Feuille de TD 1 : langage mathématique, $\mathbb{R}$

Exercice 1.

(a)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(\text{non}\, P)$ ou Q	$(\text{non}\, Q) \Rightarrow (\text{non}\, P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

(b)

P	Q	R	P ou $(Q$ et $R)$	$(P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Exercice 2. Par contraposée,

— si je ne m'ennuie pas, alors je parle ;

— si je ne bois pas ou bien si je parle, alors je ne mange pas.

Puisque je ne m'ennuie pas,

— je parle ;

— et donc je ne mange pas.

(On ne sait pas si je bois ou pas.)

Exercice 3.

(a) La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| \geq \delta \text{ ou } |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

ou encore

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

(b) f n'est pas décroissante :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } f(x) < f(y).$$

(c) La négation de $(f(x) \leq f(y)) \implies (x \leq y)$ est $(f(x) \leq f(y))$ et $(x > y)$. La contraposée est $(x > y) \implies (f(x) > f(y))$. La réciproque est $(x \leq y) \implies (f(x) \leq f(y))$.

(d) Par contraposition, l'assertion se réecrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x \neq 0 \implies f(x) \neq 0).$$

Cela veut dire que f ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 4.

(a) $(x = y) \Rightarrow (x^2 = y^2)$ admet comme

- négation : $(x = y)$ et $(x^2 \neq y^2)$;
- contraposée : $(x^2 \neq y^2) \Rightarrow (x \neq y)$;
- réciproque : $(x^2 = y^2) \Rightarrow (x = y)$.

L'implication initiale est vraie pour tous réels x, y. Automatiquement, la contraposée est toujours vraie et la négation toujours fausse. La réciproque n'est pas toujours vraie : elle est fausse pour $x = -1$ et $y = 1$.

(b) $(x < y) \Rightarrow (x^2 < y^2)$ admet comme

- négation : $(x < y)$ et $(x^2 \geq y^2)$.
- contraposée : $(x^2 \geq y^2) \Rightarrow (x \geq y)$.
- réciproque : $(x^2 < y^2) \Rightarrow (x < y)$.

L'implication initiale n'est pas toujours vraie : elle est fausse pour $x = -2$ et $y = 1$. Automatiquement, la contraposée n'est pas toujours vraie (et la négation vraie pour certaines valeurs). La négation n'est pas toujours vraie ($x = 1$ et $y = 2$). La réciproque n'est pas toujours vraie : elle est fausse pour $x = -1$ et $y = -2$.

Exercice 5.

(a) Vraie : prouvons-le ! Soit $x \in \mathbb{R}$. Par contraposée, il s'agit de voir que si $x > 0$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $x > \epsilon$. Or pour $x > 0$, on peut prendre $\epsilon = x/2 > 0$ et voir que $x > x/2 = \epsilon$.

(b) Faux. Pour montrer que la proposition est fausse, il faut trouver un réel x tel que : $\forall \epsilon > 0, x < \epsilon$ et $x \geq 0$. Le réel $x = 0$ satisfait ces conditions.

Exercice 6.

(a) $A \setminus B = \{x \in A \ : \ x \notin B\} = \{x \in A\} \cap \{x \in \overline{B}\} = A \cap \overline{B}$.

(b) Prenons $x \in B$. Soit $x \in A$ et donc $x \in A \cap B \subset A \cap C$ et ainsi $x \in C$. Soit $x \in \overline{A}$ et supposons par l'absurde que $x \notin C$. On a alors $x \in \overline{A} \cap \overline{C} = \overline{A \cup C} \subset \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et donc $x \notin B$, contradiction. Dans tous les cas on a bien $x \in C$, ainsi $B \subset C$.

(c) En utilisant la distributivité de $\cup$ et $\cap$ l'une par rapport à l'autre et les lois de De Morgan, on a $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(d) Utiliser directement la formule précédente.

(e) Si $A = B = \emptyset$, il est clair que $A \Delta B = \emptyset$. Si $A \Delta B = A \cap B$, comme $A \Delta B \subset \overline{A \cap B}$, on en déduit que $A \cap B = \emptyset$ puis que $A \cup B = \emptyset$.

(f) Par symétrie, il suffit de prouver que $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B \subset C$. Prenons $x \in B$. Soit $x \in A$ et alors $x \in \overline{A \Delta B} = \overline{A \Delta C} = (\overline{A} \cup C) \cap (\overline{C} \cup A)$ ce qui implique $x \in C$. Soit $x \in \overline{A}$, et donc $x \in A \Delta B = A \Delta C \subset A \cup C$ et donc $x \in C$.

Exercice 7.

(a) $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ implique $f(x) = f(y)$ par injectivité de g puis $x = y$ par injectivité de f.

(b) Si $z \in G$, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$ par surjectivité de g, puis il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ par surjectivité de f. Ainsi $g \circ f(x) = z$, cqfd.

(c) Si $f(x) = f(y)$, on applique g à gauche ce qui donne $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ et ainsi $x = y$ par injectivité de $g \circ f$. L'application g n'est pas injective en général. Par exemple $E = \mathbb{R}^+$, $F = G = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, $g(y) = \sqrt{|y|}$ donne un contre-exemple.

(d) C'est clair que si $z = g \circ f(x)$, alors $g(f(x)) = z$ donc la surjectivité de $g \circ f$ entraine celle de g. L'application f n'est pas surjective en général. Par exemple $E = F = \mathbb{R}$, $G = [-1, +1]$ et $f(x) = x^2$, $g(y) = \sin(y)$ donne un contre-exemple.

Exercice 8. Supposons que $x^2 = 2$, avec $x = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$. En divisant par 2 autant de fois que nécessaire le numérateur et le dénominateur, on peut simplifier la fraction et s'arranger pour que p ou q soit impair. L'équation $x^2 = 2$ donne $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair. Comme on l'a vu en cours, cela impose que p est pair : $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors $(2k)^2 = 2q^2$, donc $2k^2 = q^2$. Et cela prouve de même que q est pair. Contradiction ! On a prouvé par l'absurde qu'il n'y a pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$.

Exercice 9.

(a) Pour l'unicité, on suppose qu'on a deux entiers m et n vérifiant les encadrements $m \leq x < m+1$ et $n \leq x < n+1$. Alors $m \leq x < n+1$ et $n \leq x < m+1$, donc $-1 < m - n < 1$. L'entier $m - n$ est donc 0 : $m = n$. D'où l'unicité de $E(x)$.

Pour l'existence, on considère plusieurs cas.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $A = \{k \in \mathbb{N} / k \leq x\}$. Il y a un entier naturel N tel que $x < N$ (propriété d'Archimède) donc A est un ensemble fini (inclus dans $\{0, ..., N-1\}$). Notons $E(x)$ le plus grand de ses éléments. Par construction, c'est un entier naturel, $E(x) \leq x$ et $E(x)+1$ n'est pas dans A, donc $E(x)+1 > x$. Donc $E(x)$ convient.

Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. Alors $-x \geq 0$, donc l'étape précédente donne $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq -x < k+1$, soit $-k-1 < x \leq -k$. Si x n'est pas entier, on a même deux inégalités strictes, de sorte que $E(x) = -k-1$ convient. Et de toute façon, si x est entier, $E(x) = x$ convient toujours.

(b) La fonction E est constante à la valeur k sur chaque intervalle $[k, k+1[$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. En ajoutant 1 à l'encadrement du (a), on trouve $E(x) + 1 \leq x + 1 < (E(x) + 1) + 1$. Par (a), l'entier $E(x) + 1$ est donc la partie entière de $x + 1$: $E(x + 1) = E(x) + 1$.

Exercice 10.

(a) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > 1/(b-a)$, i.e. $N(b-a) > 1$. Pour $n \geq N$, $n(b-a) > 1$, donc $nb > na + 1$. Si nb est entier, on pose $k = nb - 1$ et alors $na < k < nb$. Sinon, on pose $k = E(nb)$ et puisque nb n'est pas entier, $na < nb-1 < k < nb$.

(b) Donc l'intervalle $]a, b[$ contient le nombre rationnel k/n. Soit $M \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que $1/M < b - k/n$. Pour tout $m \geq M$, $\dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{m}$ est un rationnel situé dans l'intervalle $]a, b[$.

(c) L'intervalle $]a, b[$ contient par exemple tous les nombres irrationnels $\dfrac{k}{n} + \dfrac{\sqrt{2}}{p}$ pour p entier assez grand.

Exercice 11.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| + |3x-1| = 4\}$. Les fonctions $x \mapsto x+2$ et $x \mapsto 3x-1$ sont croissantes et s'annulent respectivement en -2 et $1/3$. On distingue trois cas selon la position de x par rapport à ces valeurs.

— Pour $x \geq 1/3$, $x \in A$ ssi $x + 2 + 3x - 1 = 4$, i.e. $x = 3/4$. C'est bien une solution puisque $3/4 \geq 1/3$.

— Pour $x \in]-2, 1/3[$, $x \in A$ ssi $x + 2 + 1 - 3x = 4$, i.e. $x = -1/2$, qui est bien dans l'intervalle $]-2, 1/3[$.

— Enfin, pour $x \leq -2$, $x \in A$ ssi $-x - 2 + 1 - 3x = 4$, i.e. $x = -5/4$. Solution exclue puisque $-5/4 > -2$.

Donc $A = \{-1/2, 3/4\}$.

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 5 = \sqrt{x+11}\}$. Pour que $\sqrt{x+11}\}$ ait un sens, il faut imposer $x \geq -11$. Ensuite, x est dans B ssi $x+5$ est un *nombre positif* de carré $x + 11$, i.e.

$$x \geq -5 \qquad \text{et} \qquad (x+5)^2 = x + 11.$$

L'équation à droite s'écrit $x^2 + 9x + 14 = 0$ et ses racines sont -2 et -7. On en déduit $B = \{-2\}$.

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3i| = |z + i|\}$. Si on identifie $\mathbb{C}$ au plan euclidien, C est l'ensemble des points z qui sont équidistants de $3i$ et de $-i$. Autrement dit, c'est la médiatrice du segment reliant $3i$ à $-i$. On en déduit que C est la droite horizontale passant par i : $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{I}m(z) = 1\}$.

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid E(3x) = 2 - E(x)\}$. Ecrivons $x = k + r$ avec $k = E(x) \in \mathbb{Z}$ et $r \in [0, 1[$. Alors $3x = 3k + 3r$, donc $E(3x)$ vaut $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ selon que r est dans $[0, 1/3[$, $[1/3, 2/3[$ ou $[2/3, 1[$.

Dans le premier cas, x est dans D ssi l'entier k vérifie $3k = 2 - k$: pas de solution (entière). Le second cas revient à $3k + 1 = 2 - k$, qui n'a toujours pas de solution entière. Reste le troisième cas : $r \in [2/3, 1[$ et $3k + 2 = 2 - k$, soit $k = 0$. Conclusion : $D = [2/3, 1[$.