LU1MA003 - Constructions et raisonnements mathématiques

Devoir sur table du 27/02/2024

Durée : 1h

Documents et outils électroniques interdits.

Exercice 1. Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 appartenant à $\mathbb{R}$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs que la fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0.
2. En utilisant uniquement cette définition, montrer que cette limite est unique.

Exercice 2. Soit A l'ensemble défini par : $A = \left\{ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right), (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}, p \neq q \right\}$.

1. Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble A ?
2. Préciser si ces bornes sont atteintes ou pas.

Exercice 3. Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes.

1. Déterminer, si elles existent, la limite des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$a_n = \frac{n}{2} \ln\left(1 - \frac{\pi}{n}\right) \text{ et } b_n = \frac{(-1)^n + \cos(e^n)}{n}.$$

2. On considère la suite complexe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $c_n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$.

   Est-elle convergente ? Peut-on en extraire une sous-suite convergente ? (Justifier).

Exercice 4. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient α, β deux réels et une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer avec des quantificateurs les deux propriétés suivantes :
   - $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$,
   - f n'est pas strictement croissante.
2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Que signifie en termes simples la propriété suivante :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x > m\,?$$

3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $g(0) = 0$ et $g(x) = x^2 \cos(1/x)$ si $x \neq 0$.Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier la continuité de g'.
4. Soient a et b deux nombres réels et $h : [-1,+1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ b - x & \text{si } \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   Pour quelles valeurs de a et b, la fonction h est-elle dérivable sur $[-1,+1]$?
