# Correction de la feuille 7 : applications linéaires

**Exercice 1.**

(a) Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$f(\lambda P + Q) = \lambda P(2) + Q(2) = \lambda f(P) + f(Q).$$
Donc $f$ est linéaire.

(b) $g(2X) = 4X^2 \neq 2X^2 = 2g(X)$ , donc $g$ n'est pas linéaire.

(c) Pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\operatorname{Tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B).$$
Donc Tr est linéaire.

(d) Si $n \geq 2$, $\det(2I_n) = 2^n \neq 2 = 2\det(I_n)$ , donc det n'est pas linéaire. Si $n = 1$, det est l'application identité de $\mathbb{R}$, donc det est linéaire.

**Exercice 2.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $f = f_A$. Donc $f$ est linéaire. C'est un isomorphisme si et seulement si le système linéaire $f(X) = AX = B$ admet une unique solution $X$ pour tout $B \in \mathbb{R}^3$. On cherche donc à inverser $A$, par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & -12 & -3 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3, L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2)$$

Comme on a pu obtenir la matrice $I_3$ à gauche, la matrice $A$ est inversible et son inverse $A^{-1}$ est la matrice en bas à droite. Cela prouve que $f$ est un isomorphisme. En outre, sa réciproque est $f_{A^{-1}}$ (l'équation $X = f^{-1}(B)$ signifie $f(X) = B$, soit $AX = B$ ou encore $X = A^{-1}B$, de sorte que $f^{-1}(B) = A^{-1}B$). Donc la réciproque de $f$ est donnée par :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x, y, z) = (-24x + 18y + 5z, 20x - 15y - 4z, -5x + 4y + z).$$

**Exercice 3.**

(a) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est de déterminant $-2 \neq 0$ donc elle est inversible. Son noyau est donc $\{0\}$, de dimension 0, et son image est $\mathbb{R}^2$, de dimension 2. Une base du noyau est la famille vide, une base de l'image est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, par exemple.

(b) On applique l'algorithme du pivot de Gauss au système linéaire $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b-4a \\ c-2a \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ \frac{b-4a}{7} \\ -2a+b-c \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2, \text{puis } L_2 \leftarrow \frac{L_2}{7})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{-a+2b}{7} \\ \frac{b-4a}{7} \\ -2a+b-c \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2)$$

Comme la matrice obtenue à gauche est échelonnée réduite, on en déduit tout. Il y a 2 pivots, donc l'image est de dimension 2 et le noyau de dimension 3-2=1. L'image est l'ensemble des $(a, b, c)$ tels que $-2a + b - c = 0$. Elle contient par exemple les deux premières colonnes de $A$, qui ne sont pas colinéaires : comme l'image est de dimension 2, une base de l'image est donc $((1, 4, 2), (-2, -1, 3))$. Quant au noyau, c'est l'ensemble des $(x, y, z)$ tels que $x+\frac{5z}{7} = 0$ et $y-\frac{8z}{7} = 0$, c'est-à-dire $\{(-5t, 8t, 7t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Une base du noyau est donc $((-5, 8, 7))$.

(c) On effectue l'algorithme du pivot de Gauss sur le système linéaire $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & -4 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$. Pour écourter le calcul, on cherche seulement une forme échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & -4 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -6 & -8 \\ 0 & -7 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & -6 & -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b-5a \\ c+3a \\ d-6a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b-5a \\ -2a+b+c \\ -a-b+d \end{pmatrix} \qquad (L_3 \leftarrow L_3+L_2, L_4 \leftarrow L_4-L_2)$$

On trouve donc 3 pivots : l'image est de dimension 3 et le noyau de dimension 4-3=1. L'image est l'ensemble des $(a,b,c,d)$ tels que $-a-b+d=0$. Elle contient donc les vecteurs de la famille $((1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,0))$, qui est libre et compte 3 éléments : c'est donc une base de l'image. Le noyau est l'ensemble des $(x,y,z,t)$ tels que $x-y+z+t=0$, $7y-6z-8t=0$ et $-3t=0$, c'est-à-dire $\{(-s,6s,7s,0) \mid s \in \mathbb{R}\}$. Une base du noyau est $((-1,6,7,0))$.

(d) Pour étudier la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on peut suivre la même méthode... ou observer que les trois premières colonnes de $A$ sont linéairement indépendantes (vérification rapide) ; ce sont des éléments de l'image, donc l'image est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension au moins 3 : l'image est $\mathbb{R}^3$ tout entier. Le théorème du rang dit alors que le noyau est de dimension $4-3=1$. Et on voit que $(1,1,1,-4)$ est un élément non nul du noyau de $A$ (si on ne le voit pas, on résout le système $AX=0$) : une base du noyau est donc $((1,1,1,-4))$.

**Exercice 4.**

(a) Pour tous $u,v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$f(\lambda u+v) = (\lambda u_0+v_0,\dots,\lambda u_{p-1}+v_{p-1}) = \lambda(u_0,\dots,u_{p-1}) + (v_0,\dots,v_{p-1})$$

de sorte que $f(\lambda u+v) = \lambda f(u)+f(v)$. Donc $f$ est linéaire.

(b) Le noyau de $f$ est l'ensemble des suites $u$ telles que $u_0 = \cdots = u_{p-1} = 0$. Il n'est pas réduit à $\{0\}$ donc $f$ n'est pas injective.

Pour tout $(a_0,\dots,a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$, la suite $u$ définie par $u_n = a_n$ si $0 \le n \le p-1$ et $u_n = 0$ sinon vérifie $f(u) = (a_0,\dots,a_{p-1})$. Donc l'image de $f$ est $\mathbb{C}^p$. Ainsi, $f$ est surjective.

**Exercice 5.**

(a) Soit $w \in F$. Par surjectivité de $f$, il existe $v \in E$ tel que $f(v) = w$. Comme $(v_1,\dots,v_p)$ est une famille génératrice de $E$, il existe des scalaires $a_1,\dots,a_p$ tels que $v = a_1v_1 + \dots a_pv_p$. Alors :

$$w = f(v) = f(a_1v_1+\dots a_pv_p) = a_1f(v_1)+\dots a_pf(v_p).$$

Donc $(f(v_1),\dots,f(v_p))$ est une famille génératrice de $F$.

(b) Soient des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_p f(v_p) = 0$. Soit $v = \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_p v_p$. Alors :

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_p v_p) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_p f(v_p) = 0.$$

Donc $v$ est dans $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ (injectivité de $f$). Donc $v = 0$, c'est-à-dire $\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_p v_p = 0$. Comme la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre, cela veut dire que les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont tous nuls. Cela prouve que $(f(v_1), \dots, f(v_p))$ est libre.

**Exercice 6.**

(a) Le produit de deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ est bien dans $M_n(\mathbb{R})$ : $f$ envoie bien $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tous $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N).$$

Donc $f$ est linéaire et c'est finalement un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Supposons $A$ inversible. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M) = 0$. Alors $AM = 0$. En multipliant à gauche par l'inverse de $A$, on obtient $M = 0$. Le noyau de $f$ est donc trivial, donc $f$ est injective. Comme $f$ est un endomorphisme, c'est donc un isomorphisme.

Réciproquement, supposons que $f$ est un isomorphisme. Par surjectivité, il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AM = I_n$. Alors $\det A \times \det M = \det(AM) = 1$. Donc $\det A$ n'est pas nul : $A$ est inversible.

Cela prouve l'équivalence.

(c) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Notons $C_1(M), \dots C_n(M)$ ses colonnes. Alors $AM = 0$ si et seulement si $A\, C_j(M) = 0$ pour $j = 1, \dots, n$. Le noyau de $f$ est donc formé des matrices dont toutes les colonnes sont dans $\operatorname{Ker} A$.

(d) On reprend les notations ci-dessus et on les amplifie en notant

$$C : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$$

l'application définie par $C(M) = (C_1(M), \dots, C_n(M))$. Par définition des opérations sur les matrices, $C$ est linéaire. Et c'est une bijection (la donnée d'une matrice équivaut à la donnée de ses colonnes). Donc c'est un isomorphisme.

Or on a montré ci-dessus que $C(\operatorname{Ker} f) = \operatorname{Ker} A \times \cdots \times \operatorname{Ker} A$ (n fois). Puisque $C$ est un isomorphisme, la dimension de $\operatorname{Ker} f$ est donc celle du membre de droite, soit $n \operatorname{Ker} A$. Avec le théorème du rang,

$$\operatorname{rg}(f) = \dim M_n(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Ker} f = n^2 - n \dim \operatorname{Ker} A = n(n - \dim \operatorname{Ker} A).$$

**Exercice 7.**

(a) Soit $x \in E$. Alors $x = x - p(x) + p(x)$, avec $p(x) \in \operatorname{Im} p$ et

$$p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$$

donc $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$. Cela prouve : $E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$.

En outre, si $x$ est dans $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$, on a $p(x) = 0$ et $x = p(y)$ pour un vecteur $y$ de $E$. Alors $0 = p(x) = p \circ p(y) = p(y)$, donc $p(y) = 0$, i.e. $x = 0$. Cela prouve que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$ est réduit à $\{0\}$.

Donc $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

(b) Soit $x \in E$. D'après (a), on a une écriture unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Ker} p$ et $x_2 \in \operatorname{Im} p$. En fait, on a même vu ci-dessus que $x_2 = p(x)$. Ainsi, $p(x)$ est bien la composante $x_2 \in \operatorname{Im} p$ dans cette décomposition et cela prouve que $p$ est la projection sur $\operatorname{Im} p$, parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

**Exercice 8.**

(a) Pour tout $x \in E$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Donc $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{rg}(f+g) = \dim \operatorname{Im}(f+g) \leq \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g)$. Avec la formule pour la dimension d'une somme de sous-espaces, il vient alors :

$$\operatorname{rg}(f+g) \leq \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g.$$

(b) Pour tout $x \in E$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f$. Donc $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{rg}(f \circ g) \leq \operatorname{rg}(f)$.

Soit $h : \operatorname{Im} g \to E$ l'application linéaire définie par $h(y) = f(y)$ ; c'est en fait la restriction de $f$ à l'image de $g$. En lui appliquant le théorème du rang, on trouve

$$\dim \operatorname{Im} h = \dim \operatorname{Im} g - \dim \operatorname{Ker} h = \operatorname{rg}(g) - \dim \operatorname{Ker} h.$$

Les éléments de $\operatorname{Im} h$ sont exactement les $f(y)$ avec $y \in \operatorname{Im} g$, c'est-à-dire les $f(g(x))$ avec $x \in E$. Autrement dit, $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f \circ g$. L'égalité ci-dessus implique donc $\operatorname{rg}(f \circ g) \leq \operatorname{rg}(g)$. On a ainsi prouvé :

$$\operatorname{rg}(f \circ g) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)).$$

Par ailleurs, le noyau de $h$ est inclus dans celui de $f$ (par construction, si $h(y) = 0$, $f(y) = 0$ !), donc $\dim \operatorname{Ker} h \leq \dim \operatorname{Ker} f$. Le théorème du rang pour $f$ donne alors :

$$\dim \operatorname{Ker} h \leq \dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rg}(f).$$

En reportant dans l'égalité ci-dessus, il vient

$$\operatorname{rg}(f \circ g) = \dim \operatorname{Im} h = \operatorname{rg}(g) - \dim \operatorname{Ker} h \geq \operatorname{rg}(g) - n + \operatorname{rg}(f).$$

**Exercice 9.**

(a) Comme $f(1,0) = (2,0,3)$ et $f(0,1) = (7,-1,-2)$, la matrice de $f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Pour vérifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases, il suffit par exemple d'observer que les déterminants $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$ et $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} = 6$ ne sont pas nuls.

(c) Puisque $f(1,1) = (9,-1,1) = 8(1,0,0) + (1,-1,1)$ et $f(1,-1) = (-5,1,5) = -(5,-1,-5)$, la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 10.** La dérivation est une opération linéaire et elle transforme tout polynôme en un polynôme de degré plus petit, donc elle définit en particulier une application linéaire de $\mathbb{R}^3[X]$ dans $\mathbb{R}^3[X]$, i.e. un endomorphisme $D$ de $\mathbb{R}^3[X]$. Pour tout entier naturel $k$, $(X^k)' = kX^{k-1}$, donc la matrice de $D$ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 11.**

(a) Le trinôme $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ admet comme seule racine complexe 1. Une base de $E$ est donc $((1), (n))$.

(b) Pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, b \in E$,

$$f(\lambda a + b) = (\lambda a_{n+1} + b_{n+1}) = \lambda(a_{n+1}) + (b_{n+1}) = \lambda f(a) + f(b).$$

Donc $f$ est linéaire. De plus, $f((1)) = (1)$ et $f((n)) = (n+1) = (1) + (n)$ sont des éléments de $E$, donc $f$ est un endomorphisme de $E$. Et sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Par la défintion de $f$, $f(u) = (n+4)$. On peut aussi écrire $u = 3(1) + (n)$. Comme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, on en déduit $f(u) = 4(1) + (n) = (n+4)$.

**Exercice 12.**

(a) Puisque $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = -14 \neq 0$, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

(b) Comme $\deg e'_k = k$ pour $0 \leq k \leq 4$, $\mathcal{B}' = (e'_0, \ldots, e'_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 13.**

(a) On sait que $E^* = L(E, \mathbb{R})$ est de dimension $\dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = n$, donc il suffit de vérifier que la famille est libre. Soient des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^* = 0$. Pour tout entier $i$ entre 1 et $n$, on en déduit

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^*(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{ik} = \lambda_i.$$

Donc tous les coefficients $\lambda_i$ sont nuls. Cela prouve que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de $E^*$.

(b) Si on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a par linéarité :

$$e_k^*(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_k^*(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ik} = x_k.$$

(c) Pour tout $f \in E^*$, $\phi^*(f) = f \circ \phi$ est une application de $E$ dans $\mathbb{R}$ et elle est linéaire comme composée d'applications linéaires. Donc $\phi^*$ est une application de $E^*$ dans $E^*$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E^*$. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\phi^*(\lambda f + g)(x) = \lambda f(\phi(x)) + g(\phi(x)) = (\lambda(\phi^* f) + \phi^* g)(x).$$

Donc $\phi^*(\lambda f + g) = \lambda(\phi^* f) + \phi^* g$. Cela prouve que $\phi^*$ est linéaire. C'est donc un élément de $L(E^*)$.

Notons $A = (a_{ij})$ la matrice de $\phi$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et $B = (b_{ij})$ celle de $\phi^*$ dans la base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$. Ces matrices sont caractérisées par les relations suivantes : pour tout entier $j \in [1, n]$,

$$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \quad \text{et} \quad \phi^*(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i^*.$$

Soit un entier $j \in [1, n]$. Tout vecteur $x$ de $E$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec $x_i = e_i^*(x)$ pour tout indice $i$. On calcule :

$$\phi^*(e_j^*)(x) = e_j^* \circ \phi(x) = e_j^* \left( \phi \left( \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) \right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{e_i^*(x)} \underbrace{e_j^*(\phi(e_i))}_{a_{ji}}.$$

Comme c'est vrai pour tout vecteur $x$, on en déduit que $\phi^*(e_j^*) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e_i^*$.

Par identification, il vient $b_{ij} = a_{ji}$ pour tous indices $i$ et $j$. Donc $B = {}^t A$ : la matrice de $\phi^*$ est la transposée de la matrice de $\phi$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y, y' \in \mathbb{R}^n$,

$$\theta(x)(\lambda y + y') = \sum_{i=1}^{n} x_i(\lambda y_i + y_i') = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i' = \lambda\theta(x)(y) + \theta(x)(y').$$

Donc $\theta(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un élément de $(\mathbb{R}^n)^*$. De plus, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x, x', y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\theta(\lambda x + x')(y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + x_i') y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i = (\lambda\theta(x) + \theta(x'))(y).$$

Donc $\theta$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $(\mathbb{R}^n)^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\theta(x) = 0$. Alors

$$0 = \theta(x)(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Comme les $x_i^2$ sont positifs, ils sont tous nuls : $x = 0$. Cela prouve que $\theta$ est de noyau trivial, donc injective. Comme $\mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^n)^*$ ont la même dimension, $\theta$ est un isomorphisme.

**Exercice 14.**

(a) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(X+1)$ et donc $\Delta(P)$ sont dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(\lambda P + Q) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) = \lambda \Delta(P) + \Delta(Q).$$

Donc $\Delta$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T_k$ est un polynôme de degré $k$. Comme on l'a vu dans un exercice précédent, cela assure que $(T_0, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\Delta(T_k) &= \frac{(X+1)\dots(X+k-1)(X+k)}{k!} - \frac{X(X+1)\dots(X+k-1)}{k!} \\
&= \frac{(X+1)\dots(X+k-1)}{k!}(X+k-X) \\
&= \frac{(X+1)\dots(X+k-1)}{(k-1)!} \\
&= T_{k-1}(X+1).
\end{aligned}$$

(d) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(m)$ est entier pour tout entier $m$. Alors le polynôme $\Delta(P)$ vérifie la même propriété. Et par récurrence immédiate, il en de même de $\Delta^k(P) = (\Delta \circ \cdots \circ \Delta)(P)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par (b), $P = a_0 T_0 + \cdots + a_n T_n$ pour certaines réels $a_0, \dots, a_n$. En appliquant (c) à répétition et en observant que $\Delta T_0 = 0$, on obtient pour tout entier $k \in [0, n]$ :

$$\Delta^k(P) = a_k T_0(X+k) + \cdots + a_n T_{n-k}(X+k)$$

et, en particulier,

$$\Delta^k(P)(-k) = a_k T_0(0) + \cdots + a_n T_{n-k}(0) = a_k.$$

Puisque les polynômes $\Delta^k(P)$ prennent des valeurs entières aux entiers, les coefficients $a_k$ sont donc entiers.

Pour voir la réciproque, il suffit de vérifier que chaque polynôme $T_k$ prend des valeurs entières aux entiers (une combinaison linéaire à coefficients entiers des $T_k$ la vérifiera donc). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $m$,

$$T_k(m) = \frac{m(m+1)\dots(m+k-1)}{k!}.$$

On observe d'abord que $T_k(m) = 0$ si l'entier $m$ est dans $[1-k, 0]$. Pour $m \geq 1$, $T_k(m)$ est le coefficient binômial $\binom{m+k-1}{k}$, donc un entier. Reste le cas où $m$ s'écrit $m = 1-k-p$, avec $p \geq 1$. Dans ce cas, on écrit

$$T_k(m) = (-1)^k \frac{(p+k-1)(p+k-2)\dots p}{k!} = (-1)^k \binom{p+k-1}{k}$$

et on voit que c'est encore un entier. Cela prouve la réciproque.