Corrigé de la feuille 6 : espaces vectoriels

Exercice 1.

(a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}$ contient $(0,0,0)$ puisque $0+0=0$. Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y,z) \in A$ et $(x',y',z') \in A$, on a

$$(\lambda x + x') + (\lambda y + y') = \lambda(x+y) + (x'+y') = 0 + 0 = 0.$$

Donc $\lambda(x,y,z) + (x',y',z')$ est dans A. Ceci prouve que A est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}^3$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) Soit B l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P'(7) = 0$. Le polynôme nul est dans B, puisque ses dérivées sont nulles. Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in B$ et $Q \in B$, $\lambda P + Q$ est un polynôme réel et

$$(\lambda P + Q)'(7) = \lambda P'(7) + Q'(7) = 0 + 0 = 0.$$

Donc B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(c) Soit C l'ensemble des fonctions en escalier sur $[0,1]$. C'est une partie non vide (contenant la fonction nulle) du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{[0,1]}$ des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in C$ et $g \in C$. Choisissons une subdivision $\{0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\}$ adaptée à f et g, de sorte que f et g sont constantes sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$. Alors $\lambda f + g$ est aussi constante sur chacun de ces intervalles, donc c'est une fonction en escalier, c'est-à-dire un élément de C. On en déduit que C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2.

(a) La suite nulle est convergente. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites complexes convergentes, leur somme est aussi convergente ; et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, (λu_n) est aussi convergente. Donc l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(b) L'ensemble des suites divergentes ne contient pas la suite nulle, donc ce n'est pas un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(c) La suite nulle est bornée. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, (u_n) et (v_n) deux suites bornées respectivement par M et N. Alors la suite $(\lambda u_n + v_n)$ est bornée par $|\lambda| M + N$. Donc l'ensemble des suites bornées est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(d) La suite (u_n) constante à 1 est une suite réelle et $i(u_n)$ est constante à i donc n'est pas réelle. Cela prouve que l'ensemble des suites réelles n'est pas un sous-espace du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(e) On considère l'ensemble des suites (u_n) telles que (nu_n) tend vers 1, qui ne contient pas la suite nulle : ce n'est pas un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(f) On considère l'ensemble des suites (u_n) telles que (nu_n) tend vers 0. Il contient la suite nulle. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, si (nu_n) et (nv_n) tendent vers 0, $(n(\lambda u_n + v_n))$ tend aussi vers 0. Donc l'ensemble des suites (u_n) telles que $u_n = o(1/n)$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(g) On considère l'ensemble des suites (u_n) telles que (nu_n) est bornée. Il contient la suite nulle. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, si (nu_n) et (nv_n) sont bornées respectivement par M et N, alors la suite $(n(\lambda u_n + v_n))$ est bornée par $|\lambda|M + N$. Donc l'ensemble des suites (u_n) telles que $u_n = O(1/n)$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Sens réciproque. Si $F_1 \subset F_2$, $F_1 \cup F_2 = F_2$ est un sous-espace vectoriel par hypothèse. C'est pareil si $F_2 \subset F_1$.

Sens direct. On cherche à prouver la contraposée. On suppose donc que F_1 n'est pas inclus dans F_2 et que F_2 n'est pas inclus dans F_1. Cela donne $x_1 \in F_1$ tel que $x_1 \notin F_2$ et $x_2 \in F_2$ tel que $x_2 \notin F_1$. Si $x_1 + x_2$ est dans F_1, $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1$ devrait être dans F_1 comme différence d'éléments de F_1 ; mais, par hypothèse, ce n'est pas le cas, donc $x_1 + x_2$ n'est pas dans F_1. Le même argument montre que $x_1 + x_2$ n'est pas dans F_2 : $x_1 + x_2 \notin F_1 \cup F_2$. cela prouve que $F_1 \cup F_2$ n'est pas stable par somme donc n'est pas un sous-espace vectoriel. D'où l'implication directe.

Exercice 4.

(a) L'expression $\sqrt{2} \in \mathrm{Vect}(1)$ signifie ici qu'il existe $\lambda \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2} = \lambda \cdot 1 = \lambda$. Comme $\sqrt{2}$ est un irrationnel, ceci est faux (on l'a vu dans la première feuille de TD).

(b) De même, si $\sqrt{3} \in \mathrm{Vect}(1, \sqrt{2})$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{3} = \lambda + \mu\sqrt{2}$. On élève au carré :
$$3 = \lambda^2 + 2\lambda\mu\sqrt{2} + 2\mu^2.$$
Si λ et μ ne sont pas nuls, on peut alors exprimer $\sqrt{2}$ comme quotient de rationnels, donc comme un rationnel, ce qui n'est pas possible. Si $\mu = 0$, on trouve $\sqrt{3} = \lambda \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas vrai (même argument que pour $\sqrt{2}$). Et si $\lambda = 0$, on trouve que $\sqrt{3/2}$ est rationnel, ce qui est encore faux, pour la même raison, que nous détaillons un peu. Si c'était le cas, on aurait des entiers p et q tels que $3q^2 = 2p^2$, avec p ou q impair. Comme le membre de droite est pair, le membre de gauche aussi et cela force q à être pair (un produit d'impairs est impair) : $q = 2a$ pour un entier a. Mais alors $p^2 = 6a^2$ et p doit être pair : contradiction. Ceci prouve finalement : $\sqrt{3} \notin \mathrm{Vect}(1, \sqrt{2})$.

Exercice 5. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$. Alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 e^{a_1 x} + \cdots + \lambda_{n-1} e^{a_{n-1} x} + \lambda_n e^{a_n x} = 0,$$
soit
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 e^{(a_1 - a_n)x} + \cdots + \lambda_{n-1} e^{(a_{n-1} - a_n)x} + \lambda_n = 0.$$
Pour $i = 1, \ldots, n-1$, $a_i - a_n < 0$, donc $e^{(a_i - a_n)x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On obtient donc en passant à la limite : $\lambda_n = 0$. Donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 e^{a_1 x} + \cdots + \lambda_{n-1} e^{a_{n-1} x} = 0.$$
En répétant cet argument, on prouve successivement que tous les coefficients λ_i sont nuls. Donc la famille est libre.

Exercice 6.

(a) A est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $y = -x$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $(x, -x, z)$ où x et z décrivent l'ensemble des réels. Notons $v = (1, -1, 0)$ et $w = (0, 0, 1)$. On vient de voir que

$$A = \{xv + zw \mid x, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(v, w).$$

Comme (v, w) est visiblement libre (si $\lambda v + \mu w = 0$, $(\lambda, -\lambda, \mu) = (0, 0, 0)$, donc $\lambda = \mu = 0$), c'est donc une base de A. Et A est donc de dimension 2.

(b) B est l'ensemble des $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\begin{cases} 4t + z + 3y + 2x &= 0 \\ z + y + x &= 0 \end{cases}$$

soit, en soustrayant la seconde ligne à la première :

$$\begin{cases} 4t + 2y + x &= 0 \\ z + y + x &= 0 \end{cases}$$

B est donc l'ensemble des vecteurs de la forme $\left(x, y, -x - y, -\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right)$, où x et y sont des réels. Si on pose $v = (1, 0, -1, -1/4)$ et $w = (0, 1, -1, -1/2)$, cela revient à dire que $B = \mathrm{Vect}(v, w)$. Et cette famille est libre (si $\lambda v + \mu w = 0$, $(\lambda, \mu, \dots) = (0, 0, 0, 0)$, donc $\lambda = \mu = 0$), donc c'est une base de B et $\dim B = 2$.

Exercice 7. On observe qu'une matrice A est dans S_n si et seulement si ses coefficients a_{ij} vérifient la relation $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous les indices i et j.

Ainsi, la matrice nulle est dans S_n. Si λ est un réel et A, B des matrices de S_n, les coefficients de $\lambda A + B$ s'écrivent

$$\lambda a_{ij} + b_{ij} = \lambda a_{ji} + b_{ji},$$

donc $\lambda A + B$ est dans S_n. Ceci prouve que S_n est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

Pour calculer la dimension de S_2, on peut remarquer qu'une matrice symétrique de taille 2 s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les trois matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forment donc une famille génératrice. On vérifie vite que c'est une famille libre, donc une base. La dimension de S_2 est donc trois. Passons au cas général, qui est similaire.

Soit $A = (a_{ij}) \in S_n$. En utilisant les matrices $E_{k,l} \in M_n(\mathbb{R})$ du cours (avec un 1 en position (k, l) et des 0 ailleurs), on peut écrire :

$$A = \sum_{k,l} a_{kl} E_{k,l} = \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{kl} E_{k,l} + \sum_{k=1}^{n} a_{kk} E_{k,k} + \sum_{1 \leq l < k \leq n} a_{kl} E_{k,l}$$

(où l'on a cassé la première somme en trois morceaux selon la position relative des indices k et l : $<$, $=$ ou $>$). On peut échanger les rôles des indices (muets) k et l dans la troisième somme :

$$A = \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{kl} E_{k,l} + \sum_{k=1}^{n} a_{kk} E_{k,k} + \sum_{1 \leq k < l \leq n} a_{lk} E_{l,k}.$$

Par symétrie de A, on en tire :

$$A = \sum_{1\leq k<l\leq n} a_{kl} \underbrace{(E_{k,l} + E_{l,k})}_{F_{k,l}} + \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \underbrace{E_{k,k}}_{F_{k,k}} .$$

Ceci montre que la famille $(F_{k,l})_{1\leq k\leq l\leq n}$ est génératrice de S_n. (En fait, F_{kl} est la matrice avec des coefficients 1 en position (k,l) et (l,k) et des 0 partout ailleurs).

Pour vérifier que cette famille est libre, on suppose que des réels λ_{kl} vérifient

$$\sum_{1\leq k\leq l\leq n} \lambda_{kl} F_{kl} = 0.$$

Cela signifie :

$$\sum_{1\leq k<l\leq n} \lambda_{kl}\,(E_{k,l} + E_{l,k}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kk} E_{k,k} = 0.$$

Pour tout $k \leq l$, si on regarde le coefficient en position (k,l) dans cette égalité matricielle, on trouve exactement $\lambda_{kl} = 0$. Cela prouve que la famille est aussi libre. Et donc la famille $(F_{k,l})_{1\leq k\leq l\leq n}$ est une base de S_n.

Comptons le nombre d'éléments de $T_n = \{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq k \leq l \leq n\}$: l'entier l varie de 1 à n et, à l fixé, il y a l possibilités pour l'entier k (puisque $1 \leq k \leq l$) ; le cardinal de T_n est donc $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} l = \frac{n(n+1)}{2}$. (On peut le voir en dessinant n^2 points en carré et en comptant ceux qui sont d'un côté d'une diagonale.)

Donc S_n est de dimension $n(n+1)/2$.

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}^{[0,2]}$. Soit F l'ensemble des fonctions en escalier associées à σ. C'est une partie de l'espace vectoriel E.

Si $0 \leq a < b \leq 2$, on définit $f_{a,b} \in E$ par $f_{a,b}(x) = 1$ si $a < x < b$ et $f_{a,b}(x) = 0$ sinon.

Pour $a \in [0,2]$, on définit aussi $f_a \in E$ par $f_a(a) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq a$.

Un élément de F est alors exactement une combinaison linéaire des fonctions $f_{0,1}$, $f_{1,2}$, f_0, f_1 et f_2 (ne pas oublier que la fonction prend des valeurs quelconques aux points de la subdivision).

Autrement dit, $F = \mathrm{Vect}(f_{0,1}, f_{1,2}, f_0, f_1, f_2)$. C'est en particulier un sous-espace de E et on dispose d'une famille génératrice.

Vérifions que cette famille de cinq fonctions est libre. Soient des réels a, b, c, d, e tels que $af_{0,1} + bf_{1,2} + cf_0 + df_1 + ef_2 = 0$. Le membre de gauche est une fonction. En l'évaluant aux points $1/2$, $3/2$, 0, 1 et 2, on trouve successivement $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, $e = 0$. Donc la famille est libre . C'est donc une base de F et la dimension de F est 5.

Exercice 9.

(a) Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, il suffit de montrer que la famille à $n+1$ éléments qu'on considère est libre. Soient donc des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$. Comme le polynôme P_n est de degré n, il s'écrit $c_n X^n$ plus des termes de plus petit degré ; ici, c_n est le coefficient dominant de P_n, un nombre réel non nul. Les autres polynômes P_k sont de degré au plus $n-1$. Donc en dérivant l'équation n fois, on obtient $\lambda_n c_n n! = 0$ et donc $\lambda_n = 0$. On est ramené à l'équation $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k = 0$ qu'on peut dériver $n-1$ fois pour voir que $\lambda_{n-1} = 0$. En répétant cette opération, on vérifie successivement que $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_0 = 0$. Donc $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre. Et c'est ainsi une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) La famille considérée compte 3 éléments et $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3. Pour voir que c'est une base, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Soient trois réels a, b et c tels que $a(X+1) + b(X-1) + c(X^2+2X) = 0$. Les coefficients devant chaque puissance de X doivent être nuls : $c = 0$, $a+b+2c = 0$ et $a-b = 0$. On en déduit $b = a$ puis $a = b = c = 0$. Donc la famille est libre et c'est finalement une base.

Les coordonnées α, β, γ de X^2 dans la base $(X+1, X-1, X^2+2X)$ sont les nombres réels tels que $X^2 = \alpha(X+1) + \beta(X-1) + \gamma(X^2+2X)$. Par identification des coefficients, cela revient à : $1 = \gamma$, $0 = \alpha+\beta+2\gamma$, $0 = \alpha-\beta$. Les valeurs $\alpha = \beta = -1$ et $\gamma = 1$ conviennent.

(c) A contient le polynôme nul. Si P et Q sont des combinaisons linéaires de X^{2k+1}, $k \in \mathbb{N}$, il en de même pour $\lambda P + Q$, pour tout nombre complexe λ. Donc A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$. B contient $0 = X\,0$, il est stable par somme et homothétie parce que A l'est : c'est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

Par définition $A+B$ est l'ensemble des polynômes P s'écrivant

$$P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^{2i+1} + X \sum_{j=0}^{n} b_j X^{2j+1} = \sum_{i=0}^{m} a_i X^{2i+1} + \sum_{j=0}^{n} b_j X^{2j+2}$$

où m et n sont des entiers naturels et les coefficients a_i et b_j sont complexes. Cette expression recouvre tout polynôme dont le terme constant est nul, donc $A + B = \{XQ \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}$. C'est l'ensemble des polynômes complexes s'annulant en 0.

Exercice 10.

(a) Soient des réels λ et μ tels que $\lambda \sin + \mu \cos = 0$, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0.$$

En faisant $x = \pi/2$ puis $x = 0$, on trouve $\lambda = 0$ puis $\mu = 0$. Donc $(\sin, \cos)$ est une famille libre.

(b) Soit F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe des réels A et ϕ pour lesquels on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A \sin(x + \phi).$$

Pour tous $A, \phi, x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$A \sin(x+\phi) = A \cos(\phi) \sin(x) + A \sin(\phi) \cos(x).$$

Ceci donne l'inclusion $F \subset \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$.

Réciproquement, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = a\ \sin(x) + b\ \cos(x)$, pour des constantes réelles a et b. Le vecteur (a, b) de $\mathbb{R}^2$ s'écrit en coordonnées

polaires $(r\cos\phi, r\sin\phi)$, avec $r \geq 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ (dit autrement, le nombre complexe $a+ib$ s'écrit $a+ib = re^{i\phi} = r\cos\phi + ir\sin\phi$).
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = r\,(\cos(\phi)\sin(x) + \sin(\phi)\cos(x)) = r\sin(x+\phi).$$

Donc $\mathrm{Vect}(\sin,\cos)$ est inclus dans F et il y a finalement égalité entre ces deux ensembles. *Au passage, cela prouve que F est un sous-espace vectoriel, ce qui n'est pas évident a priori.*

Exercice 11. $H_1 \cap H_2$ est un sous-espace de dimension finie comme intersection de deux sous-espaces de dimension finie. On dispose de la formule

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) = 2n - 2 - \dim(H_1 + H_2).$$

La somme $H_1 + H_2$ est un sous-espace de E contenant H_1. En particulier, sa dimension est comprise entre celle de H_1 et celle de E : c'est $n-1$ ou n. Supposons que $\dim(H_1 + H_2) = n-1$. Avec $H_1 \subset H_1 + H_2$ et $\dim(H_1) = n-1$, on en déduit que $H_1 = H_1 + H_2$. Mais alors $H_2 \subset H_1 + H_2 = H_1$ et, par égalité des dimensions, $H_2 = H_1$, ce qui contredit les hypothèses. Donc $\dim(H_1 + H_2) = n$, i.e. $H_1 + H_2 = E$. Finalement :

$$\dim(H_1 \cap H_2) = 2n - 2 - n = n - 2.$$

Exercice 12.

(a) F_1 et F_2 sont deux parties de E contenant la fonction nulle. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in E$. Si f et g sont constantes, $\lambda f + g$ est aussi constante. Si f et g sont d'intégrale nulle, alors

$$\int_0^1 (\lambda f + g) = \lambda \int_0^1 f + \int_0^1 g = 0 + 0 = 0.$$

Ainsi, F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E.

(b) Soit $f \in F_1 \cap F_2$. Alors f est constante à une valeur $c \in \mathbb{R}$ et d'intégrale nulle, donc

$$0 = \int_0^1 f = \int_0^1 c = c,$$

de sorte que f est nulle. Donc le sous-espace $F_1 \cap F_2$ est réduit à $\{0\}$.

(c) Par définition, $F_1 + F_2$ est inclus dans E. Il s'agit de voir l'inclusion inverse. Soit $f \in E$. Notons $c = \displaystyle\int_0^1 f$. Alors

$$\int_0^1 (f - c) = \int_0^1 f - \int_0^1 c = c - c = 0.$$

Donc $f = (f-c) + c$ est la somme de $f - c \in F_1$ et $c \in F_2$. Cela prouve l'inclusion $E \subset F_1 + F_2$. Avec (b), cela prouve : $F_1 \oplus F_2 = E$.

(d) Une intégration par parties donne :

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - 0 - (e-1) = 1.$$

Ainsi, comme ci-dessus, f est la somme de $f - 1 \in F_1$ et de $1 \in F_2$.

Exercice 13.

(a) On suit la technique vue en cours, en considérant le trinôme associé : $X^2 - 3X + 2$. Ses racines sont 1 et 2. Une base de $\mathcal{S}$ est donc (v, w), où $v = (v_n)$ est la suite constante à 1 et $w = (w_n) = (2^n)$.

(b) Tout élément (u_n) de $\mathcal{S}$ s'écrit $(u_n) = a(v_n) + b(w_n) = (a + b2^n)$, pour des nombres complexes a et b. Les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$ se traduisent par : $a + b = 1$ et $a + 2b = 3$, soit $b = 2$ et $a = -1$. L'unique solution est donc $(u_n) = (-1 + 2^{n+1})$.

(c) Puisque v et w sont réelles, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $av + bw$ est une suite réelle de $\mathcal{S}$. Réciproquement, pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, si $u = av + bw \in \mathcal{S}$ est réelle, en prenant la partie imaginaire, on trouve $\mathrm{I}m(a)v + \mathrm{I}m(b)w = 0$. Par liberté de (v, w), $\mathrm{I}m(a) = \mathrm{I}m(b) = 0$, donc a et b sont des réels. Cela prouve que les suites réelles de $\mathcal{S}$ sont exactement les suites $(a + b2^n)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 14.

(a) Le trinôme associé est $X^2 - 2X + 2$, son discriminant est -4 et ses racines sont $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$. Donc il existe des complexes a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{2}^n \left(ae^{\frac{in\pi}{4}} + be^{-\frac{in\pi}{4}}\right).$$

Avec les formules d'Euler, cela revient à l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{2}^n \left(\alpha \cos(n\pi/4) + \beta \sin(n\pi/4)\right).$$

Les conditions initiales $u_0 = u_1 = 1$ signifient :

$$\alpha = 1 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{2}\left(\alpha \cos(\pi/4) + \beta \sin(\pi/4)\right) = 1,$$

d'où l'on tire $\beta = 0$. Ainsi, l'unique solution est $(u_n) = (\sqrt{2}^n \cos(n\pi/4))$.

(b) Le trinôme associé est $X^2 - (2 + 2i)X + 2i$, son discriminant est nul et sa racine double est $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$. Donc il existe des complexes a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{2}^n (a + bn)e^{\frac{in\pi}{4}}.$$

Les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ signifient :

$$a = 1 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{2}(a + b)e^{\frac{i\pi}{4}} = 0,$$

d'où l'on tire $b = -1$. Ainsi, l'unique solution est $(u_n) = (\sqrt{2}^n (1 - n)e^{\frac{in\pi}{4}})$.