LU1MA003 - Constructions et raisonnements mathématiques

Correction du devoir sur table du 27/02/2024

Exercice 1 :

1. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta < 0, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$
2. On suppose que deux limites distinctes l et l', $(l \neq l')$, existent et satisfont la propriété ci-dessus. On obtient alors :

$$|l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| \leq 2\epsilon.$$

   Or, ϵ étant quelconque, on peut le choisir, par exemple, tel que : $4\epsilon = |l - l'|$.

   Ceci contredit l'inégalité précédente.

Exercice 2 :

1. La borne inférieure de l'ensemble A est 0. En effet 0 est un minorant de l'ensemble A et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$.

   Alors $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ et $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} \in A$.

   La borne supérieure de l'ensemble A est $\dfrac{3}{2}$. En effet, $\dfrac{3}{2}$ est un majorant de l'ensemble A et $\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} \in A$.
2. La borne inférieure de A n'est pas dans A et sa borne supérieure y est.

Exercice 3 :

1. L'étude de la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'effectue comme suit :
   — On utilise le développement limité au voisinage de l'origine :

$$a_n = \frac{n}{2}\left(-\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}.$$

   On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\dfrac{\pi}{2}$.

   — Par majoration de la valeur absolue de b_n, il vient : $|b_n| \leq \dfrac{2}{n}$.

   Le théorème des gendarmes permet de conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.
2. La suite c_n n'est pas convergente car si elle l'était, toute sous-suite le serait vers la même limite. Or, la suite extraite $c_{4n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, et la suite extraite $c_{4n+1} = i, \forall n \in \mathbb{N}$. Ceci contredit la propriété de convergence vers une limite unique.

   Par contre, la suite c_n est bornée puisque $(|c_n| = 1)$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe au moins une sous-suite de c_n qui converge. C'est bien le cas puisqu'on en a trouvé ci-dessus deux qui sont constantes, donc qui convergent.

Exercice 4 :

1. Soient α, β deux réels et une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer avec des quantificateurs les deux propriétés suivantes :

— $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ signifie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta >, \forall x \in \mathbb{R}, |x - \alpha| < \delta, |f(x) - \beta| < \epsilon.$$

— f n'est pas strictement croissante signifie :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b \text{ et }, f(a) \geq f(b).$$

2. La propriété, $\big(\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x > m\big)$, signifie que A n'est pas majoré, ou encore, que $\sup(A) = +\infty$.
3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $g(0) = 0$ et $g(x) = x^2 \cos(1/x)$ si $x \neq 0$.Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier la continuité de g'.

   Comme produit et composée de fonctions de classe C^1, g est de classe C^1, (en particulier dérivable), sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = 2x \cos(1/x) + \sin(1/x).$$

   De plus, pour $x \neq 0$, on a : $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \cos(1/x)$ avec $|x \cos(1/x)| \leq x$.

   Autrement dit, $\lim_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$, et g est dérivable en $x = 0$ avec $g'(0) = 0$.

   Par ailleurs, ayant g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, g' y est continue. Qu'en est-il en $x = 0$?

   Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par : $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$.

   Cette suite vérifie :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0 \text{ et } g'(x_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Il vient alors :

$$\lim_{n \to +\infty} g'(x_n) = 1 \neq g'(0) = 0,$$

   et on en déduit que g' n'est pas continue en $x = 0$.

4. Soient a et b deux nombres réels et $h : [-1, +1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ b - x & \text{si } \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   Pour $x \neq 0$ la fonction h est continue et dérivable.

   — <u>Continuité de h en $x = 0$</u> : Il faut garantir que $\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^+} h(x)$. Ceci se traduit ici par :

$$b = 1.$$

   — <u>Dérivabilité de h en $x = 0$</u> : Lorsque $b = 1$, h(0)=1 et :

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{h(x) - 1}{x}.$$

   on a alors :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{h(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-ax} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} -ae^{-ax} = -a,$$

où l'on a utilisé la règle de l'Hôpital.

De même, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{x} = -1$$

On en déduit pour garantir que la dérivée à gauche et à droite en $x = 0$ soient égales que $-a = -1$; donc $a = 1$.

Et finalement, h est continue et dérivable en $x = 0$ pour $a = b = 1$.