Feuille de TD 1 : Langage mathématique

Exercice 1. Comparer les tables de vérité de

(a) $P \Rightarrow Q$, $\quad$ (non P) ou Q , $\quad$ (non Q) $\Rightarrow$ (non P) ;

(b) P ou (Q et R) $\quad$ et $\quad$ (P ou Q) et (P ou R).

Exercice 2. Si je mange, alors je bois et je ne parle pas. Si je ne parle pas, alors je m'ennuie. Je ne m'ennuie pas. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Écrire la négation de l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta \text{ et } |f(y) - f(x)| \geq \epsilon.$$

(b) Écrire avec des quantificateurs que f n'est pas décroissante.

(c) Soient x, y deux réels. Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de

$$(f(x) \leq f(y)) \implies (x \leq y)$$

(d) Que signifie l'assertion suivante ?

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \implies x = 0).$$

Exercice 4. Soient x, y deux réels. Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de chacune des implications suivantes. Quels sont les énoncés vrais pour tous réels x et y ?

(a) $(x = y) \Rightarrow (x^2 = y^2)$.

(b) $(x < y) \Rightarrow (x^2 < y^2)$.

Exercice 5. Vrai ou faux ?

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, ((\forall \epsilon > 0, x \leq \epsilon) \Rightarrow x \leq 0)$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, ((\forall \epsilon > 0, x < \epsilon) \Rightarrow x < 0)$.

Exercice 6. Soit E un ensemble et $A, B, C \subset E$. On notera par $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. On notera aussi $A \setminus B := \{x \in A \ : \ x \notin B\}$.

(a) Montrer que $A \setminus B = \overline{B} \cap A$.

(b) Montrer que $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$ implique $B \subset C$.

(c) On note $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(d) Montrer que $\overline{A} \Delta \overline{B} = A \Delta B$.

(e) Montrer que $A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$.

(f) Montrer que $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$.

Exercice 7. Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

(a) Montrer que si f, g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

(b) Montrer que si f, g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

(c) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. Que dire de g ?

(d) Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. Que dire de f ?

Exercice 8. Démontrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$.
Indication : sinon, on pourrait écrire $x = p/q$ pour des entiers p et q qui ne sont pas tous les deux pairs.

Exercice 9. Partie entière d'un réel.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Prouver l'existence d'un unique entier n tel que
$$n \leq x < n + 1.$$
Dans la suite, on note $n = E(x)$.

(b) Tracer le graphe de la fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi définie.

(c) Prouver : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x + 1) = E(x) + 1$.

Exercice 10. Soient deux réels a et b tels que $a < b$.

(a) Montrer que si n est un entier assez grand, il existe un entier k tel que
$$na < k < nb.$$

(b) En déduire que l'intervalle $]a, b[$ contient un nombre rationnel. Et même une infinité de nombres rationnels.

(c) Montrer que l'intervalle $]a, b[$ contient aussi une infinité de nombres irrationnels.

Exercice 11. Déterminer les ensembles suivants.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 2| + |3x - 1| = 4\}$;

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 5 = \sqrt{x + 11}\}$;

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3i| = |z + i|\}$;

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid E(3x) = 2 - E(x)\}$.