = \frac{dW_i^*(\underline{\underline{\sigma}})}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M_2^2}{EI_2} + \frac{M_3^2}{EI_3} + \frac{C^2}{\mu J} \right) \quad (\text{V-19})$$

et

$$w_{(AB)}^* \frac{dW_{(AB)}^*([\mathbf{X}(s)])}{ds} = \frac{1}{2} \left(N \frac{du_1}{dx_1} + M_2 \frac{d\omega_2}{dx_1} + M_3 \frac{d\omega_3}{dx_1} + C \frac{d\omega_1}{dx_1} \right) \quad (\text{V-20})$$

3 – Récapitulatif

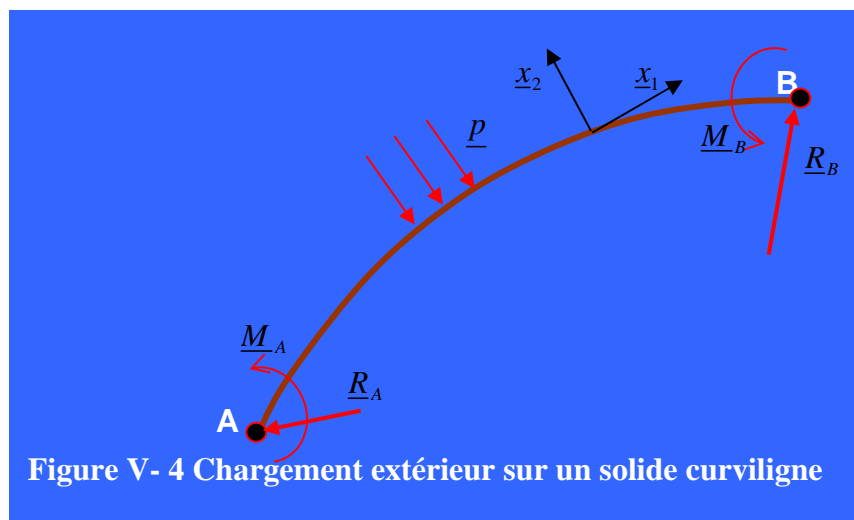
Dans le cas général, on considère que l'élément de milieu curviligne d'un arc de section constante et de faible courbure, se comporte comme s'il était un élément de poutre droite précédent, la courbe directrice (ou ligne moyenne) étant placée sur la ligne des centres d'inertie des sections droites.

Par ailleurs on néglige l'effet dus aux efforts tranchants.

On écrit alors la loi de comportement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(s) = \frac{du_1}{ds} = \frac{N}{ES} \\ \frac{d\underline{\omega}}{ds} = \frac{M_2}{EI_2} \underline{x}_2 + \frac{M_3}{EI_3} \underline{x}_3 + \frac{C}{\mu J} \underline{x}_1 \end{array} \right. \quad (\text{V-21})$$

et la relation de Navier-Bernouilli : $\underline{\omega}_1 = \underline{x}_1 \wedge \frac{d(\underline{u})}{ds}$



4 – Cas des structures planes chargées dans leur plan

En récapitulant les résultats obtenus dans ce cadre jusqu'à présent on a :

Statique :

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{ds} - \frac{T}{\rho} + p_1 &= 0 \\
\frac{dT}{ds} + \frac{N}{\rho} + p_2 &= 0 \\
\frac{dM}{ds} + T + m &= 0
\end{aligned}
\tag{V-22}$$

Elasticité :

$$\left\{ \begin{aligned}
\varepsilon(s) &= \frac{du_1}{ds} = \frac{N}{ES} \\
\frac{d\omega_3}{ds} &= \frac{M_3}{EI_3}
\end{aligned} \right.
\tag{V-23}$$

Relations géométriques :

$$\begin{aligned}
\underline{u} &= u_1 \underline{x}_1 + u_2 \underline{x}_2 \\
\varepsilon(s) &= \frac{du_1}{ds} - \frac{u_2(s)}{\rho(s)} \\
\underline{\omega}(s) &= \omega_3(s) \underline{x}_3 = \frac{u_1}{\rho} + \frac{du_2}{ds}
\end{aligned}
\tag{V-24}$$

Dans le cas des poutres droites : $\rho(s) = \infty$ et $s = x$

Les équations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned}
\underline{u} &= u_1 \underline{x}_1 + u_2 \underline{x}_2 \\
\varepsilon(x_1) &= \frac{du_1}{dx_1} \\
\underline{\omega}(x_1) &= \omega_3(x_1) \underline{x}_3 = \frac{du_2}{dx_1}
\end{aligned}
\tag{V-25}$$

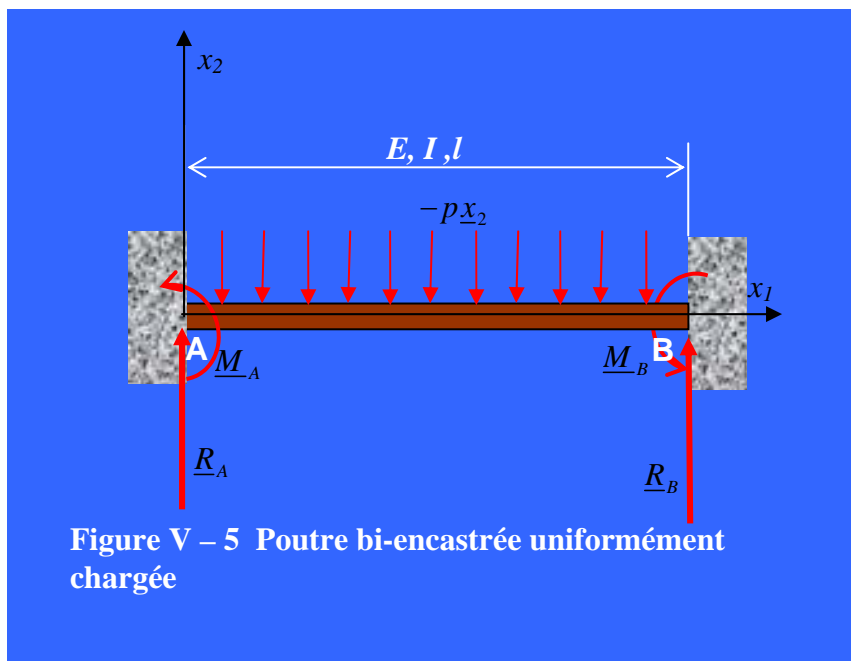
La loi de comportement devient :

$$\left\{ \begin{aligned}
\varepsilon(x_1) &= \frac{du_1}{dx_1} = \frac{N}{ES} \\
\frac{d\omega_3}{dx_1} &= \frac{d^2u_2}{dx_1^2} = \frac{M_3}{EI_3}
\end{aligned} \right.
\tag{V-26}$$

La composante u_2 représente la flèche ou la déflexion de la poutre en tout point de celle-ci. La relation de comportement permet de résoudre des problèmes hyperstatiques en permettant d'écrire une (ou des) équation(s) supplémentaire(s). Nous allons l'illustrer par l'exemple ci-dessous.

Exemple d'application :

Soit la poutre droite encastrée en ses deux extrémités et chargée uniformément. Le principe fondamental de la statique nous permet d'écrire uniquement 3 équations. Nous avons à faire donc à une poutre droite chargée dans son plan.



Réactions aux extrémités A et B :

Efforts horizontaux :

$$X_{1A} = X_{1B} = 0$$

Efforts verticaux :

$$X_{2A} + X_{2B} - \int_0^l p dx_1 = 0 \Rightarrow X_{2A} + X_{2B} = pl \quad (\text{V-27})$$

Théorème des moments (en A):

$$M_A + M_B + lX_{2B} - \int_0^l px_1 dx_1 = 0 \Rightarrow M_A + M_B + lX_{2B} = p \frac{l^2}{2} \quad (\text{V-28})$$

Le bilan des équations et des inconnues nous indique un problème de type hyperstatique d'ordre 2.

En l'absence de tout autre indication ce système possède une infinité de solutions.

Nous allons formuler une autre équation à l'aide de la loi de comportement entre le déplacement vertical de la poutre et le moment fléchissant. Pour cela nous devons calculer les efforts intérieurs dans la poutre.

effort tranchant

$$\frac{dT(x_1)}{dx_1} = p \Rightarrow T(x_1) = px_1 - X_{2A} \quad (\text{V-29})$$

moment fléchissant

$$\frac{dM(x_1)}{dx_1} = -T(x_1) \Rightarrow M(x_1) = -p \frac{x_1^2}{2} + X_{2A}x_1 - M_A \quad (\text{V-30})$$

Les conditions aux limites sont relatives aux encastremets. De ce fait nous pouvons écrire que la flèche (déplacement verticale) et la rotation aux droites de l'encastrement sont nuls.

$$u_2(0) = u_2(l) = 0$$

$$\omega_3(0) = \omega_3(l) = 0$$

Les équations géométriques nous permettent d'écrire :

$$\omega_3(x_1) = \frac{du_2}{dx_1} \quad (\text{V-31})$$

$$\frac{du_2(0)}{dx_1} = \frac{du_2(l)}{dx_1} = 0 \quad (\text{V-32})$$

Nous devons d'abord calculer le déplacement à l'aide de la relation de la loi de comportement poutre les poutres droites :

$$\frac{d^2u_2}{dx_1^2} = \frac{M_3}{EI_3} \quad (\text{V-33})$$

et intégrer pour obtenir le déplacement vertical :

$$EI_3 u_2(x_1) = \frac{px_1^4}{24} - \frac{T_A x_1^3}{6} - \frac{M_A x_1^2}{2} \quad (\text{V-34})$$

Les conditions aux limites écrites précédemment aboutissent à l'identification des réactions :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{2A} = X_{2B} = \frac{pl}{2} \\ M_A = -\frac{pl^2}{12} \\ M_B = \frac{pl^2}{12} \end{array} \right. \quad (\text{V-35})$$

La flèche au milieu de la poutre est donnée par :

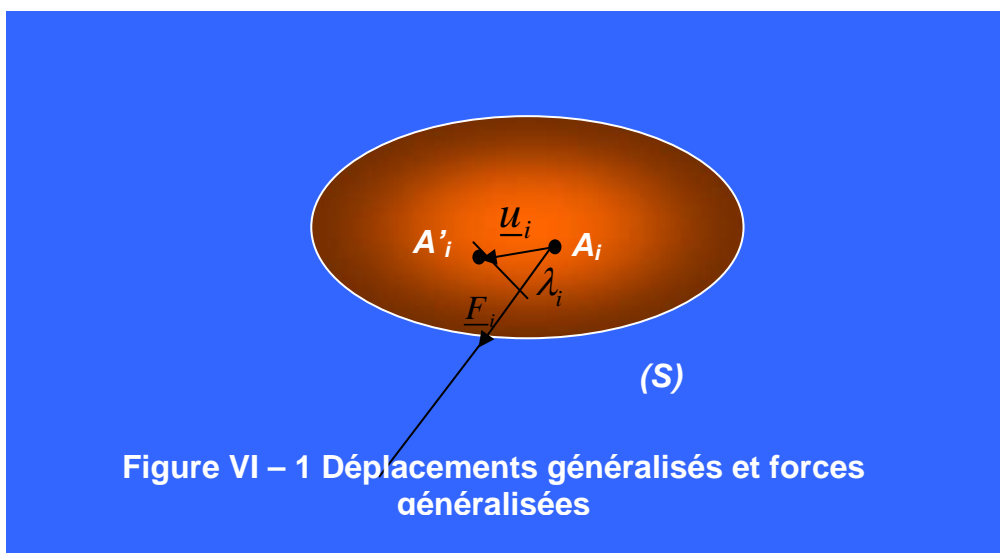
$$u_2(l/2) = \frac{pl^4}{384} \quad (\text{V-36})$$

VI - METHODES ET THEOREMES ENERGETIQUES

1 – Généralités. Notions de système de forces généralisées.

Nous désignerons par système de forces généralisées \underline{F}_i ($i = 1, n$), l'ensemble des actions mécaniques extérieures. C'est-à-dire que les couples seront dénommés dans ce chapitre comme un élément faisant partie du système de forces généralisées.

Nous associerons au système de forces généralisées, les déplacements généralisés. Le déplacement généralisé associé à une force est la projection du déplacement du point d'application de cette force sur sa direction. De même le déplacement généralisé associé à un couple, est la rotation provoquée par le couple projeté dans la direction de l'axe du couple.



2 – Théorème de Clapeyron

Nous considérons le solide (S) non chargé et dans son état naturel, soumis à un système de forces généralisées \underline{F}_i ($i = 1, n$) appliquées aux points A_i associées aux déplacements généralisés λ_i , ($i = 1, n$), le travail des forces extérieures est donné par :

$$W_e = \frac{1}{2} F_i \lambda_i \quad (\text{VI-1})$$

Démonstration :

Si l'on considère que la force généralisée \underline{F}_i est croissante entre l'instant initial 0 où elle vaut 0 et l'état final où elle vaut \underline{F}_i , On peut donc écrire que lors du chargement :

$$\underline{F}_i(\rho) = \rho \underline{F}_i \text{ où } \rho \text{ croit de } 0 \text{ à } 1.$$

Le déplacement du point d'application A_i de la force \underline{F}_i est $\underline{\mu}_i$. On peut écrire

$$\underline{F}_i \cdot \underline{\mu}_i = \|\underline{F}_i\| \|\underline{\mu}_i\| \cos \theta = F_i \lambda_i. \quad (\text{VI-2})$$

Du fait de la linéarité du comportement du milieu, nous pouvons écrire :

$$\lambda_i(\rho) = \rho \lambda_i \text{ avec } 0 \leq \rho \leq 1$$

Pour un trajet infinitésimal $d\lambda_i$, le travail de la force F_i est donc :

$$\begin{aligned} dW(F_i) &= F_i \cdot d\lambda_i \\ d\lambda_i &= d(\rho \lambda_i) = \lambda_i d\rho \end{aligned} \quad (\text{VI-13})$$

$$W_e(F_i) = \int_{\rho=0}^{\rho=1} dW = \int_{\rho=0}^{\rho=1} F_i \lambda_i \rho d\rho = \frac{1}{2} F_i \lambda_i \quad (\text{VI-4})$$

3 – Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti.

Enoncé :

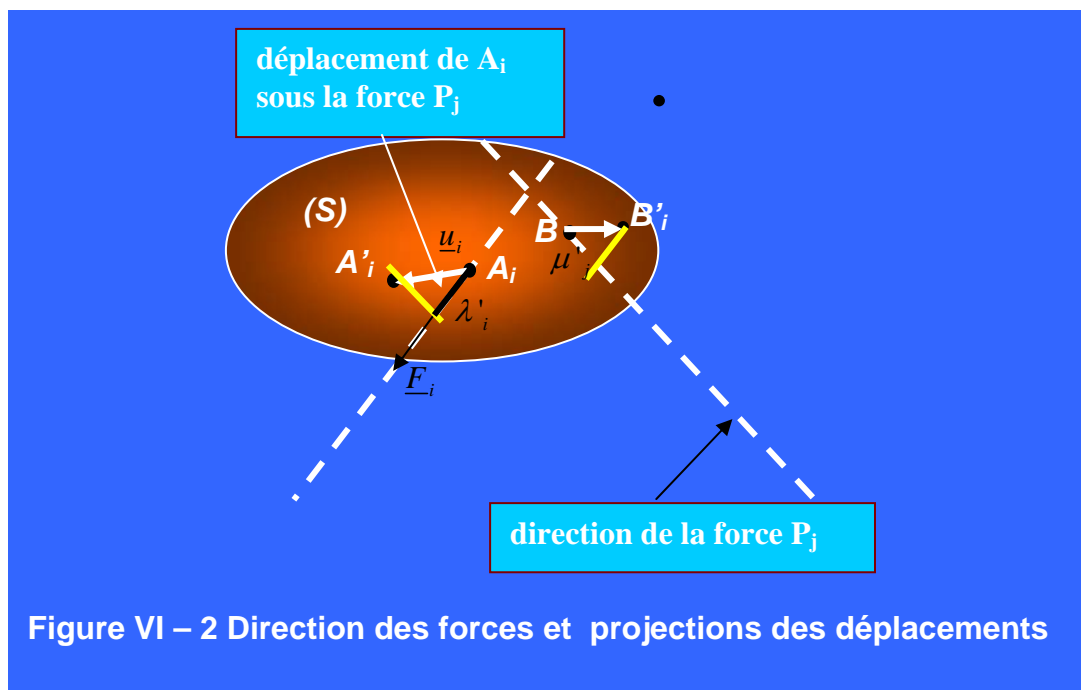
Soit un solide caractérisé par un comportement élastique linéaire, soumis à partir de l'état initial au repos à deux système de forces généralisées \underline{F}_i ($i = 1, n$) et \underline{P}_j ($j = 1, m$). On note A_i ($i = 1, n$) les points d'application respectifs des forces \underline{F}_i ($i = 1, n$) et B_j ($j = 1, m$) les points d'application respectifs des forces \underline{P}_j ($j = 1, m$).

On considère :

- λ'_i ($i = 1, n$) les projections orthogonales sur la ligne d'action des forces \underline{F}_i des déplacements des points A_i ($i = 1, n$), sous l'action des forces \underline{P}_j ($j = 1, m$) seules.
- μ'_j ($j = 1, m$) les projections orthogonales sur la ligne d'action des forces \underline{P}_j des déplacements des points B_j ($j = 1, m$) sous l'action des forces \underline{F}_i ($i = 1, n$) seules.

Nous avons alors la relation suivante :

$$\lambda'_i F_i = \mu'_j P_j \quad (\text{VI-5})$$



Démonstration :

On note λ_i ($i = 1, n$) les déplacements généralisés associées aux forces généralisées

$$\underline{F}_i \quad (i = 1, n)$$

et μ_j ($j = 1, m$) les déplacements généralisés associés aux forces généralisées \underline{P}_j ($j = 1, m$)

Le chargement est opéré à partir d'un état au repos. On applique successivement et de manière progressive :

- Les forces généralisées \underline{F}_i ($i = 1, n$) (les forces \underline{P}_j ($j = 1, m$) n'étant pas encore appliquées) : c'est la phase I
- Puis, les forces généralisées \underline{P}_j ($j = 1, m$) (les forces \underline{F}_i ($i = 1, n$) restant alors appliquées et constantes) : c'est la phase II

D'après le théorème de Clapeyron, le travail des forces \underline{F}_i ($i = 1, n$) pendant la phase I est égal à :

$$W_1 = \frac{1}{2} F_i \lambda_i \quad (\text{VI-6})$$

puisque les forces \underline{F}_i sont associées aux déplacements λ_i

Pendant la phase II, les déplacements généralisés associés aux forces \underline{P}_j sont μ_j ; pendant cette même phase, les déplacements généralisés des points d'application des forces \underline{F}_i ont un

déplacement noté λ'_i . Ainsi le travail des forces extérieures pendant cette phase II est égal, d'après le théorème de Clapeyron, à :

$$W_2 = \frac{1}{2} P_j \mu_j + F_i \lambda'_i \quad (\text{VI-7})$$

D'après le principe de conservation d'énergie, la variation d'énergie emmagasinée par le solide au cours des phases I et II est donc égale à :

$$\Delta W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} F_i \lambda_i + \frac{1}{2} P_j \mu_j + F_i \lambda'_i \quad (\text{VI-8})$$

Si l'on inverse maintenant la succession des sollicitations en appliquant d'abord le système de chargements généralisé \underline{P}_j ($j = 1, m$) puis les forces généralisées \underline{F}_i ($i = 1, n$) tout en maintenant les sollicitations précédentes constantes on obtient alors pour la variation d'énergie emmagasinée dans le milieu :

$$\Delta W = \frac{1}{2} F_i \lambda_i + \frac{1}{2} P_j \mu_j + P_j \mu'_j \quad (\text{VI-9})$$

La valeur de ΔW ne doit dépendre que de la configuration initiale et de la configuration finale. Nous égalisons alors les deux expressions et on obtient la relation à démontrer.

Exemple d'application

Nous nous proposons de déterminer la flèche verticale v au milieu d'une poutre reposant sur des appuis simples et soumise à un charge verticale descendante P , appliqué au point C, quelconque de la poutre :

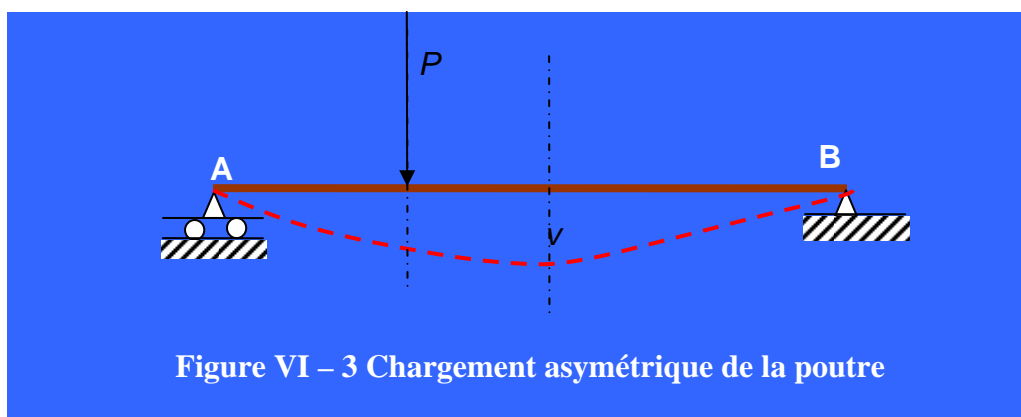


Figure VI – 3 Chargement asymétrique de la poutre

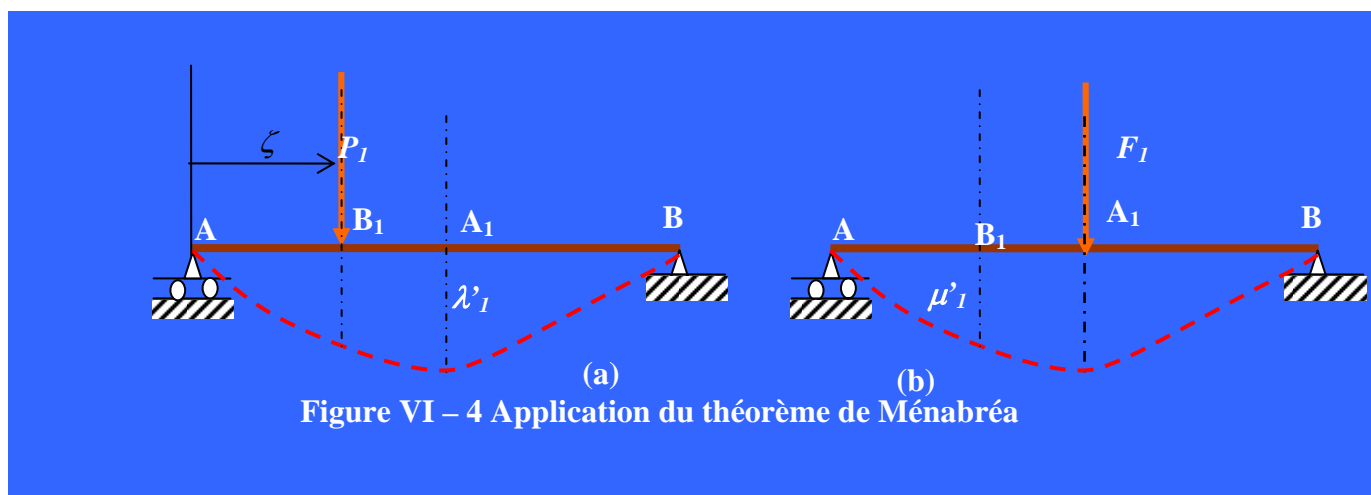
Le calcul de la flèche pour un cas non symétrique nécessite de nombreuses intégrations fastidieuses. Nous allons faciliter ce calcul en utilisant le théorème de Maxwell-Betti. L'équation différentielle s'écrit :

$$v''(x_1) = \frac{M(x_1)}{EI} \quad (\text{VI-10})$$

D'après le théorème Maxwell-Betti, il vient : $\lambda'_1 F_1 = \mu'_1 P_1$

Il nous suffit donc pour calculer $v = \lambda'_1$ de déterminer μ'_1

Nous allons modifier le schéma précédent pour intégrer les nouvelles notations.



On étudie donc le cas (b).

Par symétrie nous avons donc $R_A = R_B = \frac{F_1}{2}$

On en déduit le moment fléchissant sur (AA₁) :

$$M(x) = \frac{Fx}{2} \quad (\text{VI-11})$$

D'où l'expression :

$$\begin{aligned} v''(x) &= \frac{Fx}{2EI} \\ v'(x) &= \frac{Fx^2}{4EI} + C \end{aligned} \quad (\text{VI-12})$$

Par symétrie :

$$v'(l/2) = 0 = \frac{Fl^2}{16EI} + C \Rightarrow C = -\frac{Fl^2}{16EI} \quad (\text{VI-13})$$

$$v'(x) = \frac{F}{4EI} \left(x^2 - \frac{l^2}{4} \right) \quad (\text{VI-14})$$

Par intégration, il vient :

$$v(x) = \frac{F}{4EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{l^2}{4}x + D \right) \quad (\text{VI-15})$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow v(x) = \frac{F}{4EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{l^2}{4}x \right)$$

On en déduit :

$$\mu'_1 = v(\zeta) = \frac{F_1 \zeta}{48EI} (4\zeta^2 - 3l^2) \quad (\text{VI-16})$$

D'après Maxwell-Betti :

$$\lambda'_1 = \frac{\mu'_1 P_1}{F_1} = \frac{P_1 \zeta}{48EI} (4\zeta^2 - 3l^2) \quad (\text{VI-17})$$

La flèche recherchée est donc donnée par :

$$v = \frac{P_1 \zeta}{48EI} (4\zeta^2 - 3l^2) \quad (\text{VI-18})$$

4 – Théorème de Castigliano

Ce théorème est un outil pour la résolution des systèmes hyperstatiques des milieux curvilignes.

Enoncé du théorème :

Soit une structure élastique linéaire, contrainte à partir d'un état naturel au repos soumise à un système de forces généralisées \underline{F}_i ($i = 1, n$) dont les déplacements sont λ_i ($i = 1, n$). Si W désigne l'énergie de déformation, alors :

$$\lambda_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} \quad (i = 1, n) \quad (\text{VI-19})$$

Démonstration :

Considérons à nouveau un solide soumis à un système de forces généralisées \underline{F}_i ($i = 1, n$).

L'application de ce système de forces a pour conséquence de produire une énergie de déformation W_i . Pour la seule force F_i , on provoque un accroissement infinitésimal dF_i .

L'énergie de déformation subit alors une variation $\frac{\partial W_i}{\partial F_i} dF_i$ amenant l'énergie de déformation

à une valeur :

$$(W_i)_{final} = W_i + \frac{\partial W_i}{\partial F_i} dF_i \quad (\text{VI-20})$$

Considérons le même chargement final mais en inversant l'ordre d'application des chargements ce qui ne modifie pas l'énergie final totale.

On applique d'abord la seule force élémentaire dF_i . Elle produit dans sa direction un déplacement infiniment $d\lambda_i$. l'accroissement d'énergie correspondant est $\frac{1}{2}dF_i d\lambda_i$.

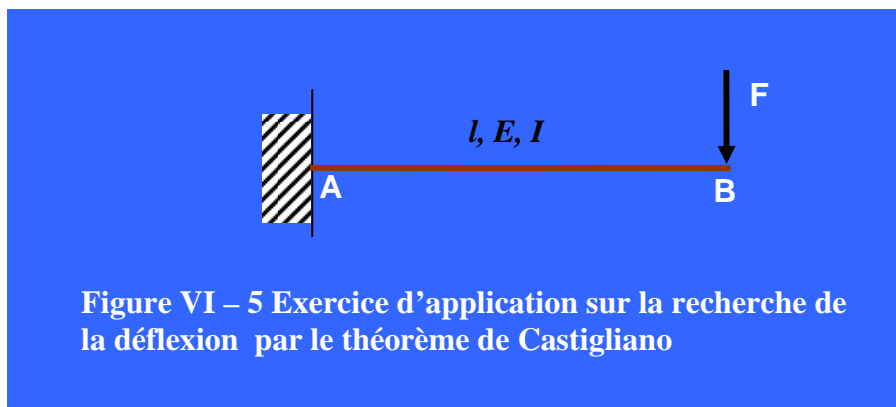
On applique ensuite les n autres forces F_i ($i = 1, n$). L'énergie de déformation accumulée dans l'application de ces forces est comme précédemment W_i . Néanmoins, la force dF_i qui est constante lors de l'application des autres forces fournit un travail supplémentaire dans le déplacement induit par celle-ci : $dF_i \lambda_i$. L'énergie totale est donc :

$$(W_i)_{final} = W_i + dF_i \lambda_i + \frac{1}{2} dF_i d\lambda_i \quad (\text{VI-21})$$

L'énergie de déformation ne dépend que de l'état initial et de l'état final. Nous pouvons égaliser les deux expressions obtenues précédemment. ce qui donne en négligeant les termes du second ordre, l'expression annoncée dans le théorème de Castigliano :

$$\lambda_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} \quad (i = 1, n) \quad (\text{VI-22})$$

Application : Calcul de la flèche.



On désire calculer la flèche au point B.

Calculons l'énergie de déformation à l'aide des formules de Clapeyron :

$$W_i = \int_{(AB)} \frac{1}{2E} \left[\frac{M^2}{I_3} \right] ds \quad (\text{VI-23})$$

Le calcul donne alors :

$$W_i = \int_{(AB)} \frac{1}{2E} \left[\frac{M^2}{I_3} \right] ds = \frac{F^2 l^3}{2EI} \quad (\text{VI-24})$$

$$v_B = \frac{\partial W_i}{\partial F} = \frac{Fl^3}{EI}$$

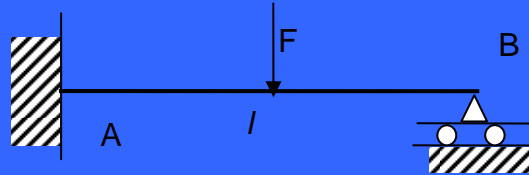


Figure VI – 6 Exercice d'application sur la recherche des inconnues hyperstatique par le théorème de Castigliano

Calcul d'une inconnue hyperstatique du cas de la figure VI-6.

Nous avons à faire à un système hyperstatique d'ordre 1 (inconnues Y_A , Y_B , M_A) et deux équations disponibles.

$$Y_A = F - Y_B$$

$$M_A = \frac{Fl}{2} - lY_B \quad (\text{VI-25})$$

Le moment fléchissant a deux expressions dans les deux travées :

- $M(x) = (F - Y_B)x + \frac{l}{2}(2Y_B - F)$ pour $0 \leq x \leq l/2$
- $M(x) = -Y_B x + lY_B$ pour $l/2 \leq x \leq l$

L'énergie de déformation de la structure s'exprime par :

$$W_i = \int_{(AB)} \frac{1}{2E} \left[\frac{M^2}{I_3} \right] ds = \int_0^{l/2} \frac{1}{2EI} \left[(F - Y_B)x + \frac{l(2Y_B - F)}{2} \right]^2 ds + \int_{l/2}^l \frac{1}{2EI} [Y_B(-x+l)]^2 ds \quad (\text{VI-26})$$

Ce qui donne :

$$W_i = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} Y_B l^3 + \frac{1}{2} F^2 l^3 - \frac{5}{24} Y_B F l^3 \right] \quad (\text{VI-26})$$

Appliquons le théorème de Castigliano à la composante Y_B :

$$\lambda_B = 0 = \frac{1}{2EI} \left(\frac{2}{3} Y_B l^3 - \frac{5}{24} F l^3 \right) \quad (\text{VI-27})$$

Ce qui donne une des inconnues hyperstatique :

$$Y_B = \frac{5}{16} F \quad (\text{VI-28})$$

et par conséquent les autres inconnues :

$$Y_A = \frac{11}{16} F$$
$$M_A = \frac{3}{16} Fl \quad (\text{VI-29})$$

ANNEXE – Modélisation des actions mécaniques et description de liaisons de base

1 - Classification des actions mécaniques

On classe les actions mécaniques selon leur mode d'action et leur nature. On distingue ainsi :

- les actions mécaniques qui s'exercent à distance telle l'action de la pesanteur et l'action d'un champ magnétique.
- les actions mécaniques de contact (l'action de l'eau sur une paroi de barrage - force de pression)

Les deux types d'actions peuvent s'exercer sous forme d'action ponctuelle, c'est-à-dire en un point de l'espace. Cette hypothèse est physiquement difficile à réaliser. On modélise cependant souvent des forces s'appliquant en un point du système par un vecteur force appliquée en ce point. Ce mode d'action est alors associé à un vecteur lié et donc sa représentation peut être faite à l'aide d'un glisseur (voir Annexe 2 en fin de cours).

L'ensemble des actions évoquées précédemment sont modélisées par des torseurs associés à des densités de force (sauf pour ce qui est de la force ponctuelle).

Nous allons successivement examiner les actions mécaniques à densité volumique de force puis surfacique ou linéique.

Action mécanique à densité volumique de force.

Considérons un système matériel (Σ) continu occupant un volume V de l'espace à trois dimensions. Chaque élément de volume dV autour d'un point courant M peut être sollicité par une force \underline{dF} . Cette force est supposée proportionnelle au volume de l'élément considéré :

$$\underline{dF} = \underline{r}dV \quad (1)$$

Nous avons donc un glisseur associé au vecteur lié (M, \underline{dF}) .

On peut en déduire la densité de force volumique :

$$\underline{r} = \frac{dF}{dV} \quad (2)$$

\underline{r} est donc un vecteur densité volumique de force.

En mécanique des milieux continus, on se ramène à des grandeurs locales et l'on écrit :

$$\underline{r} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dF}{dV} \quad (3)$$

L'ensemble de ces forces \underline{dF} appliquées sur chaque élément de volume entourant le point courant M constitue un ensemble de glisseurs associés aux vecteurs liés (M, \underline{dF}) . L'ensemble de ces glisseurs constituent un torseur de résultante :

$$\underline{R} = \iiint_{(V)} \underline{r}(M) dV \quad (4)$$

et de moment en un point A quelconque :

$$\underline{M}_A = \iiint_{(V)} \underline{AM} \wedge \underline{r}(M) dV \quad (5)$$

Remarque : On peut aisément vérifier que cet ensemble de vecteur est bien un torseur. Il suffit pour cela d'écrire cette formulation en passant par un point B quelconque :

$$\begin{aligned} \underline{M}_A &= \iiint_{(V)} (\underline{AB} + \underline{BM}) \wedge \underline{r}(M) dV = \underline{AB} \wedge \iiint_{(V)} \underline{r}(M) dV + \iiint_{(V)} \underline{BM} \wedge \underline{r}(M) dV \\ &= \underline{M}_B + \underline{AB} \wedge \underline{R} \end{aligned} \quad (6)$$

On se retrouve bien avec la forme d'un champ antisymétrique.

Exemple particulier : Champ de pesanteur uniforme.

La pesanteur terrestre agit sur l'ensemble des milieux matériels par l'intermédiaire d'une force à distance qui agit sur l'ensemble du milieu et donc sur le volume de matière constituant le milieu en question. Nous avons donc une action à densité volumique. Chaque élément de volume est de ce fait soumis à une force de la forme :

$$\underline{dF} = \underline{r} dV = \rho \underline{g} dV \quad (7)$$

Dans ce cas la densité volumique de force est défini par :

$$\underline{r} = \rho \underline{g} \quad (8)$$

Le torseur ainsi constitué pour tout le volume V a pour résultante :

$$\underline{R} = \iiint_{(V)} \rho(M) \underline{g} dV = m \underline{g} \quad (9)$$

cette résultante représente le poids du système.

m étant la masse totale du système.

Son moment en un point A est défini de la manière suivante :

$$\underline{M}_A = \underline{M}_G + \underline{AG} \wedge \underline{R} = \underline{AG} \wedge m \underline{g} \quad (10)$$

Cette dernière expression est justifiée si l'on remarque que :

$$\underline{M}_G = \iiint_{(V)} \underline{GM} \wedge m \underline{g} dV = \underline{0} \quad (11)$$

par définition du centre de masse G .

Le torseur associé aux forces réparties de pesanteur de densité $\underline{r} = \rho \underline{g}$ est donc un glisseur associé au vecteur lié $(G, m \underline{g})$.

Actions mécaniques à densité surfacique (ou linéique)

La même démarche peut-être suivie lorsqu'on traite des actions mécaniques à densité surfacique (ou linéique) :

Figure I - 1 : Force de volume

Nous reprenons pour cela le solide (Σ) de frontière (S) . Chaque élément de volume dS autour d'un point courant M de (Σ) peut être sollicité par une force :

$$\underline{dF} = \underline{r} dS \quad (12)$$

Nous avons donc un glisseur associé au vecteur lié (M, \underline{dF}) .

On peut en déduire la densité surfacique (ou linéique) de force:

$$\underline{r} = \frac{\underline{dF}}{dS} \quad (13)$$

\underline{r} est donc un vecteur densité surfacique de force.

Comme pour les forces à densité volumique on se ramène à des grandeurs locales et l'on écrit :

$$\underline{r} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF}{dS} \quad (14)$$

L'ensemble de ces forces dF appliquées sur chaque élément de surface (ou de ligne) entourant le point courant M constitue un ensemble de glisseurs associés aux vecteurs liés (M, dF) . L'ensemble de ces glisseurs constituent un torseur de résultante :

$$\underline{R} = \iiint_{(S)} \underline{r}(M) dS \quad (15)$$

et de moment en un point A quelconque ::

$$\underline{M}_A = \iiint_{(S)} \underline{AM} \wedge \underline{r}(M) dS \quad (16)$$

Remarque : Ici aussi on peut vérifier que cet ensemble de vecteur est bien un torseur. Il suffit pour cela d'écrire cette formulation en passant par un point B quelconque :

$$\begin{aligned} \underline{M}_A &= \iiint_{(S)} (\underline{AB} + \underline{BM}) \wedge \underline{r}(M) dS = \underline{AB} \wedge \iiint_{(S)} \underline{r}(M) dS + \iiint_{(S)} \underline{BM} \wedge \underline{r}(M) dS \\ &= \underline{M}_B + \underline{AB} \wedge \underline{R} \end{aligned} \quad (17)$$

On se retrouve bien avec la forme d'un champ antisymétrique.

3 – Les liaisons

Degrés de liberté

Un degré de liberté est un mouvement de base pour un solide en mouvement dans un référentiel. Une rotation autour d'un axe est un degré de liberté, une translation suivant une direction est aussi un degré de liberté. En somme un solide peut posséder 6 degrés de liberté

au maximum. Ce sont les 3 paramètres de positions d'un point du solide et les 3 rotations possible du solide.

Définition d'une liaison

Une liaison est un dispositif entre deux solides permettant de limiter le nombre de degrés de liberté. Ces liaisons peuvent être associées à des mouvements de translation suivant une direction ou bien à des mouvements de rotation autour d'un point. On distingue ainsi des liaisons glissière, rotule, pivot, pivot glissant...

Liaisons unilatérales ou bilatérales

Lorsqu'une liaison est permanente on dit que la liaison est bilatérale. Dans le cas contraire la liaison est unilatérale. Une vis dans un écrou constitue une liaison bilatérale, tandis que le contact d'une bille sur un plan est une liaison unilatérale.

5 - Différents types de liaisons

Liaison glissière

On dit qu'une liaison entre deux solides est une liaison glissière si le seul mouvement permis entre les deux solides est un mouvement de translation suivant une direction liée à un des deux solides.

Nous avons alors un seul degré de liberté associé au mouvement relatif des deux solides.

La caractérisation cinématique de la liaison est donnée par le torseur cinématique suivant :

$$\{C_{1/2}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\Omega}_{12} = \vec{0} \\ \underline{V}_A = \dot{\lambda} \underline{x} \end{array} \right\} \text{ si la direction de mobilité est suivant la direction } \vec{x}$$

Le torseur de l'action du solide (S₁) sur le solide (S₂) est de la forme :

$$\{A_{(S1) \rightarrow (S2)}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}_P = Y_{12} \underline{y} + Z_{12} \underline{z} \\ \underline{M}_{A,12} = L_{12} \underline{x} + M_{12} \underline{y} + N_{12} \underline{z} \end{array} \right\} \quad (\text{I-27})$$

Liaison pivot

Deux solides sont en liaisons pivot si le seul mouvement relatif permis est un mouvement de rotation autour d'un axe de l'un des deux solides.

Là aussi nous avons un seul degré de liberté.

Le torseur cinématique associé à cette liaison est le suivant :

$$\{C_{1/2}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\Omega}_{12} = \alpha \underline{x} \\ \underline{V}_O = \underline{0} \end{array} \right\} \quad (\text{I-28})$$

Le torseur des actions mutuelles entre les deux solides est donné par :

$$\{A_{(S1) \rightarrow (S2)}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}_{12} = X_{12} \underline{x} + Y_{12} \underline{y} + Z_{12} \underline{z} \\ \underline{M}_{A,12} = M_{12} \underline{y} + N_{12} \underline{z} \end{array} \right\} \quad (\text{I-29})$$

Liaison pivot glissant

Deux solides sont en liaisons pivot glissant si le seul mouvement relatif permis est un mouvement de rotation autour d'un axe lié à un des deux solides combiné à un mouvement de translation suivant le même axe..

Le mouvement relatif entre les deux solides est caractérisé par deux degrés de libertés.

Le torseur cinématique associé à cette liaison est le suivant :

$$\{C_{1/2}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\Omega}_{12} = \alpha \underline{x} \\ \underline{V}_O = \lambda \underline{x} \end{array} \right\} \quad (\text{I-30})$$

Le torseur des actions mutuelles entre les deux solides est donné par :

$$\{A_{(S1) \rightarrow (S2)}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}_{12} = Y_{12} \underline{y} + Z_{12} \underline{z} \\ \underline{M}_{A,12} = M_{12} \underline{y} + N_{12} \underline{z} \end{array} \right\} \quad (\text{I-31})$$

Tableau des liaisons

Torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite (Source L. Granjon))

Désignation de la liaison	Schématisme spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié
Pivot d'axe (A, \vec{X})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \vec{y}, \vec{z}) $_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$
Glissière d'axe (A, \vec{X})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} Tx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{z}) $_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$
Pivot glissant d'axe (A, \vec{X})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} Tx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \vec{y}, \vec{z}) $_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$
Appui plan de normale (A, \vec{X})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 \\ Ty \\ Tz \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & M_{12} \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{y}) $_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}$
Rotule de centre A		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ Ry \\ Rz \end{vmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{y}) $_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Linéaire annulaire d'axe (A, \vec{X})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} Tx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ Ry \\ Rz \end{vmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{z}) $_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$
Linéaire rectiligne de normale (A, \vec{X}) et de contact (A, \vec{y})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 \\ Ty \\ Tz \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ Ry \\ 0 \end{vmatrix}$	$_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{z}) $_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

BIBLIOGRAPHIE**Résistance des Matériaux****M. Kerguignas, G. Caignaert****Ed. DUNOD****Mécanique des Milieux Continus Tome 2****J. Salençon****Ed. ELLIPSES****Résistance des Matériaux****P. Agati, F. Lerouge, M Rosetto****Ed. DUNOD****Site WEB****Laurent GRANJON****<http://laurent.granjon.free.fr/>****Jérôme BASTIEN****<http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/>****ASSOCIATION LIBRE COURS****<http://www.librecours.org/cgi-bin/main>****IMAGES ET REPRESENTATIONS A PARTIR DE :****<http://images.google.fr/>****www.crea-technologie.com**