Corrigé de la feuille 4 : suites récurrentes

Exercice 1.

(a) Si (u_n) tend vers ℓ, (u_{n+1}) aussi et donc en passant à la limite dans la relation de récurrence, on trouve $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

(b) Avec $\ell = a\ell+b$, on trouve, pour $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (au_n+b)-(a\ell+b) = av_n$. Donc (v_n) est une suite géométrique de raison a.

(c) Si $u_0 = \ell$, $v_0 = 0$, donc la suite géométrique (v_n) est nulle et (u_n) est constante à la valeur ℓ, quel que soit le paramètre a. Supposons $u_0 \neq \ell$.

Si $|a| < 1$, (v_n) converge vers 0, donc (u_n) converge vers ℓ. Réciproquement, si (u_n) converge, c'est vers ℓ d'après (a), donc la suite géométrique (v_n) tend vers 0 et cela correspond à une raison $a \in]-1,1[$. Dans le cas $u_0 \neq 0$, la suite (u_n) converge donc si et seulement si $|a| < 1$.

(d) La suite (u_n) en question vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{9}(1-u_n).$$

(à chaque étape, on colorie 1/9 de chaque carré blanc, donc 1/9 de l'aire non coloriée). On est donc dans la situation ci-dessus avec $a = 8/9$ et $b = 1/9$. Puisque $|a| < 1$, (u_n) converge vers $\dfrac{b}{1-a} = 1$.

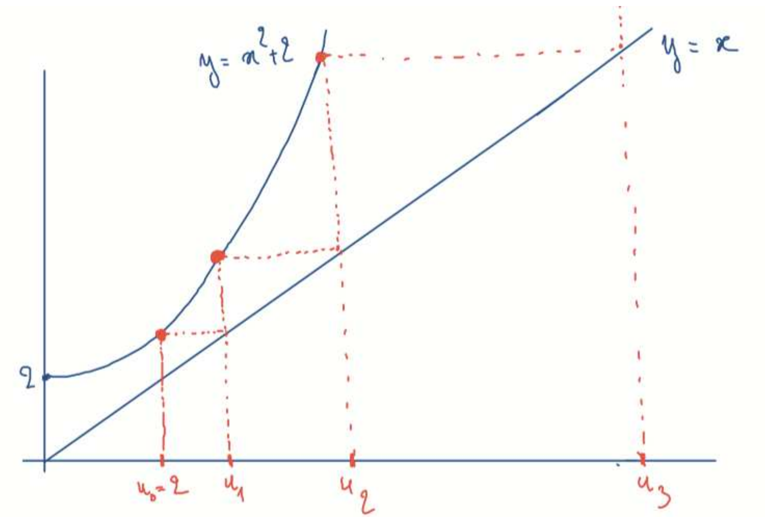
Exercice 2. On introduit les suites $(x_n = \mathrm{R}e(u_n))$ et $(y_n = \mathrm{I}m(u_n))$. Elles vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{5}x_n \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = y_n.$$

Donc (y_n) est constante, à la valeurs $y_0 = \mathrm{I}m(u_0)$. Et (x_n) est géométrique de raison 1/5 donc converge vers 0. On en déduit que (u_n) converge vers $i\mathrm{I}m(u_0)$.

Exercice 3.

(a) La fonction $f : x \mapsto x^2+2$ est bien définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc la suite récurrente est bien définie.



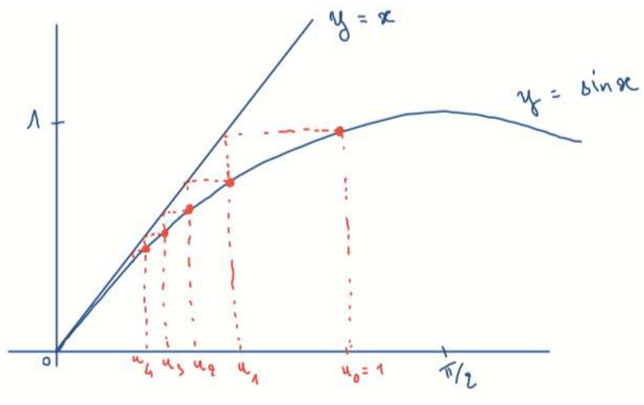
(b)

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = x^2 - x + 2$. On reconnaît un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = -7 < 0$. Comme son coefficient dominant est $1 > 0$, il reste strictement positif sur $\mathbb{R}$. Cela prouve que $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : (u_n) est strictement croissante.

(d) La suite étant croissante, elle admet une limite ℓ, réelle ou $+\infty$. Si ℓ est finie, par passage à la limite dans la relation de récurrence, $f(\ell) - \ell = 0$. Or on vient de voir, au (c), que cette équation n'admet aucune solution réelle. Donc (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 4.

(a) La fonction sinus est bien définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc la suite récurrente est bien définie.



(b)

(c) Pour $x \in [0,1] \subset [0,\pi/2]$, $\sin x \in [0,1]$.

(d) La fonction $g : x \mapsto \sin x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g' = \cos -1 \leq 0$. Donc g est décroissante. Et $g(0) = 0$. Donc $g \leq 0$ sur $[0,1]$. Par (c), la suite (u_n) reste dans $[0,1]$, donc ce calcul donne $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leq 0$ pour tout indice n : (u_n) est décroissante.

(On peut aussi utiliser la concavité de sinus sur $[0,1]$ pour voir que g y est négative, cf. feuille 3.)

(e) Puisque (u_n) est décroissante minorée (par 0), (u_n) converge. Sa limite ℓ appartient à l'intervalle fermé stable $[0,1]$ et elle vérifie $g(\ell) = 0$ par continuité de g. Sur $]0,1[$, $g' = 1 - \cos < 0$ donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$. Et $g(0) = 0$, donc g ne s'annule qu'en 0. Cela prouve (u_n) converge vers 0.

Exercice 5.

(a) Si $a < -1$, $\sqrt{a-1}$ n'est pas défini donc la suite n'est pas définie. Si $a \geq -1$, u_1 est bien défini et c'est un nombre positif. Or l'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stabilisé par la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$. Donc la suite (u_n) est bien définie si $a \geq -1$.

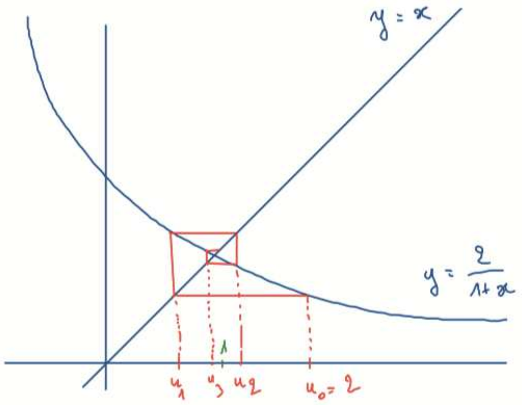
(b) Par continuité de f sur l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+$, si (u_n) converge vers ℓ, $f(\ell) = \ell$. Le nombre positif ℓ est alors une solution de $\ell^2 - \ell - 1 = 0$. Ce trinôme admet comme racines $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La seule racine positive est $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) On peut observer que la fonction f est croissante. D'après le cours, la suite (u_n) est donc toujours monotone et son sens de variation dépend de la position de $u_1 = \sqrt{a+1}$ par rapport à $u_0 = a$.

Si $a \geq \ell$, a se situe à droite de la second racine du trinôme étudié au (b), donc $a^2 - a - 1 \geq 0$ et $u_1 \leq u_0$: (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc converge et ce ne peut être que vers ℓ.

Si $-1 \leq a < \ell$, on a $u_1 \geq u_0$ (comme $u_1 \geq 0$, c'est clair si $a = u_0 \leq 0$; et si $a \in [0,\ell[$, a est situé entre les racines du trinôme du (b), donc $a^2 - a - 1 \leq 0$, ce qui implique l'inégalité voulue). Dans ce cas, (u_n) est croissante. On peut remarquer que si $-1 \leq x \leq \ell$, $0 \leq f(x) = \sqrt{x+1} \leq \sqrt{\ell+1} = \ell$, ce qui prouve que $[-1,\ell]$ est stable, de sorte qu'ici, (u_n) restera majorée par ℓ. Donc (u_n), croissante et majorée, converge, vers ℓ par nécessité.

Exercice 6.



(a)

(b) Soit $x \in [1/2, 2]$. En particulier, $x \neq -1$, donc $f(x)$ est bien défini. Par décroissance de f sur $]-1, +\infty[$, on a

$$\frac{2}{3} = f(2) \leq f(x) \leq f(1/2) = \frac{4}{3}.$$

Donc $f(x)$ est dans l'intervalle $[1/2, 2]$. Cet intervalle est donc stable.

(c) Puisque 2 est dans cet intervalle, on en déduit que (u_n) est une suite bien définie et restant dans cet intervalle. Par continuité de f sur cet intervalle fermé, si (u_n) converge vers ℓ, ℓ est un élément de $[1/2, 2]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$. C'est donc une solution de $\ell^2 + \ell - 2 = 0$. Ce trinôme a pour racines 1 et -2. La seule possibilité de limite dans l'intervalle voulu est $\ell = 1$.

(d) La fonction f est dérivable sur $[1/2, 2]$, avec $|f'(x)| = 2/(1+x)^2$ pour x dans cet intervalle. Par décroissance de $|f'|$, $|f'| \leq |f'(1/2)| = 8/9$ sur cet intervalle. La fonction f y est donc contractante. Cela assure donc la convergence de (u_n) vers la seule limite possible, 1, avec de plus l'estimée

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n |u_0 - 1| = \left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

(e) Par décroissance de f, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens opposé. On calcule : $u_0 = 2$, $u_1 = 2/3$ et $u_2 = 6/5 < u_0$. Ainsi, (u_{2n}) est décroissante et donc (u_{2n+1}) est croissante.

Exercice 7.

(a) Soit $x > 0$. On utilise l'identité remarquable $A^2 + B^2 - 2AB = (A - B)^2 \geq 0$ avec $A = \sqrt{\frac{x}{2}}$ et $B = \sqrt{\frac{a}{2x}}$:

$$\frac{x}{2} + \frac{a}{2x} - \sqrt{a} \geq 0.$$

Posons $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x}$. On a donc : $\forall x > 0, \quad f(x) \geq \sqrt{a}$. (On aurait aussi pu étudier les variations de la fonction f.)

Puisque $u_0 > 0$, ceci prouve d'une part que $u_1 = f(u_0) \in [\sqrt{a}, +\infty[$. Et cela prouve aussi que l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$ est stable. Donc :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[.$$

(b) Pour $x \in [\sqrt{a}, +\infty[$,

$$f(x) - x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} - x\right) = \frac{1}{2x}\left(a - x^2\right) \leq 0.$$

Avec (a), $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante.

(c) Par (a) et (b), $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée et décroissante, donc convergente, vers une limite ℓ, qui est dans l'intervalle fermé et stable $[\sqrt{a}, +\infty[$. Par continuité de f sur cet intervalle, ℓ est un point fixe de f dans l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$.

Or d'après le calcul ci-dessus, $f(\ell) - \ell = 0$ si et seulement si $a - \ell^2 = 0$, i.e. $\ell = \sqrt{a}$ (puisque ℓ est dans $[\sqrt{a}, +\infty[$).

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\epsilon_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$, de sorte que

$$\epsilon_{n+1} = \frac{\frac{u_n}{2} + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{4u_n\sqrt{a}} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{4u_n\sqrt{a}}.$$

On minore ensuite u_n par $\sqrt{a}$ dans le dénominateur pour trouver

$$\epsilon_{n+1} \leq \epsilon_n^2.$$

Etant donné $N \in \mathbb{N}^*$, par récurrence, on en tire :

$$\forall n \geq N, \epsilon_n \leq (\epsilon_N)^{2^{n-N}}.$$

Sorbonne Université 2023 – 2024
L1 MA003

Question (d) de l'exercice 7 de la feuille de TD 4 MA003

La suite $(u_n)_n$ est définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a}{u_n}\Big). \tag{1}$$

Il a été démontré aux questions précédentes que la suite est une suite décroissante, minorée par $l = \sqrt{a}$ et qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.

On a $l^2 = a$ et :

$$l = \frac{1}{2}\Big(l + \frac{a}{l}\Big). \tag{2}$$

En retranchant membre à membre (2) à (1), on obtient :

$$u_{n+1} - l = \frac{1}{2}\Big(u_n - l + a(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l})\Big) = \frac{1}{2}\Big(u_n - l - \frac{a}{lu_n}(u_n - l)\Big) = \frac{(u_n - l)}{2}\Big(1 - \frac{l}{u_n}\Big) = \frac{1}{2u_n}(u_n - l)^2.$$

Nous avons donc démontré que :

$$u_{n+1} - l = \frac{1}{2u_n}(u_n - l)^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

On pose :

$$\varepsilon_n = \frac{u_n - l}{2l} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

On a donc :

$$u_n - l = 2l\varepsilon_n.$$

L'identité (3) se réécrit :

$$2l\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2u_n}(2l\varepsilon_n)^2 = \frac{2l^2\varepsilon_n^2}{u_n} = \frac{2l^2\varepsilon_n^2}{l(1+2\varepsilon_n)} = \frac{2l\varepsilon_n^2}{1+2\varepsilon_n}.$$

Or $\varepsilon_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient donc :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{1+2\varepsilon_n} \leqslant \varepsilon_n^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Nous avons donc démontré :

$$\varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon_n^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \tag{4}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel quelconque non nul. Démontrons par récurrence la propriété (P_k^n) suivante :

$$(P_k^n) \quad \varepsilon_{n+k} \leqslant \varepsilon_n^{2^k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

La propriété (P_0^n) est vraie. Supposons qu'elle soit vraie à l'ordre k. Montrons qu'elle est vraie à l'ordre $k+1$.

D'après (4), nous avons

$$\varepsilon_{n+k+1} \leqslant \varepsilon_{n+k}^2.$$

En utilisant (5) dans cette dernière inégalité, nous obtenons :

$$\varepsilon_{n+k+1} \leqslant \left(\varepsilon_n^{2^k}\right)^2 = \varepsilon_n^{2^{k+1}}.$$

Nous avons donc montré que la propriété (P_{k+1}^n) est vraie. Donc la propriété (P_k^n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. et pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Fixons un entier N non nul (suffisamment grand) à choisir par la suite, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant N$, on a $k = m - N \geqslant 0$. D'après la propriété (P_{m-N}^N), nous avons donc :

$$\varepsilon_m \leqslant \varepsilon_N^{2^{m-N}} = \left(\varepsilon_N\right)^{2^{m-N}} = \left(\left(\varepsilon_N\right)^{1/2^N}\right)^{2^m} \quad \forall\ m \geqslant N$$

Pour montrer que

$$\varepsilon_m = O(10^{-2m}) \text{ quand } m \text{ tend vers } \infty,$$

il faut et il suffit de montrer que l'on peut choisir N assez grand tel que

$$\left(\varepsilon_N\right)^{1/2^N} \leqslant \frac{1}{10}. \tag{6}$$

Or c'est ce que l'on cherche à démontrer à une constante multiplicative près.

On ne peut pas en déduire la propriété (telle que formulée) de la question (d) de l'exercice 7.

La dernière question de la feuille de TD 4 va être modifiée.

On peut procéder de la façon suivante pour établir une inégalité comme celle demandée, en ajoutant une contrainte sur u_0.

La propriété (P_{N-1}^1) donne :

$$\varepsilon_N \leqslant \varepsilon_1^{2^{N-1}} = \left(\sqrt{\varepsilon_1}\right)^{2^N} \quad \forall\ N \geqslant 1.$$

Nous en déduisons :

$$\left(\varepsilon_N\right)^{1/2^N} \leqslant \sqrt{\varepsilon_1} \quad \forall\ N \geqslant 1. \tag{7}$$

Donc une condition suffisante pour que (6) soit vraie est que :

$$\varepsilon_1 \leqslant 10^{-2} \tag{8}$$

Posons, par extension au cas $n = 0$:

$$\varepsilon_0 = \frac{u_0 - l}{2l}$$

On suppose $\varepsilon_0 \neq 0$ (sinon $\varepsilon_n = 0$ pour tout n). On a alors encore la relation :

$$u_0 = l(1 + 2\varepsilon_0)$$

On a par hypothèse $u_0 > 0$. Or $l > 0$. On en déduit que :

$$\varepsilon_0 > -\frac{1}{2}.$$

On vérifie aisément que la relation :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{1+2\varepsilon_n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

reste vraie pour $n = 0$. On a donc

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0^2}{1+2\varepsilon_0}.$$

Définissons le polynôme Q de second degré par :

$$Q(x) = 10^2x^2 - 2x - 1 \quad x \in \mathbb{R}.$$

On vérifie que Q admet deux racines réelles α et β données par :

$$-\frac{1}{2} < \alpha = \frac{1-\sqrt{101}}{10^2} < 0\ , \quad \beta = \frac{1+\sqrt{101}}{10^2} > 0. \tag{9}$$

Alors (8) est vraie si et seulement si :

$$Q(\varepsilon_0) \leqslant 0. \tag{10}$$

Donc la relation (8) est vraie si et seulement si on a soit $\varepsilon_0 \in]\alpha, 0[$ ou $\varepsilon_0 \in]0, \beta[$, donc si et seulement si

$$l(1+2\alpha) < u_0 < l \text{ ou } l < u_0 < l(1+2\beta). \tag{11}$$

Donc si u_0 vérifie l'une des deux inégalités de (10) alors (6) avec $N = 1$ est vraie, et donc nous en déduisons, en appliquant (P_{n-1}^1) :

$$0 < \varepsilon_n \leqslant \varepsilon_1^{2^{n-1}} = \left(\sqrt{\varepsilon_1}\right)^{2^n} \leqslant 10^{-2^n} \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

Donc il est possible de démontrer l'estimation d'erreur de la question (d) (de façon plus précise) en ajoutant une contrainte sur u_0 qui doit être suffisamment proche de l (au sens de (11)).

L'intérêt de l'exercice est à la fois théorique et numérique. Soit $a > 0$ donné. Si on définit la fonction f de $]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big)$$

La suite $(u_n)_n$ est définie par la donnée de $u_0 > 0$ et de la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

On démontre que $l = \sqrt{a}$ est l'unique point fixe de f dans l'intervalle $]0, +\infty[$. On a donc en particulier $f(l) = l$. Supposons que $u_0 \neq l$ (sinon la suite est stationnaire et il n'y a rien à démontrer). On peut montrer qu'alors $u_n > l$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction f est dérivable à n'importe quel ordre sur $]0,+\infty[$, et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{a}{x^2}\Big)\ , \quad f''(x) = \frac{a}{x^3} \quad \forall\ x > 0.$$

On en déduit que $f'(l) = 0$. En utilisant l'égalité de Taylor à l'ordre 2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in]l, u_n[$ tel que

$$f(u_n) = f(l) + (u_n - l)f'(l) + \frac{(u_n - l)^2}{2} f''(c_n)$$

Cette formule reste vraie pour $n = 0$ mais on peut avoir $u_0 < l$. Dans ce cas $c_0 \in]u_0, l[$.

Or $f(l) = l$ et $f'(l) = 0$. Donc d'après le calcul de la dérivée seconde on a donc :

$$f(u_n) = l + \frac{(u_n - l)^2}{2} \frac{l^2}{c_n^3}.$$

En utilisant ce qui précède et l'inégalité $l < c_n$ pour tout $n \geqslant 1$, on en déduit :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{l^3}{c_n^3} \varepsilon_n^2 \leqslant \varepsilon_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On déduit de l'exercice que la vitesse de convergence de la méthode d'approximation du calcul de $\sqrt{a}$ dépend des propriétés de f au voisinage du point fixe $l = \sqrt{a}$. Lorsque, comme pour cet exercice, la dérivée de f au point fixe est nulle, la vitesse de convergence est plus rapide.