LU1MA003 - Constructions et raisonnements mathématiques

Devoir sur table du 08/03/2023

Durée : 1h
Documents et outils électroniques interdits.

Exercice 1. Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 appartenant à $\mathbb{R}$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs que la fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0.
2. En utilisant uniquement cette définition, montrer que cette limite est unique.

Exercice 2. Soit A l'ensemble défini par : $A = \left\{ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right), (p, q) \in \mathbb{N}^{*2},\, p \neq q \right\}$.

1. Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble A ?
2. Préciser si ces bornes sont atteintes ou pas.

Exercice 3. Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes.

1. Déterminer, si elles existent, la limite des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$a_n = \frac{n}{2} \operatorname{Ln}\left(1 - \frac{\pi}{n}\right) \text{ et } b_n = \frac{(-1)^n + \cos(e^n)}{n}.$$
2. On considère la suite complexe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $c_n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$.

   Est-elle convergente ? Peut-on en extraire une sous-suite convergente ? (Justifier).

Exercice 4. On étudie la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n),$$
où la fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{4-x}{4+x}$, $x \neq -4$.

1. Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que f stabilise l'intervalle $[0, 4]$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie dans l'intervalle $[0, 4]$. Que pouvez-vous en conclure ?
4. Montrer que f admet un point fixe unique l dans l'intervalle $[0, 4]$, sans le déterminer.

   (On pourra, sans résoudre l'équation $x^2 + 5x - 4 = 0$ pour $x \in [0, 4]$, en évoquer des proriétés simples ainsi que celles de ses racines, et conclure à l'aide d'un théorème bien choisi).
5. Calculer $\sup\limits_{x\in[0,4]} |f'(x)|$ et déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
6. Préciser la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l, en déterminant la fonction $\varphi(n)$ telle que : $u_n - l = \mathcal{O}(\varphi(n))$, quand n tend vers $+\infty$.
7. Que peut-on dire du sens de variations des sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?