Corrigé du Devoir sur Table 2

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + \dfrac{1}{4}(2 - x^2)$. On va s'intéresser à la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) La fonction f est polynômiale donc dérivable et pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{4}(-2x) = \frac{1}{2}(2 - x).$$

On en déduit que sur $[2, +\infty[$, f' est négative donc f décroissante. Et sur $]-\infty, 2]$, f' est positive donc f croissante.

(b) Par croissance de f sur $[1, 2]$, tout réel x de $[1, 2]$ vérifie

$$\frac{5}{4} = f(1) \leq f(x) \leq f(2) = \frac{3}{2}.$$

Puisque $[5/4, 3/2]$ est inclus dans $[1, 2]$, on en déduit que f stabilise $[1, 2]$.

(c) La fonction f est croissante sur l'intervalle stable $[1, 2]$ (auquel appartient bien $u_0 = 1$) donc la suite (u_n) est monotone (résultat de cours). Puisque $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = 5/4 > u_0$, on en déduit que (u_n) est croissante.

(d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 par (c) et (b). Donc elle converge vers une limite ℓ. Par continuité de f sur l'intervalle stable et fermé $[1, 2]$, ℓ est un point fixe de f appartenant à $[1, 2]$. Or $f(x) = x$ signifie $2 - x^2 = 0$, soit $x = \pm\sqrt{2}$. La seule possibilité dans l'intervalle $[1, 2]$ est $\ell = \sqrt{2}$.

Exercice 2.

(a) La suite nulle converge vers 0, donc F contient la suite nulle. De plus, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u, v \in F$, puisque (u_n) et (v_n) convergent vers 0, $(\lambda u_n + v_n)$ aussi, donc $\lambda u + v \in F$. Ceci prouve que F est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Notons $\alpha = (\alpha_n)$ la suite constante à 1 ($\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = 1$). Les suites constantes sont exactement les suites s'écrivant $(c\,\alpha_n)$ pour une constante complexe c. Autrement dit, $G = \mathrm{Vect}(\alpha)$. C'est en particulier un sous-espace vectoriel de E, (α) en est une base, G est finiment engendré et de dimension 1.

(c) Si u est dans $F \cap G$, u est une suite constante qui converge vers 0 : u est donc la suite nulle. Cela prouve que F et G sont en somme directe.

Prenons maintenant une suite $u = (u_n)$ quelconque dans E. Par définition de E, la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$. Donc $(u_n - \ell)$ converge vers 0 : c'est un élément de F. On peut donc écrire $(u_n) = (u_n - \ell) + (\ell)$, avec $(u_n - \ell) \in F$ et $(\ell) \in G$. Cela prouve que $E = F + G$.

Finalement, $E = F \oplus G$.

(d) Si E était finiment engendré, en notant d sa dimension, on saurait que toutes ses familles libres ont au plus d éléments. Pour voir que E n'est pas finiment engendré, il suffit donc de voir que E contient des familles libres arbitrairement grandes.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons ϵ_k la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le k-ième qui vaut 1. Etant donné $N \in \mathbb{N}$, supposons que

$$\lambda_0\epsilon_0 + \cdots + \lambda_N\epsilon_N = 0.$$

C'est une égalité entre suites. En regardant le k-ième terme ($0 \leq k \leq N$), on trouve

$$0 + \cdots + 0 + \lambda_k + 0 + \cdots + 0 = 0.$$

Donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_N = 0$. Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_N)$ est libre. Comme N peut être choisi aussi grand qu'on veut, cela prouve bien que E n'est pas finiement engendré.

Exercice 3.

(a) La fonction g_n est constante sur les intervalles $]0, 1/n[$ et $]1/n, 1[$, donc c'est une fonction en escalier associée à la subdivision $\{0, 1/n, 1\}$ de $[0, 1]$. Comme sa valeur sur $]0, 1/n[$ (resp. $]1/n, 1[$) est n (resp. 0), son intégrale vaut :

$$\int_0^1 g_n = (1/n - 0) \times n + (1 - 1/n) \times 0 = 1.$$

(b) Soit $x \in [0, 1]$. D'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$f(x) = f(0) + xf'(c_x), 0 < c_x < x.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)g_n(x)\,dx - f(0) &= n\int_0^{1/n} f(x)\,dx - f(0), \\ &= n\int_0^{1/n} \big(f(0) + xf'(c_x)\big)\,dx - f(0), \\ &= n\int_0^{1/n} xf'(c_x)\,dx. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\left|\int_0^1 f(x)g_n(x)\,dx - f(0)\right| \leq M_1\,n\int_0^{1/n} x\,dx = \frac{M_1}{2n},$$

où $M_1 = \sup\limits_{0\leq x\leq 1}$ |f'(x)|.

Par application du lemme des gendarmes, il vient :

$$\lim_{n\to+} \int_0^1 f(x)g_n(x)\,dx - f(0) = 0.$$