Feuille de TD 6 : espaces vectoriels

Exercice 1. Vérifier que les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$.
(b) L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P'(7) = 0$.
(c) L'ensemble des fonctions en escalier sur $[0, 1]$.

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes ?
(a) L'ensemble des suites convergentes.
(b) L'ensemble des suites divergentes.
(c) L'ensemble des suites bornées.
(d) L'ensemble des suites réelles.
(e) L'ensemble des suites (u_n) telles que $u_n \sim 1/n$.
(f) L'ensemble des suites (u_n) telles que $u_n = o(1/n)$.
(g) L'ensemble des suites (u_n) telles que $u_n = O(1/n)$.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Prouver que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Exercice 4. On se place dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
(a) A-t-on $\sqrt{2} \in \mathrm{Vect}(1)$?
(b) A-t-on $\sqrt{3} \in \mathrm{Vect}(1, \sqrt{2})$?

Exercice 5. Pour tout réel a, on note $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Soient des réels $a_1 < \cdots < a_n$. Montrer que $(f_{a_1}, \ldots, f_{a_n})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 6. Donner une base des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivants, ainsi que leur dimension.
(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$.
(b) $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 2x + 3y + z + 4t = 0\}$.

Exercice 7. Soit $S_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$. Prouver que S_n est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

Exercice 8. Soit la subdivision $\sigma = \{0, 1, 2\}$ de $[0, 2]$. Démontrer que l'ensemble des fonctions en escalier associées à σ est un espace vectoriel de dimension 5.

Exercice 9. Avec des polynômes...

(a) Soient $P_0, \dots, P_n$ des polynômes réels tels que $\deg P_k = k$ pour $k = 0, \dots, n$. Prouver que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer que $(X+1, X-1, X^2+2X)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner les coordonnées de X^2 dans cette base.

(c) Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$, on considère le sous-ensemble A des polynômes impairs (i.e. les combinaisons linéaires de puissances impaires de X), ainsi que $B = \{XP(X) \mid P \in A\}$. Vérifier que ce sont des sous-espaces. Quelle est leur somme ?

Exercice 10. On se place dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(a) Prouver que $(\sin, \cos)$ est une famille libre.

(b) Montrer que $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe des réels A et ϕ pour lesquels on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A\sin(x + \phi).$$

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Calculer la dimension de $H_1 \cap H_2$ si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts de E.

Exercice 12. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On note F_1 l'ensemble des fonctions continues d'intégrale nulle et F_2 l'ensemble des fonctions constantes, sur $[0, 1]$.

(a) Vérifier que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E.

(b) Prouver que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

(c) Montrer que $F_1 \oplus F_2 = E$.

(d) Ecrire $f : x \mapsto xe^x$ comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.

Exercice 13. Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ pour tout indice n.

(a) Donner une base de $\mathcal{S}$.

(b) Quels sont les éléments (u_n) de $\mathcal{S}$ tels que $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$?

(c) Quelles sont les suites réelles appartenant à $\mathcal{S}$?

Exercice 14. Déterminer les suites complexes (u_n) vérifiant les relations de récurrence suivantes, avec les conditions initiales suivantes.

(a) $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$, avec $u_0 = u_1 = 1$.

(b) $u_{n+2} = (2 + 2i)u_{n+1} - 2iu_n$, avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.