Feuille de TD 2 : suites

Exercice 1. Etudier la convergence des suites définies par les formules suivantes.

(a) $a_n = 1 + \dfrac{e^{in^2}}{n+3}$.

(b) $b_n = (1+i)^n$.

(c) $c_n = \dfrac{3n-3}{2n+3}$.

(d) $d_n = \dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2+1}}$.

(e) $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

Exercice 2. Soit (u_n) une suite complexe. Ecrire les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs.

(a) (u_n) admet une limite réelle.

(b) (u_n) n'est pas bornée.

(c) (u_n) n'est pas convergente.

(d) (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 3. Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}^*$.

(a) Prouver qu'il existe $m > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \geq m$.

(b) Prouver que $(1/u_n)$ converge vers $1/\ell$.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite convergente de nombres entiers. Démontrer que (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 5. Démontrer les estimations suivantes, quand $n \to +\infty$.

(a) $4(n+1)^3 - 2n^2 + n\cos n = O(n^3)$.

(b) $\dfrac{7n^2-15n}{n-3} \sim 7n$.

(c) $\sin(1/n) \sim 1/n$.

(d) $\ln(n+1) - \ln(n) - \dfrac{1}{n} = O(1/n^2)$.

(e) $n^a = o(r^n)$ pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $r > 1$.

(f) $z^n = o(n!)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(g) $n! = o(n^n)$.

Exercice 6. Déterminer les bornes supérieure et inférieure des ensembles de réels suivants (finies ou infinies). Sont-elles atteintes ?

— $A = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

— $B = \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

— $C = \{\cos x \mid 2\pi/3 < x < 4\pi/3\}$.

— $D = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

— $E = \left\{ \dfrac{2p}{2pq+3} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 7. Etant donnée une fonction croissante $f : [0,1] \to [0,1]$, on note $A = \{x \in [0,1] \mid x \leq f(x)\}$.

(a) Montrer que A admet une borne supérieure $\sigma \in [0,1]$.

(b) Prouver que $f(\sigma)$ est un majorant de A, puis que σ est dans A.

(c) Vérifier que, pour tout élément x de A, $f(x)$ est dans A.

(d) En déduire que $f(\sigma) = \sigma$.

Exercice 8. (Somme télescopique) Pour tout $n > 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}.$$

(a) Vérifier que (S_n) est croissante.

(b) Exploiter l'identité $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ pour montrer que (T_n) est convergente.

(c) En déduire que (S_n) est convergente.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$.

(a) Prouver que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(b) En déduire qu'elles convergent vers une même limite $e \in]2,3[$.

(c) Prouver que e est un nombre irrationnel.

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

(a) Extraire de (u_n) une sous-suite tendant vers $+\infty$.

(b) Extraire de (u_n) une sous-suite convergente.

Exercice 11.

(a) Montrer que la suite $(\sin n)$ est divergente.
Indication : $\sin(n \pm 1)$.

(b) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers a_n telle que la suite $(\sin a_n)$ converge.

Exercice 12. Soit (u_n) une suite complexe. Prouver que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ.

Exercice 13. Soit (u_n) une suite complexe bornée et divergente.

(a) Montrer que (u_n) admet une sous-suite convergeant vers un nombre complexe ℓ.

(b) Prouver qu'il existe $\epsilon > 0$ et une extractrice $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{\phi(n)} - \ell| \geq \epsilon.$$

(c) Prouver que (u_n) admet une sous-suite convergeant vers un nombre complexe ℓ' différent de ℓ.

Exercice 14. (Moyenne de Cesaro) Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à la suite (μ_n) obtenue en posant
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(a) Soit $\epsilon > 0$. Prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout indice $n > N$:
$$\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} |u_k - \ell| \leq \epsilon.$$

(b) Prouver qu'il existe un entier $N' \geq N$ tel que pour tout indice $n > N'$:
$$|\mu_n - \ell| \leq 2\epsilon.$$

(c) Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 15. On dit qu'une suite complexe (u_n) est de Cauchy si
$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall p, q \geq N, \ |u_p - u_q| \leq \epsilon.$$

(a) Prouver que toute suite convergente est de Cauchy.

(b) Prouver que toute suite de Cauchy est bornée.

(c) Prouver que toute suite de Cauchy admet une sous-suite convergente.

(d) Prouver que toute suite de Cauchy est convergente.

Exercice 16. Soit (u_n) une suite réelle bornée. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note
$$s_N = \sup\{u_k \mid k \geq N\} \quad \text{et} \quad i_N = \inf\{u_k \mid k \geq N\}.$$

(a) Vérifier que (s_N) et (i_N) sont des suites monotones, puis convergentes.
On peut donc définir :
$$\limsup(u_n) = \lim_{N\to+\infty} s_N \quad \textit{et} \quad \liminf(u_n) = \lim_{N\to+\infty} i_N.$$

(b) Calculer $\limsup\Big((-1)^n e^{1/n}\Big)$ et $\liminf\Big((-1)^n e^{1/n}\Big)$.

(c) Prouver que la suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si
$$\limsup(u_n) = \liminf(u_n) = \ell.$$