LU1MA003 - Constructions et raisonnements mathématiques

Devoir sur table du 05/04/2023

Durée : 1h

Documents et outils électroniques interdits.

Exercice 1 (Méthode du point milieu)**.**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $\sigma = \{x_0 = a < \cdots < x_n = b\}$ la subdivision régulière qui partage le segment $[a, b]$ en n intervalles égaux de longueur $h = (b-a)/n$.

Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ fixé. On note x'_i le point milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$: $x'_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

a) On considère la fonction $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-2\}, \forall x \in [x_i, x_{i+1}[: \phi(x) = f(x'_i), \text{ et } \forall x \in [x_{n-1}, x_n] : \phi(x) = f(x'_n).$$

Montrer que ϕ définie une fonction en escalier sur $[a, b]$ et calculer son intégrale sur $[a, b]$.

b) Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ fixé. Montrer que $\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \exists\, c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que :

$$f(x) = f(x'_i) + (x - x'_i) f'(x'_i) + \frac{(x - x'_i)^2}{2} f''(c_i).$$

c) Établir que $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$: $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - x'_i\right)\, dt = 0.$

d) En déduire que $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$: $\displaystyle\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(t) - f(x'_i)\right)\, dt\right| \leq \frac{M_2}{2}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - x'_i\right)^2\, dt\right|$,
où $M_2 = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.

e) Montrer que $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$: $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - x'_i\right)^2\, dt = \frac{h^3}{12}.$

f) En déduire que :

$$\left|\int_a^b f(t)\, dt - \int_a^b \phi(t)\, dt\right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{24 n^2}.$$

Exercice 2. Soit σ la subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ introduite dans l'exercice 1. De même, soit x'_i le point milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. On définit l'ensemble des fonctions V_h par :

$$V_h = \left\{v_h \in \mathbb{R}^{[a,b]}, \forall i = 0, \ldots, n-2, \forall x \in [x_i, x_{i+1}[, v_h(x) = v_h(x'_i), \text{ et} \forall x \in [x_{n-1}, x_n], v_h(x) = v_h(x'_n)\right\}.$$

a) Tracer le graphe d'une fonction v_h appartenant à V_h.

b) Démontrer que V_h est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

c) On introduit les fonctions $\left(\varphi_i\right)_{i=0,n-1}$ définies sur $[a, b]$ par :

— Si $i \in \{0, \ldots, n-2\}$: $\varphi_i(x) = 1$, $\forall x \in [x_i, x_{i+1}[$, 0 sinon,

— Si $i = n-1$: $\varphi_{n-1}(x) = 1$, $\forall x \in [x_{n-1}, x_n]$, 0 sinon.

Montrer que la famille $(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1})$ est libre.

d) Soit $v_h \in V_h$. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $v_h = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi_i$.
(*On exprimera λ_i en fonction de v_h et de x'_i*).

e) En déduire que la famille $(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1})$ est une base de V_h dont on déterminera la dimension.