Corrigé de la feuille 4 : suites récurrentes

Exercice 1.

(a) Si (u_n) tend vers ℓ, (u_{n+1}) aussi et donc en passant à la limite dans la relation de récurrence, on trouve $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

(b) Avec $\ell = a\ell + b$, on trouve, pour $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = av_n$. Donc (v_n) est une suite géométrique de raison a.

(c) Si $u_0 = \ell$, $v_0 = 0$, donc la suite géométrique (v_n) est nulle et (u_n) est constante à la valeur ℓ, quel que soit le paramètre a. Supposons $u_0 \neq \ell$.

Si $|a| < 1$, (v_n) converge vers 0, donc (u_n) converge vers ℓ. Réciproquement, si (u_n) converge, c'est vers ℓ d'après (a), donc la suite géométrique (v_n) tend vers 0 et cela correspond à une raison $a \in]-1, 1[$. Dans le cas $u_0 \neq 0$, la suite (u_n) converge donc si et seulement si $|a| < 1$.

(d) La suite (u_n) en question vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{9}(1 - u_n).$$

(à chaque étape, on colorie 1/9 de chaque carré blanc, donc 1/9 de l'aire non coloriée). On est donc dans la situation ci-dessus avec $a = 8/9$ et $b = 1/9$. Puisque $|a| < 1$, (u_n) converge vers $\dfrac{b}{1-a} = 1$.

Exercice 2. On introduit les suites $(x_n = \mathrm{Re}(u_n))$ et $(y_n = \mathrm{I}m(u_n))$. Elles vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{5}x_n \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = y_n.$$

Donc (y_n) est constante, à la valeurs $y_0 = \mathrm{I}m(u_0)$. Et (x_n) est géométrique de raison 1/5 donc converge vers 0. On en déduit que (u_n) converge vers $i\mathrm{I}m(u_0)$.

Exercice 3.

(a) La fonction $f : x \mapsto x^2 + 2$ est bien définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc la suite récurrente est bien définie.

(b)

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = x^2 - x + 2$. On reconnaît un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = -7 < 0$. Comme son coefficient dominant est $1 > 0$, il reste strictement positif sur $\mathbb{R}$. Cela prouve que $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : (u_n) est strictement croissante.

(d) La suite étant croissante, elle admet une limite ℓ, réelle ou $+\infty$. Si ℓ est finie, par passage à la limite dans la relation de récurrence, $f(\ell) - \ell = 0$. Or on vient de voir, au (c), que cette équation n'admet aucune solution réelle. Donc (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 4.

(a) La fonction sinus est bien définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc la suite récurrente est bien définie.

(b)

(c) Pour $x \in [0,1] \subset [0, \pi/2]$, $\sin x \in [0,1]$.

(d) La fonction $g : x \mapsto \sin x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g' = \cos -1 \leq 0$. Donc g est décroissante. Et $g(0) = 0$. Donc $g \leq 0$ sur $[0,1]$. Par (c), la suite (u_n) reste dans $[0,1]$, donc ce calcul donne $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leq 0$ pour tout indice n : (u_n) est décroissante.

(On peut aussi utiliser la concavité de sinus sur $[0,1]$ pour voir que g y est négative, cf. feuille 3.)

(e) Puisque (u_n) est décroissante minorée (par 0), (u_n) converge. Sa limite ℓ appartient à l'intervalle fermé stable $[0,1]$ et elle vérifie $g(\ell) = 0$ par continuité de g. Sur $]0,1[$, $g' = 1 - \cos < 0$ donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$. Et $g(0) = 0$, donc g ne s'annule qu'en 0. Cela prouve (u_n) converge vers 0.

Exercice 5.

(a) Si $a < -1$, $\sqrt{a-1}$ n'est pas défini donc la suite n'est pas définie. Si $a \geq -1$, u_1 est bien défini et c'est un nombre positif. Or l'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stabilisé par la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$. Donc la suite (u_n) est bien définie si $a \geq -1$.

(b) Par continuité de f sur l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+$, si (u_n) converge vers ℓ, $f(\ell) = \ell$. Le nombre positif ℓ est alors une solution de $\ell^2 - \ell - 1 = 0$. Ce trinôme admet comme racines $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La seule racine positive est $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) On peut observer que la fonction f est croissante. D'après le cours, la suite (u_n) est donc toujours monotone et son sens de variation dépend de la position de $u_1 = \sqrt{a+1}$ par rapport à $u_0 = a$.

Si $a \geq \ell$, a se situe à droite de la second racine du trinôme étudié au (b), donc $a^2 - a - 1 \geq 0$ et $u_1 \leq u_0$: (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc converge et ce ne peut être que vers ℓ.

Si $-1 \leq a < \ell$, on a $u_1 \geq u_0$ (comme $u_1 \geq 0$, c'est clair si $a = u_0 \leq 0$; et si $a \in [0, \ell[$, a est situé entre les racines du trinôme du (b), donc $a^2 - a - 1 \leq 0$, ce qui implique l'inégalité voulue). Dans ce cas, (u_n) est croissante. On peut remarquer que si $-1 \leq x \leq \ell$, $0 \leq f(x) = \sqrt{x+1} \leq \sqrt{\ell+1} = \ell$, ce qui prouve que $[-1, \ell]$ est stable, de sorte qu'ici, (u_n) restera majorée par ℓ. Donc (u_n), croissante et majorée, converge, vers ℓ par nécessité.

Exercice 6.

(a)

(b) Soit $x \in [1/2, 2]$. En particulier, $x \neq -1$, donc $f(x)$ est bien défini. Par décroissance de f sur $]-1, +\infty[$, on a

$$\frac{2}{3} = f(2) \leq f(x) \leq f(1/2) = \frac{4}{3}.$$

Donc $f(x)$ est dans l'intervalle $[1/2, 2]$. Cet intervalle est donc stable.

(c) Puisque 2 est dans cet intervalle, on en déduit que (u_n) est une suite bien définie et restant dans cet intervalle. Par continuité de f sur cet intervalle fermé, si (u_n) converge vers ℓ, ℓ est un élément de $[1/2, 2]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$. C'est donc une solution de $\ell^2 + \ell - 2 = 0$. Ce trinôme a pour racines 1 et -2. La seule possibilité de limite dans l'intervalle voulu est $\ell = 1$.

(d) La fonction f est dérivable sur $[1/2, 2]$, avec $|f'(x)| = 2/(1+x)^2$ pour x dans cet intervalle. Par décroissance de $|f'|$, $|f'| \leq |f'(1/2)| = 8/9$ sur cet intervalle. La fonction f y est donc contractante. Cela assure donc la convergence de (u_n) vers la seule limite possible, 1, avec de plus l'estimée

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n |u_0 - 1| = \left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

(e) Par décroissance de f, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens opposé. On calcule : $u_0 = 2$, $u_1 = 2/3$ et $u_2 = 6/5 < u_0$. Ainsi, (u_{2n}) est décroissante et donc (u_{2n+1}) est croissante.

Exercice 7.

(a) Soit $x > 0$. On utilise l'identité remarquable $A^2 + B^2 - 2AB = (A - B)^2 \geq 0$ avec $A = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$ et $B = \sqrt{\dfrac{a}{2x}}$:

$$\frac{x}{2} + \frac{a}{2x} - \sqrt{a} \geq 0.$$

Par récurrence immédiate, puisque $u_0 > 0$, la suite (u_n) reste strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut donc poser $x = u_n$ et en déduire

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \geq 0.$$

Cela prouve que pour $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$.

(b) Pour $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{a}{2u_n} - \frac{u_n}{2} = \frac{a - u_n^2}{2u_n} \leq 0$$

par (a). Donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

(c) Par (a) et (b), $(u_n)_{n \geq 1}$ est minorée et décroissante, donc convergente, vers une limite ℓ, qui est dans l'intervalle fermé et stable $[\sqrt{a}, +\infty[$. Par continuité de $x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{a}{2x}$ sur cet intervalle,

$$\frac{\ell}{2} + \frac{a}{2\ell} = \ell,$$

soit $\ell^2 = a$, puis $\ell = \sqrt{a}$, puisque ℓ est positive.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\epsilon_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$, de sorte que

$$\epsilon_{n+1} = \frac{\frac{u_n}{2} + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{4u_n\sqrt{a}} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{4u_n\sqrt{a}}.$$

On minore ensuite u_n par $\sqrt{a}$ dans le dénominateur pour trouver

$$\epsilon_{n+1} \leq \epsilon_n^2.$$

Etant donné $N \in \mathbb{N}^*$, par récurrence, on en tire :

$$\forall n \geq N, \quad \epsilon_n \leq (\epsilon_N)^{2^{n-N}}.$$

Puisque (ϵ_n) tend vers 0, on peut fixer N pour que $\epsilon_N \leq 1/10$. Alors :

$$\forall n \geq N, \quad \epsilon_n \leq C\ 10^{-2^n},$$

avec $C = 10^{2^N}$. Cela prouve $u_n - \sqrt{a} = O(10^{-2^n})$ quand $n \to +\infty$.