Feuille de TD 3 : continuité, dérivabilité

Exercice 1. Les fonctions suivantes admettent-elles une limite au point indiqué ? Laquelle ?

(a) $f(x) = x\cos(1/x)$ quand $x \to 0$.

(b) $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ quand $x \to 0^-$.

(c) $h(x) = \sin(x)\ln(x)$ quand $x \to +\infty$.

(d) $i(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{\cos(x) - 1}$ quand $x \to 0$.

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

(a) Démontrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = f(x/2^n)$.

(b) En déduire que f est constante.

Exercice 3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Prouver que f est constante.

Exercice 4. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 5. Soit f une fonction strictement positive sur un segment $[a, b]$.

(a) Existe-t-il un nombre $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq \epsilon$?

(b) Et si f est continue ?

Exercice 6. Les formules suivantes définissent des fonctions sur $\mathbb{R}$. En quels points sont-elles continues ? Dérivables ?

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.

(b) $g(x) = \cos(\sqrt{|x|})$.

(c) $h(x) = \dfrac{\sin x}{\ln |x|}$ si $x \notin \{0, 1, -1\}$ et $h(0) = h(\pm 1) = 0$.

Exercice 7. Dériver.

(a) $a(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) $b(x) = x\tan x$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

(c) $c(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

(d) $d(x) = \cos(\sin x) + e^{x^2}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

(e) $e(x) = (\cos x)^{\sin x}$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 8. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$. En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 9. Utiliser le théorème des accroissement finis pour majorer $\sqrt[3]{1001}$.

Exercice 10. Etant donnés des réels a et b, ainsi qu'un entier $n \geq 2$, on considère l'équation $x^n + ax + b = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Prouver qu'elle admet au plus 2 solutions si n est pair et au plus 3 solutions si n est impair.

Exercice 11. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, \quad |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

(a) Prouver que $f : x \mapsto |x|$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(b) On suppose que f est dérivable et que sa dérivée f' est bornée sur l'intervalle I. Prouver que f est uniformément continue.

(c) Prouver que $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. (théorème de Heine) Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. On veut montrer que f est uniformément continue. Par l'absurde, on suppose que non.

(a) Vérifier qu'il existe $\epsilon > 0$ et des suites (x_n) et (y_n) dans $[a, b]$ telles que $(x_n - y_n)$ tend vers 0 et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$.

(b) Pourquoi peut-on supposer que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes ?

(c) Conclure.

Exercice 13. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f' tend vers un réel ℓ en $+\infty$.

(a) Soit $\epsilon > 0$. Prouver qu'il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\forall x > A, \quad \ell - \epsilon \leq \frac{f(x) - f(A)}{x - A} \leq \ell + \epsilon.$$

(b) En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.

Exercice 14. Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que $f'' \geq 0$. (Une telle fonction est dite *convexe*.)

(a) Vérifier que f' est croissante et en déduire que pour $a, b \in I$ et $a < x < b$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

(b) Une corde du graphe de f est par définition un segment reliant deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ du graphe de f. Donner l'équation d'une telle corde, puis montrer que le graphe de f est situé au-dessous de chacune de ses cordes.

(c) Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Démontrer les inégalités

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

(d) En déduire que le graphe de f est situé au-dessus de chacune de ses tangentes.

(e) Qu'en déduit-on pour les fonctions dont la dérivée seconde est négative ? (Une telle fonction est dite *concave*.)

(f) Application : démontrer les inégalités suivantes et les illustrer par un dessin.

— $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) \geq 1 + x.$

— $\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad \ln(1 + x) \leq x.$

— $\forall x \in [0, \pi/2], \qquad \frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x.$

Exercice 15. (sinus et cosinus hyperboliques) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(a) Etudier les variations et tracer le graphe des deux fonctions ainsi définies.

(b) Etablir la formule : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1.$

(c) Quel est le développement limité de sh et ch en 0 ?

(d) Vérifier que $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une réciproque dérivable $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calculer Argsh'.

(e) Etablir la formule : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$

(f) Vérifier que la fonction $\mathrm{ch} : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ admet une réciproque continue $\mathrm{Argch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$. Déterminer en quels points la fonction Argch est dérivable et calculer sa dérivée.

(g) Etablir la formule : $\quad \forall x \in [1, +\infty[, \qquad \mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$

Exercice 16. On considère la fonction tangente hyperbolique $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$.

(a) Etablir les formules : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}(x)^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}.$

(b) Etudier les variations et tracer le graphe de th.

(c) Démontrer que $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ admet une réciproque $\mathrm{Argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$