LU1MA003 - Constructions et raisonnements mathématiques

Correction du devoir sur table du 05/04/2023

Exercice 1 (Méthode du point milieu).

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $\sigma = \{x_0 = a < \cdots < x_n = b\}$ la subdivision régulière qui partage le segment $[a, b]$ en n intervalles égaux de longueur $h = (b - a)/n$.

Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ fixé. On note x'_i le point milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$: $x'_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

a) On considère la fonction $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-2\}, \forall x \in [x_i, x_{i+1}[: \phi(x) = f(x'_i), \text{ et } \forall x \in [x_{n-1}, x_n] : \phi(x) = f(x'_n).$$

Montrer que ϕ définie une fonction en escalier sur $[a, b]$ et calculer son intégrale sur $[a, b]$.

<u>Solution</u> : La définition de ϕ est celle d'une fonction en escalier puisqu'elle est constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, (cf. Définition 15, page 54 dans le polycopié du cours).

L'intégrale de ϕ est donc par définition : $\displaystyle\int_a^b \phi(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x'_i)$.

b) Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ fixé. Montrer que $\forall x \in [x_i, x_{i+1}], \exists\, c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que :

$$f(x) = f(x'_i) + (x - x'_i) f'(x'_i) + \frac{(x - x'_i)^2}{2} f''(c_i).$$

<u>Solution</u> : La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 montre que pour tout x dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, il existe un point c_i entre x et x'_i, donc dans l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, tel que :

$$f(x) = f(x'_i) + (x - x'_i) f'(x'_i) + \frac{(x - x'_i)^2}{2} f''(c_i).$$

c) Établir que $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$: $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - x'_i\right)\, dt = 0$.

<u>Solution</u> : On effectue le changement de variable $s = t - x'_i$,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - x'_i\right)\, dt = \int_{-h/2}^{h/2} s\, ds = 0.$$

d) En déduire que $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$: $\displaystyle\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(t) - f(x'_i)\right)\, dt\right| \le \frac{M_2}{2} \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - x'_i\right)^2\, dt\right|$,

où $M_2 = \displaystyle\sup_{a \le x \le b} |f''(x)|$.

<u>Solution</u> : On applique l'égalité de la question b) :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(t) - f(x'_i)\right) dt = f(x'_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (t - x'_i)\, dt + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(t - x'_i)^2}{2} f''(c_i)\, dt.$$

En utilisant la question c), il vient :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(t) - f(x_i')\right) dt = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(t-x_i')^2}{2} f''(c_i)\, dt.$$

En majorant la dérivée seconde par M_2, il vient alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(t-x_i')^2}{2} f''(c_i)\, dt \right| &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(t-x_i')^2}{2} |f''(c_i)|\, dt, \\ &\leq \frac{M_2}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - x_i'\right)^2\, dt. \end{aligned}$$

e) Montrer que $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$: $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - x_i'\right)^2\, dt = \frac{h^3}{12}$.

<u>Solution</u> : On effectue le changement de variable $s = t - x_i'$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - x_i'\right)^2\, dt = \int_{-h/2}^{h/2} s^2\, ds = \frac{h^3}{12}.$$

f) En déduire que :

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^b \phi(t)\, dt \right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{24 n^2}.$$

<u>Solution</u> : En utilisant la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^b \phi(t)\, dt \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(t) - f(x_i')\right) dt \right|, \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f''(c_i)}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - x_i'\right)^2\, dt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{f''(c_i)}{2} \right| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - x_i'\right)^2\, dt. \end{aligned}$$

On applique ensuite la question d) pour obtenir la majoration :

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^b \phi(t)\, dt \right| \leq n \frac{M_2}{2} \frac{h^3}{12}.$$

En remplaçant h par sa valeur en fonction de $b-a$, on trouve finalement :

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^b \phi(t)\, dt \right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{24 n^2}.$$

Exercice 2. Soit σ la subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ introduite dans l'exercice 1. De même, soit x_i' le point milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

On définit l'ensemble des fonctions V_h par :

$$V_h = \left\{ v_h \in \mathbb{R}^{[a,b]}, \forall i = 0, \ldots, n-2, \forall x \in [x_i, x_{i+1}[, v_h(x) = v_h(x_i'), \text{ et } \forall x \in [x_{n-1}, x_n], v_h(x) = v_h(x_n') \right\}.$$

a) Tracer le graphe d'une fonction v_h appartenant à V_h.

Solution :

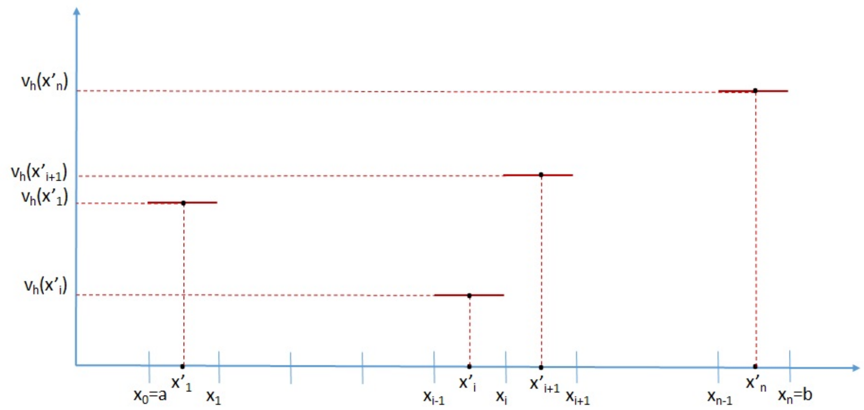

FIGURE 1 – Graphe d'une fonction v_h appartenant à V_h.

b) Démontrer que V_h est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Solution : Les propriétes suivantes sont trivialement remplies :

— $V_h \subset \mathbb{R}^{[a,b]}$.

— $0_{\mathbb{R}^{[a,b]}} \in V_h$.

— Soient $v_h^{(1)}$ et $v_h^{(2)}$ appartenant à V_h et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il en est alors de même pour la fonction $v_h^{(1)} + \lambda v_h^{(2)}$, et V_h est stable par combinaison linéaire.

Autrement dit, V_h est un s.e.v de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

c) On introduit les fonctions $\left(\varphi_i\right)_{i=0,n-1}$ définies sur $[a,b]$ par :

— Si $i \in \{0,\dots,n-2\}$: $\varphi_i(x) = 1,\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}[$, 0 sinon,

— Si $i = n-1$: $\varphi_{n-1}(x) = 1,\ \forall x \in [x_{n-1}, x_n]$, 0 sinon.

Montrer que la famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1})$ est libre.

Solution : Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\lambda_0\varphi_0 + \dots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1} = 0$.

Autrement dit, $\forall x \in [a,b] : \lambda_0\varphi_0(x) + \dots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1}(x) = 0$.

Pour toute valeur de j fixée dans $\{0,\dots,n-1\}$, en choisissant par exemple $x = x'_j$, (ou n'importe quelle autre valeur de x dans l'intervalle $[x_j, x_{j+1}[$), compte tenu de la définition des fonctions $\left(\varphi_i\right)_{i=0,n-1}$, il vient $\lambda_j = 0$.

Ainsi, $\forall j \in \{0,\dots,n-1\} : \lambda_j = 0$, et la famille $\left(\varphi_i\right)_{i=0,n-1}$ est libre.

d) Soit $v_h \in V_h$. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $v_h = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\varphi_i$.
(*On exprimera* λ_i *en fonction de* v_h *et de* x'_i).

Solution : Soient $v_h \in V_h$ donné et $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ solution de : $v_h = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\varphi_i$.

Autrement dit, $\forall x \in [a,b] : v_h(x) = \lambda_0\varphi_0(x) + \dots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$.

De nouveau, pour chaque valeur de i fixée dans $\{0,\dots,n-1\}$, en choisissant par exemple $x = x'_i$, il vient : $v_h(x'_i) = \lambda_i$.

Ceci détermine donc tous les $(\lambda_i)_{i=0,n-1}$.

e) En déduire que la famille $(\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1})$ est une base de V_h dont on déterminera la dimension.

<u>Solution</u> : D'après les deux questions précédentes, la famille $(\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1})$ est libre et génératrice dans V_h ; c'est donc une base de V_h.

Ayant $Card(\varphi_0,\dots,\varphi_{n-1}) = n$, il en découle que $dim(V_h) = n$.
