LU1MA003 - Constructions et raisonnements mathématiques

Correction du devoir sur table du 08/03/2023 - Durée : 1h

Exercice 1 :

1. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta < 0, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.
2. On suppose que deux limites distinctes l et l', $(l \neq l')$, existent et satisfont la propriété ci-dessus. On obtient alors :

$$|l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| \leq 2\epsilon.$$

   Or, ϵ étant quelconque, on peut le choisir, par exemple, tel que : $4\epsilon = |l - l'|$.

   Ceci contredit l'inégalité précédente.

Exercice 2 :

1. La borne inférieure de l'ensemble A est 0. En effet 0 est un minorant de l'ensemble A et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$.

   Alors $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ et $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} \in A$.

   La borne supérieure de l'ensemble A est $\dfrac{3}{2}$. En effet, $\dfrac{3}{2}$ est un majorant de l'ensemble A et $\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} \in A$.
2. La borne inférieure de A n'est pas dans A et sa borne supérieure y est.

Exercice 3 :

1. L'étude de la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'effectue comme suit :
   — On utilise le développement limité au voisinage de l'origine :

$$a_n = \frac{n}{2}\left(-\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{o\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}.$$

   On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\dfrac{\pi}{2}$.

   — Par majoration de la valeur absolue de b_n, il vient : $|b_n| \leq \dfrac{2}{n}$.

   Le théorème des gendarmes permet de conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.
2. La suite c_n n'est pas convergente car si elle l'était, toute sous-suite le serait vers la même limite. Or, la suite extraite $c_{4n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, et la suite extraite $c_{4n+1} = i, \forall n \in \mathbb{N}$. Ceci contredit la propriété de convergence vers une limite unique.

   Par contre, la suite c_n est bornée puisque $(|c_n| = 1)$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe au moins une sous-suite de c_n qui converge. C'est bien le cas puisqu'on en a trouvé ci-dessus deux qui sont constantes, donc qui convergent.

Exercice 4 :

1. Graphe de la suite récurrente

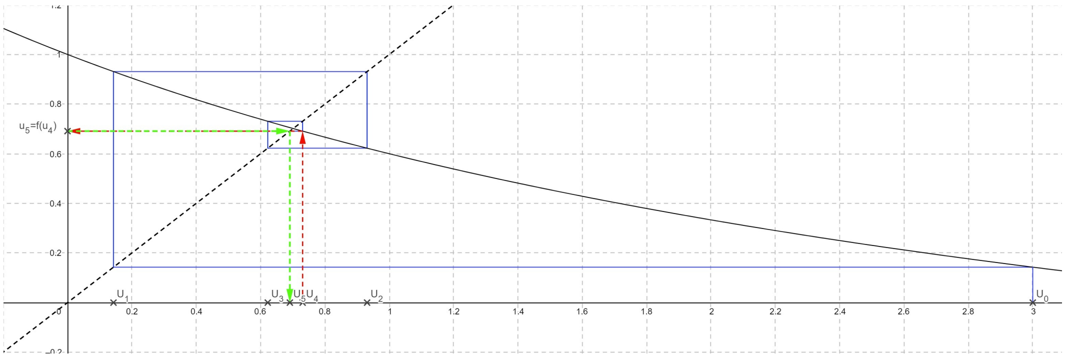

FIGURE 1 – Représentation grahique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. La fonction f est de classe C^1 sur son domaine de définition.

   Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -4$, $f'(x) = \dfrac{-8}{(4+x)^2}$ et la fonction f est décroissance sur $]-\infty, -4[$ et sur $]-4, +\infty[$. La fonction f est décroissance sur $[0,4]$ et $f(0) = 1$, $f(4) = 0$.

   Donc $f([0,4]) = [0,1] \subset [0,4]$ et l'intervalle $[0,4]$ est bien stable par f.
3. Comme $u_0 = 3 \in [0,4]$, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,4]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée.
4. f est continue sur $[0,4]$. Résolvons alors l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $4 - x = x(4+x)$, ou encore $x^2 + 5x - 4 = 0$. Cette équation du second degré admet 2 racines réelles de signe contraire. De plus elle vaut -4 en $x = 0$ et 32 en $x = 4$. Elle admet donc une racine unique $l \in [0,4]$.

   Donc f admet un point fixe unique l dans l'intervalle $[0,4]$.
5. La fonction $|f'|$ est décroissance sur $[0,4]$ et donc
$$\sup_{x\in[0,4]} |f'(x)| = |f'(0)| = \frac{1}{2}$$
   On en déduit par le théorème des accroissements finis que pour tout entier n,
$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq \frac{1}{2}|u_n - l|.$$
   Par une récurrence immédiate, on trouve que pour tout entier n,
$$|u_n - l| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - l| \to 0$$
   quand $n \to +\infty$.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers l.
6. D'après la question précédente, on a établi que :
$$\frac{|u_n - l|}{\left(\dfrac{1}{2^n}\right)} \leq C \equiv |u_0 - l|,$$
   quand $n \to +\infty$, où est une constante indépendante de n.

   Ceci s'écrit : $u_n - l = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ et $\varphi(n) = \dfrac{1}{2^n}$.
7. La fonction f étant décroissante, les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont montones de sens contraires. Par ailleurs, $u_1 = 1/7$ et $u_2 = 27/29 < 3 = u_0$. $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.