

Corrigé de la feuille 3 : continuité, dérivabilité

Exercice 1.

- (a) $|f(x)| = |x| |\cos(1/x)| \leq |x| \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
- (b) La fonction g tend vers 0 en 0^- , par composition des limites $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x = -\infty$ et $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$.
- (c) Les suites $(x_n) = (2n\pi)$ et $(y_n) = (\pi/2 + 2n\pi)$ tendent vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. Or $(h(x_n))$ tend vers 0 et $(h(y_n))$ tend vers $+\infty$. Donc la fonction h n'admet pas de limite en $+\infty$.
- (d) Par développements limités de sinus et cosinus, $i(x) = \frac{x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1} = \frac{1 + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)}$ quand $x \rightarrow 0$. Donc i tend vers -2 en 0.

Exercice 2.

- (a) Etablissons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$H_n : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x/2^n).$$

Initialisation : H_0 est claire. Hérédité : si on suppose H_n pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire pour tout réel x :

$$f(x) = f(x/2^n) = f(2(x/2^{n+1})) = f(x/2^{n+1}),$$

d'où H_{n+1} . Ceci montre que H_n est vraie pour tout entier naturel n , par récurrence.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(x/2^n)$ tend vers 0. Par continuité de f en 0, la suite $(f(x/2^n))$ tend vers $f(0)$. Or cette suite est constante à $f(x)$ par (a). Donc $f(0) = f(x)$. Ceci prouve que $f(x) = f(0)$ pour tout réel x : f est constante.

Exercice 3. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{Z} . Supposons qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = m$, $f(y) = n$ et $m < n$. Par continuité de f sur l'intervalle \mathbb{R} , tous les réels de l'intervalle $[m, n]$ sont des valeurs atteintes par f (théorème des valeurs intermédiaires). Or, l'intervalle $[m, n]$ contient des nombres non entiers (par exemple $m + 1/2$). Cela contredit le fait que f ne prend que des valeurs entières. Ceci prouve, par l'absurde, que f est constante.

Exercice 4. Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. C'est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont dans $[a, b]$, on a $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que 0 est une valeur atteinte par g , en un point c de l'intervalle $[a, b]$. Or $g(c) = 0$ signifie exactement $f(c) = c$.

Exercice 5.

- (a) Non. Définissons $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$. Les valeurs prises par f forment l'intervalle $]0, 1]$. Elles ne sont donc incluses dans aucun intervalle de la forme $[\epsilon, +\infty[$ avec $\epsilon > 0$.
- (b) Oui. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. Comme f est continue sur un segment, f atteint un minimum en un point $c \in [a, b]$. Alors f est minorée par $f(c)$. Et $f(c) > 0$ par hypothèse.

Exercice 6.

- (a) La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur \mathbb{R} . La fonction $x \mapsto 1 + |x|$ ne s'annule pas et elle est dérivable sur \mathbb{R}^* . Donc le quotient, f , est bien défini sur \mathbb{R} , et dérivable sur \mathbb{R}^* . Comme le taux de variation $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{1 + |x|}$ tend vers 1 quand $x \rightarrow 0$, on en déduit que f est aussi dérivable en 0 (de dérivée 1). Ainsi, f est dérivable (donc continue) sur \mathbb{R} .
- (b) La fonction g est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* (comme composée...). Par développement limité, le taux de variation

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\cos(\sqrt{|x|}) - 1}{x} = \frac{-|x|/2 + o(|x|)}{x} = -\frac{|x|}{2x} + o(1)$$

tend vers $-1/2$ quand $x \rightarrow 0^+$ et vers $1/2$ quand $x \rightarrow 0^-$. La fonction g n'est donc pas dérivable en 0.

- (c) Comme quotient de fonctions usuelles, h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$. Quand $x \rightarrow \pm 1$, $|h(x)|$ tend vers $+\infty$, donc h n'est pas continue en ± 1 (donc pas dérivable non plus). Le développement limité de sinus en 0 donne

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{x + o(x)}{x \ln |x|} = \frac{1 + o(1)}{\ln |x|} \rightarrow 0,$$

quand $x \rightarrow 0$: la fonction h est dérivable (donc continue) en 0.

Exercice 7.

- (a) Pour $x > 0$, $a(x) = x^{-2/3} - x^{-3/2}$, donc $a'(x) = -\frac{2}{3}x^{-5/3} + \frac{3}{2}x^{-5/2}$.
- (b) Pour $|x| < \pi/2$, $b'(x) = \tan x + x(1 + \tan^2(x))$.
- (c) Pour $x \neq 4$, $c'(x) = \frac{2(x - 4) - (2x + 3)}{(x - 4)^2} = \frac{-11}{(x - 4)^2}$.
- (d) Pour $x \in \mathbb{R}$, $d'(x) = -\sin(\sin x) \cos(x) + 2xe^{x^2}$.
- (e) Pour $|x| < \pi/2$, $e(x) = e^{\sin x \ln(\cos x)}$, donc

$$e'(x) = (\cos x \ln(\cos x) - \sin x \tan x) e^{\sin x \ln(\cos x)}.$$

Exercice 8. f est dérivable sur \mathbb{R}^* (composée de fonctions usuelles) et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + (1/x)^2} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Donc f est constante sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Comme f tend vers $\pi/2$ en $+\infty$, on en déduit que f est constante à la valeur $\pi/2$ sur $]0, +\infty[$. Comme f tend vers $-\pi/2$ en $-\infty$, on en déduit que f est constante à la valeur $-\pi/2$ sur $] -\infty, 0[$.

Exercice 9. Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$, dérivable sur \mathbb{R}_+^* :

$$\sqrt[3]{1001} = f(1001) = f(1000) + f'(c)(1001 - 1000) = 10 + \frac{c^{-\frac{2}{3}}}{3}$$

pour un réel c de l'intervalle $]1000, 1001[$. Donc :

$$\sqrt[3]{1001} \leq 10 + \frac{1000^{-\frac{2}{3}}}{3} = 10 + \frac{1}{300} = 10,00333333\dots$$

Exercice 10. Supposons que l'équation admet (au moins) 3 solutions réelles $x_1 < x_2 < x_3$. Par application du théorème de Rolle à la fonction polynômiale $f : x \mapsto x^n + ax + b$, on voit que f' s'annule en au moins deux points (un entre x_1 et x_2 , un entre x_2 et x_3). Mais pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1} + a$. Si n est pair, $n - 1$ est impair, donc la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est une bijection (croissante) de \mathbb{R} sur \mathbb{R} ; en particulier, elle ne prend la valeur $-a/n$ qu'une seule fois, ce qui signifie que f' s'annule exactement une fois. Cela empêche donc l'équation d'avoir trois solutions.

Dans le cas où n est impair, de la même façon, f' s'annule au plus deux fois (puisque la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est strictement décroissante puis strictement croissante). Par le théorème de Rolle, on en déduit que f s'annule au plus trois fois.

Exercice 11.

(a) L'inégalité triangulaire à l'envers donne

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$, si $|x - y| < \epsilon$, alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Cela prouve l'uniforme continuité de f .

(b) Soit $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ une borne sur f' . Pour $x, y \in I$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$|f(x) - f(y)| \leq \kappa|x - y|.$$

Etant donné $\epsilon > 0$, si $|x - y| < \epsilon/\kappa$, alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Donc f est uniformément continue.

(c) Si f était uniformément continue, on devrait pouvoir trouver $a > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x+a) - f(x)| < 1$ ($\epsilon = 1$, $a = \eta/2$ dans la définition). Or $f(x+a) - f(x) = 2ax + a^2 \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. Cela empêche l'uniforme continuité de f .

Exercice 12. (théorème de Heine)

(a) En niant la définition de l'uniforme continuité, on voit que f vérifie la propriété

$$\exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, y \in [a, b], |x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

On fixe un tel $\epsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le choix $\eta = 1/n$ fournit donc des points x_n et y_n de I tels que $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Ces suites (x_n) et (y_n) conviennent.

(b) Les suites (x_n) et (y_n) restent dans le segment $[a, b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire des sous-suites convergentes (plus précisément, on fait deux extractions successives, comme dans la preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas complexe). Ce sont ces sous-suites qu'on rebaptise (x_n) et (y_n) dorénavant.

- (c) Notons x la limite de (x_n) . Comme les inégalités larges sont préservées par passage à la limite, on a $x \in [a, b]$. Donc f est continue en x . Comme $(x_n - y_n)$ tend vers 0, (y_n) converge aussi vers x . Par continuité de f en x , on en déduit que les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ tendent vers $f(x)$. Donc leur différence tend vers 0, ce qui contredit $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. On a prouvé par l'absurde que f est uniformément continue.

Exercice 13.

- (a) Soit $\epsilon > 0$. Comme f' tend vers ℓ en $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que

$$\forall c > A, \quad \ell - \epsilon \leq f'(c) \leq \ell + \epsilon.$$

Soit $x > A$. Le théorème des accroissements finis donne un réel $c \in]A, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(A)}{x - A} = f'(c)$. Puisque $c > A$, on en tire

$$\ell - \epsilon \leq \frac{f(x) - f(A)}{x - A} \leq \ell + \epsilon.$$

- (b) Cette inégalité se réécrit, pour $x > A$:

$$\frac{(\ell - \epsilon)(x - A) + f(A)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{(\ell + \epsilon)(x - A) + f(A)}{x}.$$

Le membre de gauche (resp. droite) tend vers $\ell - \epsilon$ (resp. $\ell + \epsilon$) quand $x \rightarrow +\infty$. On peut donc trouver $B > A$ tel que pour $x > B$,

$$\ell - 2\epsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq \ell + 2\epsilon.$$

Cela montre que $f(x)/x$ converge vers ℓ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 14.

- (a) Comme $(f')'$ est positive, f' est croissante. Par le théorème des accroissements finis, si $a < x < b$, il existe $c \in]a, x[$ et $d \in]x, b[$ tels que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) \text{ et } \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(d).$$

Puisque $c < d$, $f'(c) \leq f'(d)$, d'où

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

- (b) L'équation de la corde est celle d'une droite, donc de la forme $y = \alpha x + \beta$. La pente de la corde est $\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. On trouve ensuite β en faisant $(x, y) = (a, f(a))$ dans l'équation. On voit ainsi que la corde est d'équation

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \quad a \leq x \leq b.$$

Or en isolant $f(x)$ dans l'inégalité du (a), on obtient pour $a < x < b$:

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \quad a \leq x \leq b.$$

Le graphe de f est donc sous la corde entre a et b .

- (c) En faisant $x \rightarrow a$ d'une part et $x \rightarrow b$ d'autre part dans (a), on obtient les deux inégalités

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{et} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

- (d) L'équation de la tangente au graphe en $a \in I$ est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

(c'est la droite de pente $f'(a)$, passant par $(a, f(a))$). La première inégalité du (c) donne, pour tout $b > a$:

$$f(b) \geq f'(a)(b - a) + f(a).$$

Cela montre que pour tout $a \in I$, le graphe de f est au-dessus de la tangente en a , mais seulement à droite de a ($b > a$). La seconde inégalité du (c) se reformule de même pour montrer que, pour tout $b \in I$, le graphe de f est au-dessus de la tangente en b , à gauche de b . Finalement, tous les points du graphes de f sont au-dessus de toutes les tangentes au graphe.

- (e) Une fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. On obtient donc des inégalités inversées. Graphiquement, le dessus devient le dessous et réciproquement (par symétrie par rapport à l'axe des abscisses). Donc le graphe d'une fonction concave est au-dessus de ses cordes et au-dessous de ses tangentes.
- (f) Puisque $\exp'' = \exp \geq 0$, la fonction exponentielle est convexe. Son graphe est donc au-dessus de sa tangente en 0. L'équation de cette tangente est $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0) = x + 1$. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geq 1 + x.$$

Pour $t > 0$, $\ln''(t) = -1/t^2 \leq 0$, donc la fonction logarithme est concave. Son graphe est donc au-dessous de sa tangente en 1, qui est d'équation $y = (x - 1) + 0$:

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \ln(t) \leq t - 1,$$

soit, en posant $x = t - 1$,

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1 + x) \leq x.$$

Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, $\sin'' = -\sin \leq 0$, donc la fonction sinus y est concave. Son graphe y est donc au-dessous de sa tangente en 0, d'équation $y = x$, et au-dessus de sa corde entre 0 et $\pi/2$, dont l'équation s'écrit

$$y = \frac{\sin(\pi/2) - \sin(0)}{\pi/2 - 0}(x - 0) + \sin(0) = \frac{2}{\pi}x.$$

D'où :

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$$

Exercice 15.

- (a) Comme l'exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} , les fonctions sh et ch le sont aussi. Comme $\exp' = \exp$, on trouve rapidement :

$$\text{sh}' = \text{ch} \quad \text{et} \quad \text{ch}' = \text{sh}.$$

Comme l'exponentielle est strictement positive, $\text{sh}' = \text{ch}$ est strictement positive : sh est strictement croissante. Puisque $\lim_{\pm\infty} \text{sh} = \pm\infty$, sh est donc une

bijection croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R} (théorème de la bijection). Avec $\text{sh}(0) = 0$, on en déduit que $\text{ch}' = \text{sh}$ est strictement négative sur \mathbb{R}_-^* et strictement positive sur \mathbb{R}_+^* . Enfin, $\lim_{\pm\infty} \text{ch} = +\infty$ et $\text{ch}(0) = 1$: ch décroît strictement de $+\infty$ à 1 sur \mathbb{R}_- , puis croît strictement de 1 à $+\infty$ sur \mathbb{R}_+ .

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En développant et simplifiant, on trouve

$$\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{2+2}{4} = 1.$$

On peut aussi dériver pour voir $\text{ch}^2 - \text{sh}^2$ est de dérivée nulle donc constante sur l'intervalle \mathbb{R} , puis calculer cette constante en prenant la valeur en 0.

(c) Le développement limité en 0 à l'ordre n de l'exponentielle est :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

On en déduit aussi, toujours en 0 :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Prenons n pair pour fixer les idées : $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$. On fait la demi-somme de ces expressions : les puissances impaires de x se simplifient et on trouve pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}).$$

quand x tend vers 0. De même, en prenant $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$ et en faisant la demi-différence, on obtient

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

quand x tend vers 0.

(d) On a vu en (a) que sh est une bijection dérivable de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , avec $\text{sh}' = \text{ch} > 0$. Donc cette fonction admet une réciproque dérivable $\text{Argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(\text{Argsh}(x))} = \frac{1}{\text{ch}(\text{Argsh}(x))}.$$

Puisque $\text{ch}^2 = 1 + \text{sh}^2$ et $\text{ch} \geq 0$, on a $\text{ch} = \sqrt{1 + \text{sh}^2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}^2(\text{Argsh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

(e) Regardons $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$, donc $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est bien définie et même dérivable. De plus, pour tout réel x , $x^2 + 1 > x^2$, donc, par stricte croissance de la racine carrée,

$$x + \sqrt{x^2 + 1} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$$

Ceci montre que $x + \sqrt{x^2 + 1}$ est toujours strictement positif, de sorte que $f(x)$ est toujours bien défini. De plus, comme composée de fonctions dérivables, f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \text{Argsh}'(x).$$

Comme \mathbb{R} est un intervalle et $f(0) = 0 = \text{Argsh}(0)$, $f = \text{Argsh}$.

On peut aussi poser $y = \text{sh } x$, $z = e^x$, ce qui donne $z - 1/z = 2y$, soit $z^2 - 2yz - 1 = 0$. Ce trinôme du second degré (en z) admet comme unique racine positive $z = y + \sqrt{y^2 + 1}$, ce qui, avec $x = \ln z$, donne la formule $\text{Argsh}(y) = x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

- (f) Le (a) et le théorème de la bijection montrent que ch est une bijection (strictement croissante) continue de \mathbb{R}_+ sur $[1, +\infty[$, qui admet donc une réciproque continue $\text{Argch} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$. $\text{ch}' = \text{sh}$ ne s'annule qu'en 0, et $\text{ch}(0) = 1$. Donc le théorème de la bijection assure que Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ (et pas en 1), avec

$$\forall x > 1, \quad \text{Argch}'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(\text{Argch}(x))} = \frac{1}{\text{sh}(\text{Argch}(x))}.$$

Or $\text{sh}^2 = \text{ch}^2 - 1$. Pour $x > 1$, $\text{Argch}(x) > 0$, de sorte que $\text{sh}(\text{Argch}(x)) > 0$.

On en déduit $\text{sh}(\text{Argch}(x)) = \sqrt{\text{ch}^2(\text{Argch}(x)) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$, puis

$$\text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

- (g) Comme au (e), pour $x > 1$, on peut dériver $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, observer que la dérivée n'est autre que celle de $\text{Argch}(x)$, que ces deux expressions valent 0 en $x = 1$, ce qui implique l'égalité souhaitée en utilisant la continuité des fonctions en 1.

Ou bien, pour $y \geq 1$, on cherche $x \geq 0$ tel que $\text{ch}(x) = y$. En posant $z = e^x$, cela revient à trouver la racine $z \geq 1$ du trinôme $z^2 - 2yz + 1 = 0$, i.e. $z = y + \sqrt{y^2 - 1}$. Cela donne

$$\text{Argch}(y) = x = \ln z = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

Exercice 16.

- (a) La fonction th est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient des fonctions dérivables sh et ch , la seconde ne s'annulant pas. De plus,

$$\text{th}' = \frac{\text{sh}' \text{ch} - \text{ch}' \text{sh}}{\text{ch}^2} = \frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \frac{1}{\text{ch}^2},$$

puisque $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$. On peut aussi développer la fraction :

$$\text{th}' = \frac{\text{ch}^2}{\text{ch}^2} - \frac{\text{sh}^2}{\text{ch}^2} = 1 - \text{th}^2.$$

- (b) La formule $\text{th}' = \frac{1}{\text{ch}^2} > 0$ montre que th est strictement croissante. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}},$$

en multipliant numérateur et dénominateur par e^{-x} . Ceci montre que th tend vers 1 en $+\infty$. En écrivant de même

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

on voit que th tend vers -1 en $-\infty$.

- (c) Le théorème de la bijection montre donc que th est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} sur $] - 1, 1[$: elle admet une réciproque $\text{Argth} :] - 1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y = \text{th } x$. Si on pose $z = e^{2x}$, la relation ci-dessus donne

$$y = \frac{z - 1}{z + 1},$$

donc $y(z + 1) = z - 1$, ou encore $e^{2x} = z = \frac{1 + y}{1 - y}$, soit

$$\text{Argth } y = x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right).$$