Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*
(Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*)

# Naissance d'une ligne de singularités dans une ascendance atmosphérique

Joël CHASKALOVIC

***Résumé*** – Les modèles mathématiques appliqués à la genèse des tornades atmosphériques ne permettent pas à ce jour de rendre compte des phénomènes thermodynamiques. Nous proposons ici la modélisation mécanique d'une pompe thermique développée entre le sol et l'atmosphère, provoquée par de forts gradients de températures, générant une ligne de singularités au voisinage de l'axe d'une ascendance atmosphérique non tourbillonnaire. Ce modèle consiste en une famille de champs de vitesses à trois paramètres satisfaisant les équations de Navier-Stokes stationnaires et incompressibles, couplées à une condition d'adhérence au voisinage du sol. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité locale de ces champs de vitesses au voisinage d'une ascendance non tourbillonnaire.

## Genesis of a singularity line into an atmospheric updraft

***Abstract*** – *Mathematical models applied to tornado genesis do not include thermodynamic aspects. Here, we propose a mechanical model which considers strong gradients of temperature between the ground and the atmosphere, as the genesis of a source line inside the flow. This model consists of a family of velocity fields depending of three parameters, satisfying the stationary and incompressible Navier-Stokes equations and vanishing at the ground. We establish the local existence and uniqueness for these fields in the neighborhood of a non rotating updraft.*

*Abridged English Version* – (I) MATHEMATICAL MODELING. – We introduce the spherical polar coordinates ($O$; $R$, $\alpha$, $\theta$), where $R$ is the radial distance from the origin, $\alpha$ is the angle between the radius vector and the positive $z$-axis, and $\theta$ is the meridian angle about the $z$-axis. The positive $z$-axis is then described by $\alpha = 0$, the boundary plane $z = 0$ by $\alpha = \pi/2$. We shall consider here steady-state fluid motion having the basic structure

$$(1) \qquad V_R = \frac{G(x)}{r}, \quad V_\alpha = \frac{F(x)}{r}, \quad V_\theta = 0, \quad \text{where } r = R\sin\alpha, \quad x = \cos\alpha.$$

The steamlines of the field (1) present a characteristic form which corresponds to homothetic curves for which the center is the origin $O$, [1]. In this way, this field can be proposed for modeling some atmospheric flows which govern the genesis of tornadoes, [2].

The field must satisfy the stationary and incompressible Navier-Stokes equations adhering to the plane $z = 0$. Then, $F$ and $G$ are solutions of the differential equations;

$$(2) \qquad \begin{cases} \nu(1-x^2)F^{(4)}(x) - 4\nu x F^{(3)}(x) + F(x)F^{(3)}(x) + 3F'(x)F''(x) = 0, \\ \qquad 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

$$(3) \qquad G(x) = F'(x)(1-x^2)^{1/2}, \qquad 0 \leq x < 1,$$

$$(4) \qquad F(0) = F'(0) = 0,$$

$$(5) \qquad \lim_{x \to 1^-} F(x) = \xi,$$

Note présentée par Henri CABANNES.

0764-4442/95/03211647 $ 2.00 © Académie des Sciences

where $\nu$ is the kinematic viscosity, the boundary condition (4) is the adherence condition $\mathbf{V} = 0$, and the condition (5) guarantees that the line $\alpha = 0$ is either a source ($\xi > 0$) or a sink ($\xi < 0$). This condition leads to a variation of the lateral flux near the $z$-axis, [3].

The resolution of (2), (4) and (5) gives $F$ and then $G$ by (3). So, we integrate three times the equation (2) on $[0, x]$ to find the problem (P);

$$\text{(P)} \quad f'(x) + f^2(x) = -\frac{k^2 P x}{(1-x)(1+x)^2} + \frac{\lambda x}{(1-x^2)^2}, \qquad 0 \leqq x < 1, \quad f(0) = 0,$$

where $F(x) = 2\nu(1-x^2) f(x)$, $k = (2\nu)^{-1}$ and $\lambda = k^2(4\nu\xi + \xi^2)$, and the parameter $P$ is a constant of integration. In the case $\xi = 0$, $P$ characterises the strength of the vertical shear near the ground, [4].

(II) Existence and uniqueness of problem (P) Solutions. – The perturbation method is used to establish the existence and uniqueness of problem (P) solutions. Precisely, when $\lambda = 0$ and $\xi = 0$ we know by [3] and [4], that there exist solutions $f_{P_0}$ of problem (P) if the parameter $P_0$ satisfies $k^2 P_0 \leqq \Gamma^2$, ($\Gamma \approx 2,85$), for which the behaviour near $x = 1$ has the structure of $\operatorname{Log}(1-x)$.

Let $y$ be defined by: $y(x) = \exp\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]$, where $f$ is a solution of problem (P). Then, $y$ is solution of the integral equation

$$\text{(P')} \qquad y(x) = 1 - k^2 P \int_0^x \frac{(x-t)\,t y(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt + \lambda \int_0^x \frac{(x-t)\,t y(t)}{(1-t^2)^2}\,dt.$$

Finally, we consider the functional $\Phi$ defined by:

$$\Phi : C_\alpha^0([0, 1]) \times R \to C_\alpha^0([0, 1]),$$
$$\tilde{y}(x) = y(x) - 1 + k^2 P \int_0^x \frac{(x-t)\,t y(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt - \lambda \int_0^x \frac{(x-t)\,t y(t)}{(1-t^2)^2}\,dt,$$

where the parameter $P$ is given and $C_\alpha^0([0, 1]) = \{y : [0, 1[ \to R, (1-x)^\alpha y \in C^0([0, 1])\}$, $\forall \alpha > 0$.

$C_\alpha^0([0, 1])$ is a Banach space with respect to the norm: $\| y \|_\alpha = \sup_{0 \leqq x \leqq 1} (1-x)^\alpha |y(x)|$.

Lemma 1. – *Let $y \in C_\alpha^0([0, 1])$ then $\tilde{y} \equiv \Phi(y) \in C_\alpha^0([0, 1])$, $\forall \alpha > 0$.*

Lemma 2. – *The functional $\Phi$ is differentiable and $D_y \Phi(y_0, 0) \cdot u \equiv \tilde{u}$ is given by:*

$$\text{(6)} \qquad \tilde{u}(x) = u(x) + k^2 P_0 \int_0^x \frac{(x-t)\,t u(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt.$$

Lemma 3. – *Let $0 < \alpha < 1$. The kernel of $D_y \Phi(y_0, 0)$ is reduced to the null space.*

*Proof.* – Let $u$ belong to $\operatorname{Ker}[D_y \Phi(y_0, 0)]$, then $u$ is a function of $L^2(0, 1)$, $\forall \alpha \in ]0, 1[$. Indeed, $u$ is solution of

$$\text{(7)} \qquad u(x) = -k^2 P_0 \int_0^x \frac{(x-t)\,t u(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt,$$

then,

$$|u(x)|^2 \leqq \frac{k^4 P_0^2 \| u \|_\alpha^2}{(1-\alpha)^2} \frac{1}{(1+x)^{2\alpha - 2}}.$$

Equation (7) is a Volterra integral equation of the second kind with a kernel which belongs to $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$. So, a standard result [6] leads to the unique solution $u \equiv 0$.

$D_y \Phi(y_0, 0)$ can be written $D_y \Phi(y_0, 0) = \mathrm{Id}_{C^0_\alpha([0, 1])} + \mu_0 T$, $(\mu_0 = k^2 P_0)$.

LEMMA 4. – *The operator $T$ is compact*, $\forall \alpha \in ]0, 1[$.

*Proof.* – Fist, for all $\alpha$ values strictly between 0 and 1, $\mathrm{Im}(T) \subset C^0([0, 1])$. So $T$ is compact from $C^0_\alpha([0, 1])$ to $C^0([0, 1])$, by application of Ascoli-Arzela theorem. The imbedding of $C^0([0, 1])$ into $C^0_\alpha([0, 1])$ allows us to conclude that the operator $T$ is compact from $C^0_\alpha([0, 1])$ to itself, $\forall \alpha \in ]0, 1[$. So, $D_y \Phi(y_0, 0)$ is an isomorphism of $C^0_\alpha([0, 1])$.

THEOREM 1. – *Let $P_0$ satisfying $k^2 P_0 \leqq \Gamma^2$, $(\Gamma \approx 2,85)$, and $y_0$ the corresponding solution of problem (P′) with $\xi = 0$. There exists a neighborhood of $\xi = 0$ such that the equation $\Phi(y, \lambda) = 0$ admits one and only one continuous branch of solutions around $(y_0, 0)$, which belongs to $C^0_\alpha([0, 1])$, $(0 < \alpha < 1)$. In other words, for each of these values of $\xi$, there exists one and only one solution of problem (P′) which belongs to $C^0_\alpha([0, 1])$.*

This directly results from the implicit function theorem [5].

(III) PHYSICAL INTERPRETATION. – The flows (1) submitted to the boundary conditions (4)-(5), describe either downdrafts or updrafts which develop a singular line in the neighborhood of their main axis. For meteorological investigations, it can represent typical flows which are generated by strong gradients of temperature between the ground and the atmosphere, at the genesis of tornadoes. We established by theorem 1 that these sorts of flows can emerge by perturbation of the parameter $\xi$ near zero. This perturbation can lead to either a line of sources or a line of sinks. Indeed, for any sing of $\xi$, values near zero are allowed to consider solutions $y$ of problem (P′) which are consistent with the functional frame we introduced.

---

(I) MODÉLISATION MATHÉMATIQUE. – On introduit le système de coordonnées sphériques $(O; R, \alpha, \theta)$, où $R$ désigne la distance radiale à l'origine $O$, $\alpha$ l'angle entre le rayon vecteur et l'axe des $z$-positifs, et $\theta$ l'angle méridien autour de l'axe des $z$. L'axe des $z$ positifs correspond à $\alpha = 0$ et le plan frontière $z = 0$ à $\alpha = \pi/2$. Les composantes respectives d'un champ des vitesses $\mathbf{V}$ dans ce système s'écrivent : $\mathbf{V_R}$, $\mathbf{V_\alpha}$, $\mathbf{V_\theta}$.

On considère dans toute la suite une famille de champs de vitesses stationnaires ayant la structure suivante :

$$V_R = \frac{G(x)}{r}, \quad V_\alpha = \frac{F(x)}{r}, \quad V_\theta = 0, \quad \text{où } r = R \sin\alpha, \quad x = \cos\alpha. \tag{1}$$

Pour un tel champ, les lignes de courant sont des courbes homothétiques, le centre d'homothétie étant l'origine $O$, [1]. C'est pourquoi, ce champ a été proposé comme modèle d'ascendances atmosphériques intervenant dans la genèse des tornades, [2]. Les fonctions $F$ et $G$ sont à déterminer de telle sorte que le champ de vitesses $\mathbf{V}$ vérifie les équations de Navier-Stokes stationnaires, incompressibles.

Ainsi, $F$ et $G$ sont solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \nu(1 - x^2) F^{(4)}(x) - 4\nu x F^{(3)}(x) + F(x) F^{(3)}(x) + 3 F'(x) F''(x) = 0, \\ \qquad 0 \leqq x < 1, \end{cases} \tag{2}$$

$$G(x) = F'(x)(1 - x^2)^{1/2}, \qquad 0 \leqq x < 1, \tag{3}$$

où le paramètre $\nu$ désigne le coefficient de viscosité cinématique du fluide.

Le système d'équations (2)-(3) est couplé à des conditions aux limites traduisant d'une part l'adhérence du fluide au sol, $(z = 0)$, d'autre part l'existence d'une ligne de puits ou de sources au voisinage de l'axe de l'ascendance, $(x = 1)$. Ces conditions s'écrivent respectivement :

$$F(0) = F'(0) = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = \xi, \tag{5}$$

où $\xi$ désigne l'intensité de la ligne de puits $(\xi < 0)$, ou celle d'une source $(\xi > 0)$. Cette condition impose à l'écoulement une variation de flux latérale au voisinage de l'axe, [3].

La résolution de (2) couplée aux conditions (4) et (5) détermine $F$, et par suite $G$ via la relation de continuité (3). On intègre alors trois fois l'équation (2) sur $[0, x]$ et on obtient le problème (P) :

$$\text{(P)} \quad f'(x) + f^2(x) = -\frac{k^2 P x}{(1-x)(1+x)^2} + \frac{\lambda x}{(1-x^2)^2}, \qquad 0 \leqq x < 1, \quad f(0) = 0,$$

où l'on a posé : $F(x) = 2\nu(1 - x^2) f(x)$, $k = (2\nu)^{-1}$ et $\lambda = k^2 (4\nu\xi + \xi^2)$, le paramètre $P$ étant une constante d'intégration.

Dans le cas où $\xi = 0$, on retrouve la modélisation d'une ascendance atmosphérique sans ligne de puits ou de sources ; la constante $P$ s'interprète alors comme l'intensité du cisaillement vertical au voisinage du sol, [4].

(II) Existence et unicité des solutions du problème (P). – L'objet de ce paragraphe est d'établir l'existence et l'unicité des solutions du problème (P) pour des valeurs du paramètre $\lambda$ voisines de zéro, par une méthode de perturbation du paramètre.

Lorsque $\lambda = 0$ et $\xi = 0$ on sait, d'après [3] et [4], qu'il existe une solution $f_{P_0}$ du problème (P) pourvu que $k^2 P_0 \leqq \Gamma^2$, $(\Gamma \approx 2,85)$, dont le comportement au voisinage de $x = 1$ est en $\operatorname{Log}(1-x)$. On introduit alors la fonction $y$ définie par : $y(x) = \exp\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]$, où $f$ est solution du problème (P). $y$ est alors solution de l'équation intégrale

$$\text{(P')} \qquad y(x) = 1 - k^2 P \int_0^x \frac{(x-t)\,ty(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt + \lambda \int_0^x \frac{(x-t)\,ty(t)}{(1-t^2)^2}\,dt.$$

Afin d'établir l'existence et l'unicité de solutions du problème (P'), on introduit la fonctionnelle $\Phi$ définie par :

$$\Phi : C_\alpha^0([0, 1]) \times R \to C_\alpha^0([0, 1]),$$
$$(y, \lambda) \mapsto \tilde{y}(x) = y(x) - 1 + k^2 P \int_0^x \frac{(x-t)\,ty(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt - \lambda \int_0^x \frac{(x-t)\,ty(t)}{(1-t^2)^2}\,dt,$$

le paramètre $P$ étant fixé et l'espace $C_\alpha^0([0, 1])$ est défini par :

$$C_\alpha^0([0, 1]) = \{y : [0, 1[ \to R, (1-x)^\alpha y \in C^0([0, 1])\}$$

pour toutes valeurs de $\alpha > 0$. L'espace à poids $C_\alpha^0([0, 1])$ est un Banach pour la norme $\| y \|_\alpha = \sup_{0 \leqq x \leqq 1} (1-x)^\alpha |y(x)|$.

Lemme 1. – *Soit $y \in C^0_\alpha([0, 1])$ alors $\tilde{y} \equiv \Phi(y) \in C^0_\alpha([0, 1])$, $\forall \alpha > 0$.*

Ainsi, toute solution du problème (P′) appartenant à $C^0_\alpha([0, 1])$ vérifie $\Phi(y, \lambda) = 0$. Par ailleurs, $\Phi(y_0, 0) = 0$, pour toute valeur de $P_0$ satisfaisant, $k^2 P_0 \leq \Gamma^2$ ($\Gamma \approx 2,85$). L'existence et l'unicité locale d'une branche de solution au voisinage du couple $(y_0, 0)$ est obtenue en montrant que la fonctionnelle $\Phi$ satisfait les conditions du théorème des fonctions implicites [5].

Lemme 2. – *La fonctionnelle $\Phi$ est indéfiniment différentiable et sa différentielle partielle $D_y \Phi(y_0, 0)$ est déterminée par : $D_y \Phi(y_0, 0) \cdot u \equiv \tilde{u}$, où :*

$$\tilde{u}(x) = u(x) + k^2 P_0 \int_0^x \frac{(x-t)\, t u(t)}{(1-t)(1+t)^2}\, dt. \tag{6}$$

Lemme 3. – *La différentielle partielle $D_y \Phi(y_0, 0)$ est un opérateur injectif, $\forall \alpha \in ]0, 1[$.*

*Preuve.* – Soit $u$ apartenant à $\operatorname{Ker}[D_y \Phi(y_0, 0)]$, alors $u$ est une fonction de $L^2(0, 1)$, pour toute valeur de $\alpha$ satisfaisant, $0 < \alpha < 1$. Par ailleurs, l'équation du noyau est une équation intégrale de Volterra homogène, de seconde espèce dont le noyau appartient à $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$. Un résultat standard [6] pour la résolution de ce type d'équation intégrale conduit à l'unique solution $u \equiv 0$. On observe à présent que l'opérateur $D_y \Phi(y_0, 0)$ peut s'écrire sous la forme d'une perturbation $T$ de l'identité.

Lemme 4. – *L'opérateur $T$ est compact, $\forall \alpha \in ]0, 1[$.*

*Preuve.* – On observe que pour toute valeur de $\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\operatorname{Im}(T) \subset C^0([0, 1])$. On montre alors que l'opérateur $T$ est compact de $C^0_\alpha([0, 1])$ dans $C^0([0, 1])$, en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzéla. L'injection canonique de $C^0([0, 1])$ dans $C^0_\alpha([0, 1])$ permet alors de conclure que l'opérateur $T$ est compact de $C^0_\alpha([0, 1])$ dans lui-même, $\forall \alpha \in ]0, 1[$. L'opérateur $D_y \Phi(y_0, 0)$ est donc une perturbation compacte de l'identité, c'est un opérateur de Fredholm injectif, d'index nul ; $D_y \Phi(y_0, 0)$ est un isomorphisme de $C^0_\alpha([0, 1])$ dans lui-même. On a alors le résultat suivant par application du théorème des fonctions implicites :

Théorème 1. – *Soient $P_0$ vérifiant $k^2 P_0 \leq \Gamma^2$, ($\Gamma \approx 2,85$) et $y_0$ la solution associée du problème (P′) correspondant à $\xi = 0$. Il existe un voisinage de $\xi = 0$ tel que l'équation $\Phi(y, \lambda) = 0$ admette une et une seule branche continue de solutions au voisinage de $(y_0, 0)$, appartenant à $C^0_\alpha([0, 1])$, $(0 < \alpha < 1)$. Autrement dit, pour chacune de ces valeurs de $\xi$, il existe une et une seule solution du problème (P′) dans $C^0_\alpha([0, 1])$.*

(III) Interprétation physique. – La famille de champs de vitesses (1) assujetties aux conditions aux limites (4)-(5), peut modéliser une ascendance atmosphérique développant une ligne de puits ou de sources au voisinage de son axe principal. Nous avons établi par le théorème précédent que ces champs peuvent émerger pour des valeurs du paramètre $\xi$ voisines de zéro. Pour $\xi = 0$, le champ de vitesses (1) correspond à une ascendance ne présentant ni puits ni source au voisinage de son axe principal. Autrement dit, pour des valeurs de $\xi$ voisines de zéro, il existe un champ de perturbations développant une ligne de singularités dans l'ascendance initiale. La nature de cette singularité est fonction de la perturbation qui peut tout aussi bien développer une ligne de sources qu'une ligne puits. En effet, pour $\xi$ voisin de zéro, négatif ou positif, ces valeurs sont admissibles vis-à-vis du cadre fonctionnel que nous avons mis en place pour l'établissement du théorème 1.

Lemme 5. – *Soit $y$ une solution du problème* (P′), *on dispose des deux estimations suivantes :*

(i) *Si* $\xi > 0 : (1-x)^{-k\xi/2} < y(x) < (1-x)^{-k\xi}$.

(ii) *Si* $\xi < 0 : (1-x)^{-k\xi} < y(x) < (1-x)^{-k\xi/2}$.

*Ainsi, pour $\xi$ compris entre 0 et $\alpha/k$, toute solution $y$ du problème* (P′) *appartient à* $C_\alpha^0([0, 1])$, $(0 < \alpha < 1)$, *ainsi que pour toutes valeurs négatives de $\xi$.*

*Remarque.* – Les quatre lemmes qui conduisent au théorème 1 suggèrent qu'il existe potentiellement une deuxième branche de solutions du problème (P′), au voisinage de $\xi = -4\nu$ ($\lambda$ est de nouveau nul). Ce résultat n'est que partiel et nécessiterait l'établissement de l'existence de solutions $y_0$ du problème (P′) pour $\xi = -4\nu$, *i.e.*, dont le comportement au voisinage de $x = 1$ serait en $1/(1-x)$ et non plus en $\text{Log}(1-x)$ comme nous l'avons mentionné au début du paragraphe (II).

L'ensemble de ces travaux permettront à termes de compléter le modèle de genèse d'une tornade atmosphérique proposé par [2], en incluant un mécanisme de pompe thermique développé entre le sol et l'atmosphère, générant cette ligne de sources dans une ascendance non tourbillonnaire.

Note remise le 20 octobre 1995, acceptée le 22 octobre 1995.

Références bibliographiques

[1] R. Berker, Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, *Hand. Phys.*, VIII/2, Berlin, Springer-Verlag, 1963, p. 59.

[2] J. Chaskalovic, Sur la modélisation mathématique des tornades atmosphériques : Genèse et dégénérescence, *Thèse*, Université Pierre-et-Marie-Curie, 30 janvier 1991.

[3] J. Serrin, The swirling vortex, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, 271, 1972, p. 320-360.

[4] J. Chaskalovic, Sur la modélisation mathématique de courants atmosphériques singuliers, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 311, série II, 1990, p. 1045-1050.

[5] A. Avez, *Calcul différentiel*, J. Dieudonné et P. Malliavin éd., Masson, 1977.

[6] F. G. Tricomi, *Integral equations, Pure and Applied mathematics*, Courant-Bers-Stocker, 1957, p. 10.

*UPMC (Paris-VI), LMM, CNRS-URA 229,*
*4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.*
*E-mail: jch@moka.ccr.jussieu.fr*