LU1MA003 - Constructions et raisonnements mathématiques

Devoir sur table du 28/03/2024

Durée : 1h.
Toutes les réponses devront être justifiées avec soin.

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$. On va s'intéresser à la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Etudier les variations de f.

(b) Prouver que l'intervalle $[1, 2]$ est stabilisé par f.

(c) Montrer que (u_n) est croissante.

(d) Prouver que (u_n) converge vers une limite ℓ qu'on déterminera.

Exercice 2. Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes convergentes.

(a) Soit F l'ensemble des suites complexes qui converge vers 0. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Soit G l'ensemble des suites complexes constantes. Vérifier que G est un sous-espace vectoriel finiment engendré de E et déterminer sa dimension.

(c) Prouver que $E = F \oplus G$.

(d) Question indépendante de (a), (b) et (c) : prouver que E n'est pas finiment engendré.

Exercice 3. Pour tout $n \geq 1$ on considère la fonction $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x > 1/n \\ n \text{ si } x \in [0, 1/n] \end{cases}$$

(a) Vérifier que g_n est une fonction en escalier et calculer $\displaystyle\int_0^1 g_n$.

(b) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^1. Prouver rigoureusement que l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(x) g_n(x)\, dx = f(0).$$

Une méthode consiste à utiliser le théorème des accroissements finis pour exprimer $f(x)$ en fonction de $f(0)$.