

## Correction de la feuille 7 : applications linéaires

### Exercice 1.

(a) Pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$f(\lambda P + Q) = \lambda P(2) + Q(2) = \lambda f(P) + f(Q).$$

Donc  $f$  est linéaire.

(b)  $g(2X) = 4X^2 \neq 2X^2 = 2g(X)$ , donc  $g$  n'est pas linéaire.

(c) Pour tous  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{Tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B).$$

Donc  $\text{Tr}$  est linéaire.

(d) Si  $n \geq 2$ ,  $\det(2I_n) = 2^n \neq 2 = 2 \det(I_n)$ , donc  $\det$  n'est pas linéaire. Si  $n = 1$ ,  $\det$  est l'application identité de  $\mathbb{R}$ , donc  $\det$  est linéaire.

**Exercice 2.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $f = f_A$ . Donc  $f$  est linéaire. C'est un

isomorphisme si et seulement si le système linéaire  $f(X) = AX = B$  admet une unique solution  $X$  pour tout  $B \in \mathbb{R}^3$ . On cherche donc à inverser  $A$ , par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1) \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2) \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & -12 & -3 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3, L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \end{array}$$

Comme on a pu obtenir la matrice  $I_3$  à gauche, la matrice  $A$  est inversible et son inverse  $A^{-1}$  est la matrice en bas à droite. Cela prouve que  $f$  est un isomorphisme. En outre, sa réciproque est  $f_{A^{-1}}$  (l'équation  $X = f^{-1}(B)$  signifie  $f(X) = B$ , soit  $AX = B$  ou encore  $X = A^{-1}B$ , de sorte que  $f^{-1}(B) = A^{-1}B$ ). Donc la réciproque de  $f$  est donnée par :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x, y, z) = (-24x + 18y + 5z, 20x - 15y - 4z, -5x + 4y + z).$$

**Exercice 3.**

- (a) La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  est de déterminant  $-2 \neq 0$  donc elle est inversible. Son noyau est donc  $\{0\}$ , de dimension 0, et son image est  $\mathbb{R}^2$ , de dimension 2. Une base du noyau est la famille vide, une base de l'image est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , par exemple.
- (b) On applique l'algorithme du pivot de Gauss au système linéaire  $AX = B$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b - 4a \\ c - 2a \end{pmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \frac{b - 4a}{7} \\ -2a + b - c \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2, \text{ puis } L_2 \leftarrow \frac{L_2}{7})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-a + 2b}{7} \\ \frac{b - 4a}{7} \\ -2a + b - c \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2)$$

Comme la matrice obtenue à gauche est échelonnée réduite, on en déduit tout. Il y a 2 pivots, donc l'image est de dimension 2 et le noyau de dimension  $3-2=1$ . L'image est l'ensemble des  $(a, b, c)$  tels que  $-2a + b - c = 0$ . Elle contient par exemple les deux premières colonnes de  $A$ , qui ne sont pas colinéaires : comme l'image est de dimension 2, une base de l'image est donc  $((1, 4, 2), (-2, -1, 3))$ . Quant au noyau, c'est l'ensemble des  $(x, y, z)$  tels que  $x + \frac{5z}{7} = 0$  et  $y - \frac{8z}{7} = 0$ , c'est-à-dire  $\{(-5t, 8t, 7t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Une base du noyau est donc  $((-5, 8, 7))$ .

- (c) On effectue l'algorithme du pivot de Gauss sur le système linéaire  $AX = B$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & -4 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ . Pour écourter le calcul, on

cherche seulement une forme échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & -4 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -6 & -8 \\ 0 & -7 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & -6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b - 5a \\ c + 3a \\ d - 6a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b - 5a \\ -2a + b + c \\ -a - b + d \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2, L_4 \leftarrow L_4 - L_2)$$

On trouve donc 3 pivots : l'image est de dimension 3 et le noyau de dimension  $4-3=1$ . L'image est l'ensemble des  $(a, b, c, d)$  tels que  $-a - b + d = 0$ . Elle contient donc les vecteurs de la famille  $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$ , qui est libre et compte 3 éléments : c'est donc une base de l'image. Le noyau est l'ensemble des  $(x, y, z, t)$  tels que  $x - y + z + t = 0$ ,  $7y - 6z - 8t = 0$  et  $-3t = 0$ , c'est-à-dire  $\{(-s, 6s, 7s, 0) \mid s \in \mathbb{R}\}$ . Une base du noyau est  $((-1, 6, 7, 0))$ .

- (d) Pour étudier la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , on peut suivre la même méthode...

ou observer que les trois premières colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes (vérification rapide) ; ce sont des éléments de l'image, donc l'image est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  de dimension au moins 3 : l'image est  $\mathbb{R}^3$  tout entier. Le théorème du rang dit alors que le noyau est de dimension  $4 - 3 = 1$ . Et on voit que  $(1, 1, 1, -4)$  est un élément non nul du noyau de  $A$  (si on ne le voit pas, on résout le système  $AX = 0$ ) : une base du noyau est donc  $((1, 1, 1, -4))$ .

#### Exercice 4.

- (a) Pour tous  $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$f(\lambda u + v) = (\lambda u_0 + v_0, \dots, \lambda u_{p-1} + v_{p-1}) = \lambda(u_0, \dots, u_{p-1}) + (v_0, \dots, v_{p-1})$$

de sorte que  $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$ . Donc  $f$  est linéaire.

- (b) Le noyau de  $f$  est l'ensemble des suites  $u$  telles que  $u_0 = \dots = u_{p-1} = 0$ . Il n'est pas réduit à  $\{0\}$  donc  $f$  n'est pas injective.

Pour tout  $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ , la suite  $u$  définie par  $u_n = a_n$  si  $0 \leq n \leq p-1$  et  $u_n = 0$  sinon vérifie  $f(u) = (a_0, \dots, a_{p-1})$ . Donc l'image de  $f$  est  $\mathbb{C}^p$ . Ainsi,  $f$  est surjective.

#### Exercice 5.

- (a) Soit  $w \in F$ . Par surjectivité de  $f$ , il existe  $v \in E$  tel que  $f(v) = w$ . Comme  $(v_1, \dots, v_p)$  est une famille génératrice de  $E$ , il existe des scalaires  $a_1, \dots, a_p$  tels que  $v = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p$ . Alors :

$$w = f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_p v_p) = a_1 f(v_1) + \dots + a_p f(v_p).$$

Donc  $(f(v_1), \dots, f(v_p))$  est une famille génératrice de  $F$ .

- (b) Soient des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  tels que  $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_p f(v_p) = 0$ . Soit  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$ . Alors :

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_p f(v_p) = 0.$$

Donc  $v$  est dans  $\text{Ker } f = \{0\}$  (injectivité de  $f$ ). Donc  $v = 0$ , c'est-à-dire  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$ . Comme la famille  $(v_1, \dots, v_p)$  est libre, cela veut dire que les coefficients  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont tous nuls. Cela prouve que  $(f(v_1), \dots, f(v_p))$  est libre.

### Exercice 6.

- (a) Le produit de deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  est bien dans  $M_n(\mathbb{R})$  :  $f$  envoie bien  $M_n(\mathbb{R})$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ . De plus, pour tous  $M, N \in M_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N).$$

Donc  $f$  est linéaire et c'est finalement un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$ .

- (b) Supposons  $A$  inversible. Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $f(M) = 0$ . Alors  $AM = 0$ . En multipliant à gauche par l'inverse de  $A$ , on obtient  $M = 0$ . Le noyau de  $f$  est donc trivial, donc  $f$  est injective. Comme  $f$  est un endomorphisme, c'est donc un isomorphisme.

Réciproquement, supposons que  $f$  est un isomorphisme. Par surjectivité, il existe  $M \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $AM = I_n$ . Alors  $\det A \times \det M = \det(AM) = 1$ . Donc  $\det A$  n'est pas nul :  $A$  est inversible.

Cela prouve l'équivalence.

- (c) Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$ . Notons  $C_1(M), \dots, C_n(M)$  ses colonnes. Alors  $AM = 0$  si et seulement si  $AC_j(M) = 0$  pour  $j = 1, \dots, n$ . Le noyau de  $f$  est donc formé des matrices dont toutes les colonnes sont dans  $\text{Ker } A$ .

- (d) On reprend les notations ci-dessus et on les amplifie en notant

$$C : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$$

l'application définie par  $C(M) = (C_1(M), \dots, C_n(M))$ . Par définition des opérations sur les matrices,  $C$  est linéaire. Et c'est une bijection (la donnée d'une matrice équivaut à la donnée de ses colonnes). Donc c'est un isomorphisme.

Or on a montré ci-dessus que  $C(\text{Ker } f) = \text{Ker } A \times \dots \times \text{Ker } A$  ( $n$  fois). Puisque  $C$  est un isomorphisme, la dimension de  $\text{Ker } f$  est donc celle du membre de droite, soit  $n \dim \text{Ker } A$  (formule pour la dimension d'un produit cartésien).

Avec le théorème du rang,

$$\text{rg}(f) = \dim M_n(\mathbb{R}) - \dim \text{Ker } f = n^2 - n \dim \text{Ker } A = n(n - \dim \text{Ker } A).$$

### Exercice 7.

- (a) Soit  $x \in E$ . Alors  $x = x - p(x) + p(x)$ , avec  $p(x) \in \text{Im } p$  et

$$p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$$

donc  $x - p(x) \in \text{Ker } p$ . Cela prouve :  $E = \text{Ker } p + \text{Im } p$ .

En outre, si  $x$  est dans  $\text{Ker } p \cap \text{Im } p$ , on a  $p(x) = 0$  et  $x = p(y)$  pour un vecteur  $y$  de  $E$ . Alors  $0 = p(x) = p \circ p(y) = p(y)$ , donc  $p(y) = 0$ , i.e.  $x = 0$ . Cela prouve que  $\text{Ker } p \cap \text{Im } p$  est réduit à  $\{0\}$ .

Donc  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ .

- (b) Soit  $x \in E$ . D'après (a), on a une écriture unique  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in \text{Ker } p$  et  $x_2 \in \text{Im } p$ . En fait, on a même vu ci-dessus que  $x_2 = p(x)$ . Ainsi,  $p(x)$  est bien la composante  $x_2 \in \text{Im } p$  dans cette décomposition et cela prouve que  $p$  est la projection sur  $\text{Im } p$ , parallèlement à  $\text{Ker } p$ .

**Exercice 8.**

- (a) Pour tout  $x \in E$ ,  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ . Donc  $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$  et  $\text{rg}(f + g) = \dim \text{Im}(f + g) \leq \dim(\text{Im } f + \text{Im } g)$ . Avec la formule pour la dimension d'une somme de sous-espaces, il vient alors :

$$\text{rg}(f + g) \leq \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Im } g) = \text{rg } f + \text{rg } g.$$

- (b) Pour tout  $x \in E$ ,  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \in \text{Im } f$ . Donc  $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im } f$  et

$$\text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg}(f).$$

Soit  $h : \text{Im } g \rightarrow E$  l'application linéaire définie par  $h(y) = f(y)$ ; c'est en fait la restriction de  $f$  à l'image de  $g$ . En lui appliquant le théorème du rang, on trouve

$$\dim \text{Im } h = \dim \text{Im } g - \dim \text{Ker } h = \text{rg}(g) - \dim \text{Ker } h.$$

Les éléments de  $\text{Im } h$  sont exactement les  $f(y)$  avec  $y \in \text{Im } g$ , c'est-à-dire les  $f(g(x))$  avec  $x \in E$ . Autrement dit,  $\text{Im } h = \text{Im } f \circ g$ . L'égalité ci-dessus implique donc

$$\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(g) - \dim \text{Ker } h.$$

D'une part, cette égalité donne  $\text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg}(g)$  et donc finalement

$$\text{rg}(f \circ g) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g)).$$

D'autre part, elle permet de minorer  $\text{rg}(f \circ g)$  en majorant  $\dim \text{Ker } h$ . Or le noyau de  $h$  est inclus dans celui de  $f$  (par construction, si  $h(y) = 0$ ,  $f(y) = 0!$ ), donc

$$\dim \text{Ker } h \leq \dim \text{Ker } f = n - \text{rg}(f)$$

en utilisant le théorème du rang pour  $f$ . En reportant dans l'égalité ci-dessus, il vient

$$\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(g) - \dim \text{Ker } h \geq \text{rg}(g) - n + \text{rg}(f).$$

**Exercice 9.**

- (a) Comme  $f(1, 0) = (2, 0, 3)$  et  $f(0, 1) = (7, -1, -2)$ , la matrice de  $f$  dans les

bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  est  $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ .

- (b) Pour vérifier que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont des bases, il suffit par exemple d'observer que

les déterminants  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$  et  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} = 6$  ne sont pas

nuls.

- (c) Puisque  $f(1, 1) = (9, -1, 1) = 8(1, 0, 0) + (1, -1, 1)$  et  $f(1, -1) = (-5, 1, 5) =$

$-5(1, 0, 0) + (1, -1, 1)$ , la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  est  $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 10.** La dérivation est une opération linéaire et elle transforme tout polynôme en un polynôme de degré plus petit, donc elle définit en particulier une application linéaire de  $\mathbb{R}^3[X]$  dans  $\mathbb{R}^3[X]$ , i.e. un endomorphisme  $D$  de  $\mathbb{R}^3[X]$ . Pour tout entier naturel  $k$ ,  $(X^k)' = kX^{k-1}$ , donc la matrice de  $D$  dans la base

$$(1, X, X^2, X^3) \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11.**

(a) Le trinôme  $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$  admet comme seule racine complexe 1. Une base de  $E$  est donc  $((1), (n))$ .

(b) Pour tous  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \in E$ ,

$$f(\lambda a + b) = (\lambda a_{n+1} + b_{n+1}) = \lambda(a_{n+1}) + (b_{n+1}) = \lambda f(a) + f(b).$$

Donc  $f$  est linéaire. De plus,  $f((1)) = (1)$  et  $f((n)) = (n+1) = (1) + (n)$  sont des éléments de  $E$ , donc  $f$  est un endomorphisme de  $E$ . Et sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(c) Par la définition de  $f$ ,  $f(u) = (n+4)$ . On peut aussi écrire  $u = 3(1) + (n)$ .

Comme  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on en déduit  $f(u) = 4(1) + (n) = (n+4)$ .

**Exercice 12.**

(a) Puisque  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = -14 \neq 0$ ,  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Et la matrice de

$$\text{passage de } \mathcal{B} \text{ à } \mathcal{B}' \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Comme  $\deg e'_k = k$  pour  $0 \leq k \leq 4$ ,  $\mathcal{B}' = (e'_0, \dots, e'_4)$  est une base de  $\mathbb{R}_4[X]$ .

$$\text{La matrice de passage de } \mathcal{B} \text{ à } \mathcal{B}' \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13.**

(a) On sait que  $E^* = L(E, \mathbb{R})$  est de dimension  $\dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = n$ , donc il suffit de vérifier que la famille est libre. Soient des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^* = 0. \text{ Pour tout entier } i \text{ entre 1 et } n, \text{ on en déduit}$$

$$0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^*(e_i) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{ik} = \lambda_i.$$

Donc tous les coefficients  $\lambda_i$  sont nuls. Cela prouve que  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$ .

(b) Si on écrit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , on a par linéarité :

$$e_k^*(x) = \sum_{i=1}^n x_i e_k^*(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ik} = x_k.$$

(c) Pour tout  $f \in E^*$ ,  $\phi^*(f) = f \circ \phi$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  et elle est linéaire comme composée d'applications linéaires. Donc  $\phi^*$  est une application de  $E^*$  dans  $E^*$ . Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in E^*$ . Pour tout  $x \in E$ , on a :

$$\phi^*(\lambda f + g)(x) = \lambda f(\phi(x)) + g(\phi(x)) = (\lambda(\phi^* f) + \phi^* g)(x).$$

Donc  $\phi^*(\lambda f + g) = \lambda(\phi^* f) + \phi^* g$ . Cela prouve que  $\phi^*$  est linéaire. C'est donc un élément de  $L(E^*)$ .

Notons  $A = (a_{ij})$  la matrice de  $\phi$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $B = (b_{ij})$  celle de  $\phi^*$  dans la base  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ . Ces matrices sont caractérisées par les relations suivantes : pour tout entier  $j \in [1, n]$ ,

$$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad \text{et} \quad \phi^*(e_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i^*.$$

Soit un entier  $j \in [1, n]$ . Tout vecteur  $x$  de  $E$  s'écrit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  avec  $x_i = e_i^*(x)$  pour tout indice  $i$ . On calcule :

$$\phi^*(e_j^*)(x) = e_j^* \circ \phi(x) = e_j^* \left( \phi \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i}_{e_i^*(x)} \underbrace{e_j^*(\phi(e_i))}_{a_{ji}}.$$

Comme c'est vrai pour tout vecteur  $x$ , on en déduit que  $\phi^*(e_j^*) = \sum_{i=1}^n a_{ji} e_i^*$ .

Par identification, il vient  $b_{ij} = a_{ji}$  pour tous indices  $i$  et  $j$ . Donc  $B = {}^t A$  : la matrice de  $\phi^*$  est la transposée de la matrice de  $\phi$ .

(d) Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Pour tous  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $y, y' \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\theta(x)(\lambda y + y') = \sum_{i=1}^n x_i (\lambda y_i + y'_i) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i y'_i = \lambda \theta(x)(y) + \theta(x)(y').$$

Donc  $\theta(x)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire un élément de  $(\mathbb{R}^n)^*$ . De plus, pour tous  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x, x', y \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$\theta(\lambda x + x')(y) = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + x'_i) y_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x'_i y_i = (\lambda \theta(x) + \theta(x'))(y).$$

Donc  $\theta$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\theta(x) = 0$ . Alors

$$0 = \theta(x)(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Comme les  $x_i^2$  sont positifs, ils sont tous nuls :  $x = 0$ . Cela prouve que  $\theta$  est de noyau trivial, donc injective. Comme  $\mathbb{R}^n$  et  $(\mathbb{R}^n)^*$  ont la même dimension,  $\theta$  est un isomorphisme.

**Exercice 14.**

- (a) Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $P(X+1)$  et donc  $\Delta(P)$  sont dans  $\mathbb{R}_n[X]$ . De plus, pour tous  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $P, Q \in \mathbb{R}$ ,

$$\Delta(\lambda P + Q) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) = \lambda \Delta(P) + \Delta(Q).$$

Donc  $\Delta$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

- (b) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T_k$  est un polynôme de degré  $k$ . Comme on l'a vu dans un exercice précédent, cela assure que  $(T_0, \dots, T_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- (c) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \Delta(T_k) &= \frac{(X+1)\dots(X+k-1)(X+k)}{k!} - \frac{X(X+1)\dots(X+k-1)}{k!} \\ &= \frac{(X+1)\dots(X+k-1)}{k!} (X+k-X) \\ &= \frac{(X+1)\dots(X+k-1)}{(k-1)!} \\ &= T_{k-1}(X+1). \end{aligned}$$

- (d) Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $P(m)$  est entier pour tout entier  $m$ . Alors le polynôme  $\Delta(P)$  vérifie la même propriété. Et par récurrence immédiate, il en est de même de  $\Delta^k(P) = (\Delta \circ \dots \circ \Delta)(P)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Par (b),  $P = a_0 T_0 + \dots + a_n T_n$  pour certains réels  $a_0, \dots, a_n$ . En appliquant (c) à répétition et en observant que  $\Delta T_0 = 0$ , on obtient pour tout entier  $k \in [0, n]$  :

$$\Delta^k(P) = a_k T_0(X+k) + \dots + a_n T_{n-k}(X+k)$$

et, en particulier,

$$\Delta^k(P)(-k) = a_k T_0(0) + \dots + a_n T_{n-k}(0) = a_k.$$

Puisque les polynômes  $\Delta^k(P)$  prennent des valeurs entières aux entiers, les coefficients  $a_k$  sont donc entiers.

Pour voir la réciproque, il suffit de vérifier que chaque polynôme  $T_k$  prend des valeurs entières aux entiers (une combinaison linéaire à coefficients entiers des  $T_k$  la vérifiera donc). Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout entier  $m$ ,

$$T_k(m) = \frac{m(m+1)\dots(m+k-1)}{k!}.$$

On observe d'abord que  $T_k(m) = 0$  si l'entier  $m$  est dans  $[1-k, 0]$ . Pour  $m \geq 1$ ,  $T_k(m)$  est le coefficient binomial  $\binom{m+k-1}{k}$ , donc un entier. Reste le cas où  $m$  s'écrit  $m = 1 - k - p$ , avec  $p \geq 1$ . Dans ce cas, on écrit

$$T_k(m) = (-1)^k \frac{(p+k-1)(p+k-2)\dots p}{k!} = (-1)^k \binom{p+k-1}{k}$$

et on voit que c'est encore un entier. Cela prouve la réciproque.