Correction de la feuille 5 : intégrale de Riemann

Exercice 1.

(a) Si $a \neq -1$, $\displaystyle\int_1^2 x^a dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_1^2 = \frac{2^{a+1}-1}{a+1}$.

Pour $a = -1$, $\displaystyle\int_1^2 x^{-1} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$.

(b) Soit on reconnaît la dérivée de arcsinus sous l'intégrale, de sorte que le résultat est $\arcsin 1 - \arcsin 0 = \pi/2$. Soit on fait le changement de variable $x = \sin t$ et on trouve

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\, dt}{\cos t} = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Pour $x > 0$, par intégration par parties,

$$\int_1^x \ln t\, dt = \int_1^x 1 \times \ln t\, dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t} dt = x \ln x - x + 1.$$

Les primitives de ln sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions $x \mapsto x \ln x - x + c$, où c est une constante.

(d) Pour $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. Pour $x < 0$, $\dfrac{d}{dx}(\ln(-x)) = -\dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{x}$. Donc $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto 1/x$. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, mais l'union disjointe des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ donc les primitives de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions $f_{a,b} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telles que $f_{a,b}(x) = \ln|x| + a$ pour $x > 0$ et $f_{a,b}(x) = \ln|x| + b$ pour $x < 0$, pour des constantes a et b quelconques.

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\cos'(x)}{\cos(x)} dx = [-\ln\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{2}$.

(f) On fait le changement de variable $y = \sin x$ puis une intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)} \sin(x)\cos(x) dx = \int_0^1 e^y y\, dy = [e^y y]_0^1 - \int_0^1 e^y\, dy = e - (e-1) = 1.$$

(g) Soit on fait le changement de variable $y = \cos x$:

$$\int_0^\pi \sin(x)^3 dx = \int_0^\pi (1-\cos^2(x))\sin(x) dx = -\int_1^{-1} (1-y^2) dy = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Soit on fait intervenir des exponentielles complexes : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x)^3 = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^3}{(2i)^3} = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-4 \cdot 2i} = -\frac{\sin(3x)}{4} + \frac{3\sin(x)}{4},$$

d'où

$$\int_0^\pi \sin(x)^3 dx = \int_0^\pi \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4} dx = \left[-\frac{3\cos(x)}{4} + \frac{\cos(3x)}{12}\right]_0^\pi = \frac{4}{3}.$$

Exercice 2. On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$.

(a) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{2+\sin t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions continues, avec un dénominateur ne s'annulant ($2 + \sin \geq 1$). Il est donc intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$.

(b) Puisque f est 2π-périodique, on a $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = F(\pi) - F(-\pi)$, où F est une primitive de f. Par continuité de F (qui est même dérivable : c'est une primitive), on en déduit :

$$I = \lim_{T\to\pi} (F(T) - F(-T)) = \lim_{T\to\pi} \int_{-T}^{T} \frac{dt}{2+\sin t}.$$

(c) $\sin(t) = 2\sin(t/2)\cos(t/2) = 2\tan(t/2)\cos^2(t/2) = \dfrac{2\tan(t/2)}{1+\tan^2(t/2)}$.

(d) La fonction $\phi : t \mapsto \tan(t/2)$ est une bijection C^1 entre $]-\pi, \pi[$ et $]-\infty, +\infty[$, donc on peut faire le changement de variable $x = \tan(t/2)$ dans l'intégrale du (b) (notons que sur $]0, 2\pi[$, on n'aurait pas pu, puisque ϕ n'est pas définie en π). Ainsi, avec (c), et en posant $X = \tan(T/2)$, on trouve :

$$\int_{-T}^{T} \frac{dt}{2+\sin t} = \int_{-X}^{X} \frac{1}{2+\frac{2x}{1+x^2}} \frac{2dx}{1+x^2} = \int_{-X}^{X} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right).$$

Donc :

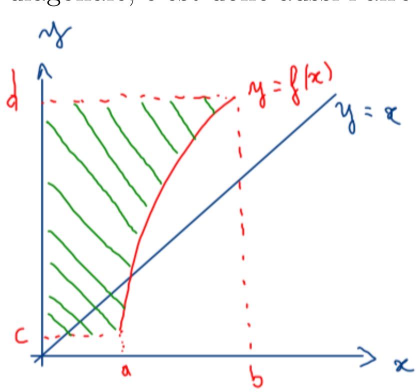
$$\int_{-T}^{T} \frac{dt}{2+\sin t} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan\left(\frac{X+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) - \arctan\left(\frac{-X+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \right).$$

En faisant $T \to \pi$, donc $X = \tan(T/2) \to +\infty$, on arrive à

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

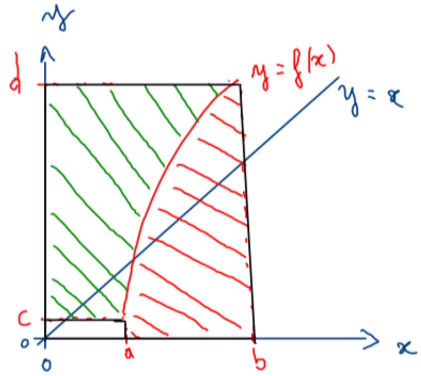
Exercice 3.

(a) Pour simplifier le dessin, on suppose que f et f^{-1} sont positives. L'intégrale de f^{-1} est l'aire située entre le graphe de f^{-1} et l'axe des abscisses. Par symétrie par rapport à la diagonale, c'est donc aussi l'aire entre le graphe de f et l'axe



des ordonnées.

(b) Le dessin montre que la somme des intégrales est l'aire du grand rectangle, de côtés b et d, moins l'aire du petit rectangle, de côtés a et c.



(c) Comme $f : [a,b] \to [c,d]$ est une bijection croissante de classe C^1, on peut effectuer le changement de variable $y = f(x)$. En remarquant que $f(a) = c$ et $f(b) = d$ (bijection croissante), on trouve

$$\int_c^d f^{-1}(y)dy = \int_a^b f^{-1}(f(x))f'(x)dx = \int_a^b xf'(x)dx.$$

Une intégration par parties donne alors :

$$\int_c^d f^{-1}(y)dy = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx.$$

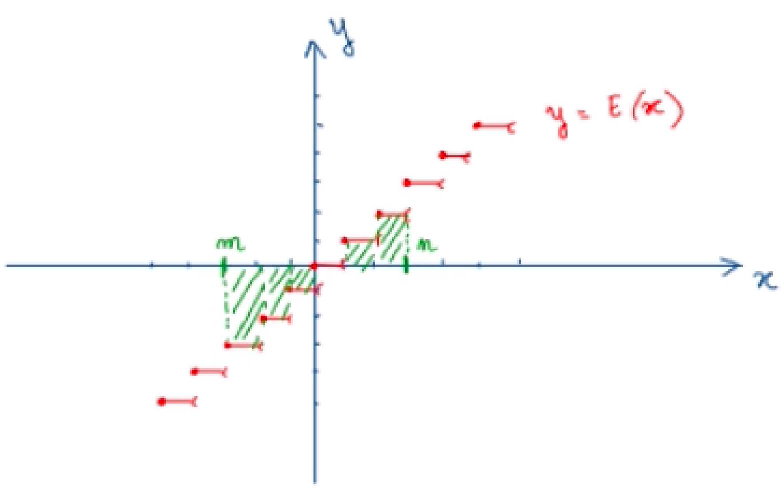
D'où $\displaystyle\int_a^b f + \int_c^d f^{-1} = bd - ac.$

Exercice 4. La relation de Chasles et la définition de la partie entière donnent :

$$\int_m^n E(t)dt = \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} E(t)dt = \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} kdt = \sum_{k=m}^{n-1} k.$$

On reconnaît la somme d'une progression arithmétique :

$$\int_m^n E(t)dt = ((n-1)-(m-1))\frac{m+n-1}{2} = \frac{(n-m)(m+n-1)}{2}.$$



Exercice 5.

(a) On peut noter que M est un nombre réel (fini) par continuité de f sur le segment $[a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a $0 \leq f(x) \leq M$. Par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit $f(x)^n \leq M^n$. En intégrant cette inégalité sur $[a,b]$, on arrive à $\displaystyle\int_a^b f(x)^n dx \leq M^n(b-a)$. Puisque la fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{n}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient : $u_n \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$.

(b) Par continuité de f sur le segment $[a,b]$, f y atteint un maximum : il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = M$. Par continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b], \quad |x - x_0| \leq \delta \implies f(x) \geq M - \epsilon.$$

Si $x_0 < b$, on peut supposer $x_0 + \delta < b$ (quitte à rétrécir δ) et alors $[c,d] = [x_0, x_0+\delta]$ convient. Si $x_0 = b$, on peut de même supposer $b - \delta > a$ et alors $[c,d] = [b-\delta, b]$ convient.

(c) Si f est identiquement nulle, (u_n) est la suite constante à 0. Sinon, $M > 0$. Soit $\epsilon \in]0, M[$. Par (b), on dispose d'un segment $[c,d]$ de longueur non nulle où $f \geq M - \epsilon$. Puisque $M - \epsilon \geq 0$, on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f^n \geq (M-\epsilon)^n$. En intégrant, il vient $\displaystyle\int_c^d f^n \geq (M-\epsilon)^n(d-c)$. Par positivité de f, la relation de Chasles donne $\displaystyle\int_a^b f^n \geq (M-\epsilon)^n(d-c)$ et, finalement, $u_n \geq (M-\epsilon)(d-c)^{\frac{1}{n}}$. Avec le (a), on obtient l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad (M-\epsilon)(d-c)^{\frac{1}{n}} \leq u_n \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

Pour $t > 0$, $t^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(t)}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Le membre de droite tend donc vers M, et celui de gauche vers $M - \epsilon$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, \qquad M - 2\epsilon \leq u_n \leq M + \epsilon.$$

Et cela prouve que (u_n) converge vers M.

Exercice 6.

(a) Pour $t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$. En intégrant cet encadrement, on trouve

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. L'inégalité de gauche de (a) donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq 0.$$

Donc (u_n) est décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité de droite de (a) donne

$$u_n \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} - \ln(n) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} - \ln(n) = \ln(n+1) - \ln(n) \geq 0.$$

Donc (u_n) est minorée par 0. La suite (u_n), décroissante et minorée, converge vers $\gamma \in \mathbb{R}$, ce qui signifie exactement que $u_n = \gamma + o(1)$ ou encore

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1) \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

Et comme (u_n) reste positive, sa limite γ est aussi positive.

Exercice 7.

(a) Par hypothèse, $f(x) - p(x) = o(x^n)$, donc $\dfrac{f(x)-p(x)}{x^n}$ tend vers 0 quand $x \to 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, si $|x| < \eta$, $\left|\dfrac{f(x)-p(x)}{x^n}\right| \leq \epsilon$ ou encore $|f(x) - p(x)| \leq \epsilon |x|^n$.

(b) f est continue sur l'intervalle I donc y admet une primitive F et on choisit celle qui s'annule en 0. Pour tout x dans I, on peut écrire

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x p(t)dt + \int_0^x \underbrace{(f(t) - p(t))}_{r(t)}dt.$$

Soit $\epsilon > 0$, auquel on associe un η comme au (a). Si $0 < x < \eta$, on a avec (a) :

$$\left|\int_0^x r(t)dt\right| \leq \int_0^x |r(t)|dt \leq \epsilon \int_0^x t^n dt = \frac{\epsilon\, x^{n+1}}{n+1} \leq \epsilon\, x^{n+1}.$$

Si $-\eta < x < 0$, on pose $x' = -x$ et le changement de variable $s = -t$ donne

$$\left|\int_0^x r(t)dt\right| = \left|\int_0^{x'} r(-s)ds\right| \leq \int_0^{x'} |r(-s)|dt \leq \epsilon \int_0^{x'} s^n ds = \frac{\epsilon\,(x')^{n+1}}{n+1} \leq \epsilon\, |x|^{n+1}.$$

On a donc prouvé le résultat suivant :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, 0 < |x| < \eta \implies \left|\frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x r(t)dt\right| \leq \epsilon.$$

Cela veut dire que $\dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x r(t)dt$ tend vers 0 quand $x \to 0$, ou encore que $\displaystyle\int_0^x r(t)dt = o(x^{n+1})$ quand $x \to 0$. D'où :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)dt + o(x^{n+1}) \\ &= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}). \end{aligned}$$

(c) Considérons $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule quand $x \to 0$. En partant du développement limité $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$ et en changeant x en $-x^2$, on trouve

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Le (b) permet d'intégrer terme à terme ce développement limité :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

En particulier, $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$.

Exercice 8. Supposons que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable. Ses intégrales supérieure I_+ et inférieure I_- sont donc égales. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de I_+, il existe une fonction φ en escaliers sur $[a,b]$ telle que $f \leq \varphi$ et $I_+ \leq \int_a^b \varphi \leq I_+ + \epsilon$. Par définition de I_-, il existe une fonction ψ en escaliers sur $[a,b]$ telle que $\psi \leq f$ et $I_- - \epsilon \leq \int_a^b \psi \leq I_-$. Alors $\psi \leq f \leq \varphi$ et $\int_a^b (\varphi - \psi) \leq I_+ + \epsilon - I_- + \epsilon = 2\epsilon$.

Réciproquement supposons que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier ψ et φ telles que

$$\psi \leq f \leq \varphi \quad \text{et} \quad \int_a^b (\varphi - \psi) \leq \epsilon.$$

En particulier, f est comprise entre deux fonctions en escalier donc bornée. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant les fonctions φ et ψ données par l'hypothèse, on trouve que les intégrales supérieure et inférieure de f vérifient $I_+ \leq \int_a^b \varphi$ et $I_- \geq \int_a^b \psi$ donc $I_+ - I_- \leq \int_a^b (\varphi - \psi) \leq \epsilon$. Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, $I_+ - I_- \leq 0$. Comme on a toujours $I_- \leq I_+$, on en conclut que $I_+ = I_-$: f est intégrable.

Exercice 9.

(a) L'intégrale est bien définie puisque f est intégrable sur un segment contenant $[\alpha, \beta]$. Comme f est positive, $\int_\alpha^\beta f \geq 0$. De plus, la relation de Chasles donne

$$\underbrace{\int_a^\alpha f}_{\geq 0} + \int_\alpha^\beta f + \underbrace{\int_\beta^b f}_{\geq 0} = \int_a^b f = 0,$$

donc $\int_\alpha^\beta f \leq 0$. Finalement, cette intégrale est nulle.

(b) Comme f est intégrable d'intégrale nulle sur $[\alpha, \beta]$, l'intégrale supérieure de f sur $[\alpha, \beta]$ est nulle. Par définition, cela veut dire qu'on peut trouver des fonctions en escaliers $\phi \geq f$ dont l'intégrale est arbitrairement proche de 0, donc par exemple telles que $\int_\alpha^\beta \phi \leq (\beta - \alpha)\epsilon$.

(c) Soit $\{\alpha = x_0 < \cdots < x_p = \beta\}$ une subdivision adaptée à la fonction en escalier ϕ. Si $\phi > \epsilon$ sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$, $\int_\alpha^\beta \phi > \sum_{i=1}^{p} (x_i - x_{i-1})\epsilon = (\beta - \alpha)\epsilon$, ce qui n'est pas vrai. Donc sur l'un de ces intervalles, disons $]x_{k-1}, x_k[$, on a bien $\phi \leq \epsilon$. Il suffit de choisir un segment $[\alpha', \beta'] \subset]x_{k-1}, x_k[$ et de longueur non nulle.

(d) En choisissant $\epsilon = 1$, on obtient donc un segment $[\alpha_0, \beta_0] \subset [\alpha, \beta]$, avec $\alpha_0 < \beta_0$ et sur lequel $f \leq 1$.

Par récurrence, on peut de même bâtir des segments $[\alpha_n, \beta_n]$ tels que $[\alpha_n, \beta_n] \subset [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$, $\alpha_n < \beta_n$ et $f \leq 1/2^n$ sur $[\alpha_n, \beta_n]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, on vient de construire $[\alpha_0, \beta_0]$ (initialisation) et, si on suppose $[\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$ construit pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on bâtit $[\alpha_n, \beta_n]$ en appliquant (b) et (c) dans le segment $[\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$ et avec $\epsilon = 1/2^n$.

La suite (α_n) est croissante, majorée par b, donc converge vers un point x. Comme (α_n) reste dans l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$, sa limite x y est aussi. Pour évaluer $f(x)$, il faut prendre garde au fait que f n'est pas supposée continue. Fixons $N \in \mathbb{N}$ et observons que pour $n \geq N$, $\alpha_N \leq \alpha_n (\leq \beta_n) \leq \beta_N$, donc $\alpha_N \leq x \leq \beta_N$ en passant à la limite ; ceci assure que $f(x) \leq 1/2^N$. Comme c'est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$, $f(x) \leq 0$. Comme f est positive, $f(x) = 0$.

(e) On vient de voir que si f est intégrable, positive et d'intégrale nulle sur $[a, b]$, alors f s'annule au moins une fois dans chaque sous-segment de longueur non nulle de $[a, b]$.

Réciproquement, supposons que f est intégrable, positive et s'annule au moins une fois dans chaque sous-segment de longueur non nulle de $[a, b]$. Soit $\psi \leq f$ une fonction en escalier et soit $\{a = x_0 < \cdots < x_p = b\}$ une subdivision adaptée à ψ. Comme f s'annule au moins une fois dans chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, la fonction en escalier ψ y est constante à une valeur négative. Donc en particulier $\displaystyle\int_a^b \psi \leq 0$. Comme c'est vrai pour toute fonction en escalier $\psi \leq f$, cela veut dire que l'intégrale inférieure de f est négative. Comme f est intégrable, cela signifie $\displaystyle\int_a^b f \leq 0$. Comme f est positive, son intégrale aussi, et finalement cette intégrale est nulle.

La condition nécessaire et suffisante est que f s'annule au moins une fois sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tel que $\alpha < \beta$.

Exercice 10. Il s'agit de sommes de Riemann !

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$ avec $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

La fonction f étant continue sur $[0, 1]$, le théorème sur les sommes de Riemann dit que (u_n) converge vers

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2).$$

De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g(k/n)$ avec $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$. La fonction g étant continue, (v_n) converge vers

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+3} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}dt}{3(x^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

(grâce au changement de variable $x = \sqrt{3}t$). Toujours selon le même principe, (w_n) converge vers

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{x\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{x\pi}{3}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin\left(\frac{2x\pi}{3}\right) dx = \frac{3}{4\pi}\left(1 - \cos(2\pi/3)\right) = \frac{9}{8\pi}.$$

Exercice 11.

(a) La fonction ϕ_i, affine, est de la forme indiquée : il s'agit de calculer les coefficients α_i et β_i. Le premier est la pente de la droite représentant graphiquement ϕ : $\alpha_i = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$. Le second s'obtient en calculant au point x_i : $\beta_i = \phi_i(x_i) = f(x_i)$.

(b) Pour $i = 1, \ldots, n-1$, $\phi_{i-1}(x_i) = f(x_i) = \phi_i(x_i)$, donc ϕ est bien définie et continue (les morceaux affines se recollent bien). Son intégrale est donc bien définie et c'est la somme des intégrales des ϕ_i sur $[x_i, x_{i+1}]$, i.e.

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\alpha_i(x - x_i) + \beta_i)dx &= \alpha_i \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \beta_i(x_{i+1} - x_i) \\ &= (x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}.\end{aligned}$$

(Si f est positive, disons, on reconnaît l'aire du trapèze situé sous le graphe : hauteur fois demi-somme des longueurs des côtés parallèles.)

En sommant, on conclut :

$$\int_a^b \phi = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}.$$

(c) Le théorème des accroissements finis donne un réel $\mu \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que

$$\alpha_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(\mu).$$

Ainsi, avec $\beta_i = f(x_i)$, on trouve

$$f(x) - \phi_i(x) = f'(\mu)\,(x - x_i) + f(x_i) - f(x).$$

Et le théorème des accroissements finis donne aussi un réel $\nu \in [x_i, x_{i+1}]$ tel que $f(x_i) - f(x) = f'(\nu)(x_i - x)$, donc on obtient

$$f(x) - \phi_i(x) = (f'(\mu) - f'(\nu))(x - x_i).$$

(d) Puisque f est de classe C^2 sur le segment $[a, b]$, $|f''|$ est continue sur ce segment donc bornée : soit M un majorant de $|f''|$ sur $[a, b]$.

Soit x un réel du segment $[x_i, x_{i+1}]$, de longueur $(b - a)/n$. Pour majorer $|f(x) - \phi_i(x)|$, on utilise la formule ci-dessus en observant que l'inégalité des accroissements finis (appliquée à f') borne $|f'(\mu) - f'(\nu)|$ par $M|\mu - \nu|$. On en déduit :

$$|f(x) - \phi(x)| = |f(x) - \phi_i(x)| \leq M|\mu - \nu||x - x_i| \leq M\frac{(b - a)^2}{n^2}.$$

Ainsi :

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b \phi\right| = \left|\int_a^b (f - \phi)\right| \leq (b - a)\sup_{[a,b]} |f - \phi| \leq M\frac{(b - a)^3}{n^2}.$$

Exercice 12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme l'exponentielle est égale à toutes ses dérivées et vaut 1 en 0, la formule de Taylor-Lagrange dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe c_n entre 0 et x tel que

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{c_n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La suite (e^{c_n}) est bornée (par e^x si $x \geq 0$, par 1 si $x \leq 0$). La suite $(x^{n+1}/(n+1)!)$ tend vers 0, comme on l'a vu dans la feuille de TD 2. Donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$ converge vers e^x.

Exercice 13. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La formule de Taylor-Lagrange donne $c \in [0, x]$ tel que

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} \ln^{(3)}(1+c)$$

Puisque $\ln^{(3)}(1+c) = \dfrac{2}{(1+c)^3}$ est compris entre 0 et 2, cela implique

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3}.$$

Faisons $x = 0,003 = 3.10^{-3}$. Alors $x^3/3 = 9.10^{-9} \leq 10^{-8}$ et

$$x - \frac{x^2}{2} = 3.10^{-3} - 4,5.10^{-6} = 0,0029955.$$

Une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près est donc $0,0029955$.