

Existence de solutions d'un modèle de coque cylindrique à section quelconque en élasticité finie

Joël CHASKALOVIC et Salah NAILI

J. C. : UPMC (Paris-VI), LMM, CNRS-URA 229, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France;
E-Mail: JCH@CCR.Jussieu.fr

S. N. : Université Paris-XII, LMP, 61, avenue du Général-de-Gaulle, 94010 Créteil Cedex, France.
E-Mail: NAILI@univ-Paris-XII.fr

Résumé. On s'intéresse au couplage qui intervient dans la dynamique d'enveloppes déformables pouvant subir de grands déplacements sous l'action d'écoulements internes d'un fluide visqueux newtonien. Lorsque d'une part la structure peut être représentée par un tube souple, et lorsque d'autre part, l'écoulement établi est unidirectionnel dans l'axe du tube et incompressible, alors on peut montrer que la pression est constante dans chaque section droite du tube. Ceci permet d'étudier l'écoulement dans la conduite séparément de la déformation du tube, la pression jouant le rôle d'un paramètre de contrôle. Dans ce travail, nous proposons une nouvelle modélisation décrivant les grands déplacements de la paroi du tube basée sur l'hypothèse de Kirchhoff-Love. Nous obtenons alors une équation intégral-différentielle fortement non linéaire pour laquelle nous montrons l'existence de solutions en utilisant une méthode de point fixe.

Existence of solutions for a cylindrical shell with general cross section in finite elasticity

Abstract. *Our main aim is intended to describe the dynamics of the interaction between a cylindrical shell and a Newtonian viscous and incompressible fluid which is inside the shell. When we consider first the structure as an inextensible tube and secondly the flow as one-dimensional in the tube, we can show that the pressure is constant in each cross-section of the tube. This allows us to separate the study of the flow and the deformation of the tube, the pressure is then a parameter of control. We propose a new model describing large displacements of the shell, based on the Kirchhoff-Love hypothesis. This leads to a nonlinear integro-differential equation for which we prove the existence of solutions by using a fixed point method.*

Abridged English Version

We model the tube as a thin cylindrical shell of x -axis, with a general cross-sectional shape. Its length is supposed infinite with an average surface which is inextensible. In addition, the tube is assumed to be homogeneous. We consider the equilibrium configurations subjected to a uniform external pressure p .

Note présentée par Henri CABANNES.

In this case, the problem is two-dimensional and each cross section is described by a curve, called mean line. The reference configuration is denoted by Γ_0 and the actual one by Γ . These oriented curves are situated in the coordinate system defined by $\mathbf{R}(O; \vec{y}, \vec{z})$.

We define the curvilinear abscissa s of a point \mathcal{M} , which has coordinates (y, z) in \mathbf{R} . Each point \mathcal{M} is associated with a local coordinate system $(\mathcal{M}; \vec{t}, \vec{n})$, where \vec{t} is a vector tangent to Γ at \mathcal{M} and such that $\vec{n} = \vec{t} \wedge \vec{x}$. The average surface being inextensible, the curvilinear abscissae are the same in the two configurations. The angles between the y -axis and the tangents to Γ_0 at \mathcal{M}_0 and to Γ at \mathcal{M} are denoted θ_0 and θ , respectively (fig.).

The internal efforts for each unit length at point \mathcal{M} of Γ are the resulting efforts $\vec{T} = N\vec{t} + Q\vec{n}$, of the traction or compression N , the shearing forces Q , and the bending moment $M\vec{x}$. The outside forces per unit length are given by $\vec{J}_F = -p\vec{n}$.

Except at points where concentrated forces are exerted, the equilibrium equations projected on the local coordinate system are given by (1)-(3).

On the other hand, if deformations are considered to be small, the constitutive equation can be formulated by (4). In this law, D is the flexural rigidity modulus, E is Young's modulus, ν is Poisson's ratio and h_0 is the wall thickness. This law is valid only if $h_0 r \ll 1$, where r denotes the minimum of $d\theta/ds$.

The main dimensionless variables (5) associated to the equations (1)-(4) give the integro-differential formulation (6). In relations (5), L denotes the length of Γ , the prime in (6) designates differentiation with respect to $\tilde{s} \in]0, 2\pi[$, and C is a integration constant.

The curve Γ_0 has the same origin as the coordinate system \mathbf{R} which is chosen such that the curve Γ_0 has its tangent direction as the y -axis at point O . To eliminate the rigid body displacements, we suppose that the curves Γ and Γ_0 are fixed at point O . Therefore, using these conditions and the fact that the curves Γ_0 and Γ are closed, one can obtain relation (7). Moreover, we assume that Γ and Γ_0 satisfy the properties (8)-(9). Then, integrating equation (6) on $]0, 2\pi[$, and using (7)-(9), the constant C is determined and the final formulation of problem (P) too. For technical reasons we are interested by solutions of problem (P) which satisfy (10).

Section 2 is devoted to the existence of problem (P) solutions which satisfy condition (10). To this end, we introduce Sobolev's spaces $W^{m,p}(0, 2\pi)$ which are Hilbert spaces with respect to the norm

$$\forall u \in W^{m,p}(0, 2\pi) : \quad \|u\|_{m,p} = \sum_{j=0}^m \|u^{(j)}\|_p,$$

where $\|u^{(j)}\|_p$ denotes the natural norm of $L^p(0, 2\pi)$ for the j -th derivative of u .

We consider the functional φ defined by relation (11), where k_0 is a given function of $H^3(0, 2\pi)$.

Then, solutions of problem (P) are fixed points of this functional, and we prove that Schauder's theorem can be applied to φ . Then, lemma 1 gives useful estimates where Sobolev's constants must be evaluated. This is the purpose of theorem 1. Therefore, the functional φ is a compact operator from $H^2(0, 2\pi)$ to itself. Theorem 2 specifies the suitable numerical conditions to obtain the existence of solutions to problem (P).

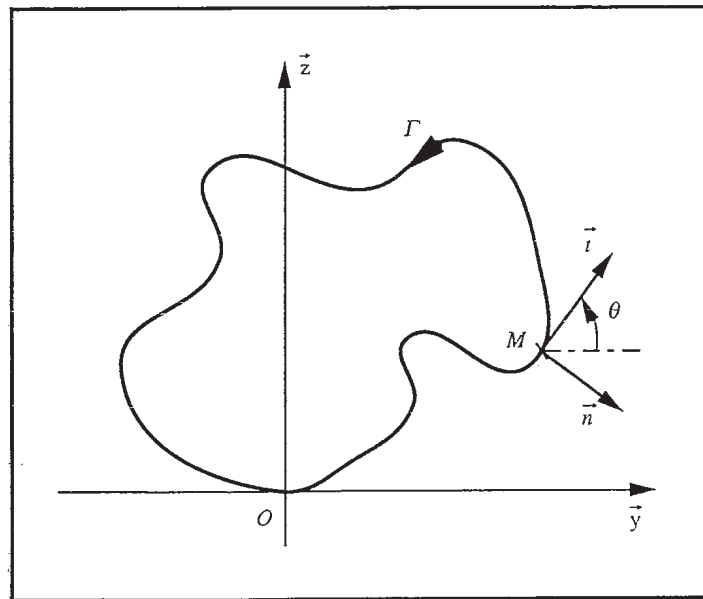
Section 3 is devoted to the conclusion of this paper. We suggest a new mathematical model applied to the behavior of a cylindrical tube, with a general cross section in finite elasticity, subjected to a uniform external pressure p . The tube is represented as a infinite cylindrical shell in which a incompressible and viscous Newtonian fluid applies the pressure p . We assume that the flow is one-dimensional, so the pressure is constant for each cross section. This leads us to analyze the behavior of the shell with the pressure considered as a control parameter. Our analysis is especially focussed to take in account general shapes of each cross section of the tube. Then, under suitable conditions

which give upper bound values of the pressure p and of the curvature radius variations at the origin of the arc, we establish the existence of solutions for this model.

1. Formulation du problème

On modélise le tube comme une coque mince, élastique, cylindrique d'axe \vec{x} , de section droite quelconque, homogène, d'épaisseur constante, infiniment longue dont la surface moyenne est inextensible. La coque est soumise à une pression extérieure uniforme p . Dans ce cas, la formulation du problème est bidimensionnelle et chaque section droite du tube est décrite par une ligne équidistante des deux bords de la section, appelée ligne moyenne. Les configurations de référence et actuelle sont notées Γ_0 et Γ respectivement. Ces courbes orientées sont repérées par rapport à un trièdre fixe $\mathbf{R}(O; \vec{y}, \vec{z})$ ([1], [2]).

Nous définissons sur Γ l'abscisse curviligne s d'un point M ayant pour coordonnées (y, z) dans \mathbf{R} . À chaque point M , on associe le trièdre de Frenet $(M; \vec{t}, \vec{n})$ où \vec{t} est le vecteur tangent à Γ en M et tel que $\vec{n} = \vec{t} \wedge \vec{x}$. La surface moyenne étant inextensible, les abscisses curvilignes sont les mêmes dans les deux configurations. Les angles entre l'axe \vec{y} et les tangentes respectives à Γ_0 en M_0 et à Γ en M sont notées θ_0 et θ (fig.).



Exemple de section droite d'un tube mince.

A chaque point M est associé le trièdre de Frenet $(M, \mathbf{t}, \mathbf{n})$.

Example of the cross-sectional area of a thick tube.

Each point M is associated to a local coordinate system $(M, \mathbf{t}, \mathbf{n})$.

Les inter-efforts, par unité de longueur, en un point M de Γ sont la résultante $\vec{T} = N\vec{t} + Q\vec{n}$ de l'effort de traction ou compression N et de l'effort tranchant Q et le moment fléchissant $M\vec{x}$. Les efforts extérieurs sont donnés par une densité linéique $\vec{J}_F = -p\vec{n}$.

Les équations d'équilibre, en dehors des points où s'exercent des efforts concentrés, s'écrivent en projections sur le trièdre de Frenet :

$$(1) \quad \frac{dN}{ds} + Q \frac{d\theta}{ds} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{dQ}{ds} - N \frac{d\theta}{ds} = p,$$

$$(3) \quad \frac{dM}{ds} + Q = 0.$$

D'autre part, si l'on considère que les déformations sont petites, la loi de comportement est donnée par :

$$(4) \quad M = D \left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{d\theta_0}{ds} \right),$$

où $D = E h_0^3 (12(1 - \nu^2))^{-1}$ est le module de rigidité à la flexion, E est le module d'Young, ν le coefficient de Poisson, h_0 l'épaisseur de la paroi. Cette loi reste valable tant que $h_0 r \ll 1$, où r désigne le minimum de la fonction $d\theta/ds$.

Les principales variables réduites sont données sous la forme :

$$(5) \quad \tilde{s} = 2\pi \frac{s}{L}, \quad \tilde{p} = \frac{pL^3}{(2\pi)^3 D},$$

où L désigne la longueur de la courbe Γ .

En combinant les équations (1)-(5) et en posant $k = \theta'$ on a pour $\tilde{s} \in]0, 2\pi[$:

$$(6) \quad k''(\tilde{s}) - k_0''(\tilde{s}) - k(\tilde{s}) \int_0^{\tilde{s}} k_0'(\xi) k(\xi) d\xi + \frac{1}{2} k^3(\tilde{s}) - C k(\tilde{s}) - \tilde{p} = 0,$$

où k' désigne la dérivée de k et C une constante d'intégration.

La courbe Γ_0 a pour origine celle du repère \mathbf{R} . Le repère \mathbf{R} est par ailleurs choisi de telle sorte que la courbe Γ_0 ait sa tangente parallèle à l'axe des y au point O . Afin d'éliminer les déplacements de solides rigides, on impose à l'arc Γ une condition d'encastrement au point O . En utilisant d'une part les conditions d'encastrement, et d'autre part, les conditions de fermeture des courbes Γ_0 et Γ , on a les relations :

$$(7) \quad \int_0^{2\pi} k_0(\xi) d\xi = \int_0^{2\pi} k(\xi) d\xi = 2\pi.$$

De plus, on impose à la courbe Γ_0 de posséder les propriétés suivantes :

$$(8) \quad k_0'(0) = k_0'(2\pi) = 0,$$

indiquant que l'origine a été prise en un point extrémal de la courbure de la configuration initiale. Des conditions aux limites analogues sont choisies pour l'inconnue $k(\tilde{s})$. En effet, dans le cadre de notre étude, l'arc Γ est une courbe fermée. Celle-ci présentera donc au moins quatre sommets avant et après déformation (voir le théorème des quatre sommets, [3]). Les sollicitations exercées sur l'arc étant uniquement normales, l'origine restera donc un sommet dans la configuration déformée. Ces conditions s'écrivent :

$$(9) \quad k'(0) = k'(2\pi) = 0.$$

En intégrant l'équation (6) sur l'intervalle $]0, 2\pi[$ et en utilisant les conditions (7)-(9), on détermine la constante C .

Ainsi, la formulation finale du problème est donnée par :

$$(P) \quad k(\tilde{s}) = k_0(\tilde{s}) + \frac{p\tilde{s}^2}{2} + [k(0) - k_0(0)] - \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{s}} (\tilde{s} - u) k^3(u) du \\ + \int_0^{\tilde{s}} (\tilde{s} - u) k(u) \left(\int_0^u k'_0(v) k(v) dv \right) du \\ + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} k^3(u) du - \int_0^{2\pi} k^3(\tau) \left(\int_0^\tau k'_0(v) k(v) dv \right) d\tau - 2\pi\tilde{p} \right\} \\ \times \int_0^{\tilde{s}} (\tilde{s} - u) k(u) du.$$

Par ailleurs, on introduit un paramètre $\varepsilon > 0$, et on considère les solutions du problème (P) satisfaisant à la condition :

$$(10) \quad k(0) - k_0(0) = \varepsilon.$$

Cette condition traduit que les variations du rayon de courbure à l'origine de l'arc, choisie arbitrairement, sont contrôlées par le paramètre ε .

2. Existence de solutions du problème (P)

Ce paragraphe est consacré à l'existence de solutions du problème (P) satisfaisant la condition (10). On introduit les espaces de Sobolev $W^{m,p}(0, 2\pi)$ munis de la norme hilbertienne :

$$\forall u \in W^{m,p}(0, 2\pi) : \quad \|u\|_{m,p} = \sum_{j=0}^m \|u^{(j)}\|_p,$$

où $\|u^{(j)}\|_p$ désigne la norme naturelle de $L^p(0, 2\pi)$ pour la dérivée j -ième de u . On considère alors la fonctionnelle φ définie par :

$$(11) \quad \varphi : H^2(0, 2\pi) \rightarrow H^3(0, 2\pi) \\ k \rightarrow \varphi(k) = \varphi_1(k) + \varphi_2(k) + \varphi_3(k) + \varphi_4(k),$$

où:

$$[\varphi_1(k)](s) = k_0(s) + \frac{ps^2}{2} + \varepsilon, \quad [\varphi_2(k)](s) = -\frac{1}{2} \int_0^s (s-u) k^3(u) du, \\ [\varphi_3(k)](s) = \int_0^s (s-u) k(u) \left(\int_0^u k'_0(v) k(v) dv \right) du, \\ [\varphi_4(k)](s) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} k^3(u) du - \int_0^{2\pi} k^3(\tau) \left(\int_0^\tau k'_0(v) k(v) dv \right) d\tau - 2\pi p \right\} \\ \times \int_0^s (s-u) k(u) du$$

et k_0 est une fonction donnée appartenant à $H^3(0, 2\pi)$.

Les solutions du problème (P) satisfaisant la condition (10) sont par construction les points fixes de la fonctionnelle φ .

Nous proposons de vérifier que la fonctionnelle φ satisfait les conditions du théorème de Schauder [4].

LEMME 1. — Les fonctionnelles φ_i , i de 1 à 4, sont des applications définies et continues de $H^2(0, 2\pi)$ dans $H^3(0, 2\pi)$ vérifiant les inégalités suivantes :

$$(12) \quad \|\varphi_1(k)\|_{3,2} \leq 2\varepsilon\sqrt{2\pi} + 3\|k_0\|_{3,2} + p\sqrt{\frac{(2\pi)^5}{5} + \frac{2}{3}(2\pi)^3 + 4\pi},$$

$$(13) \quad \|\varphi_2(k)\|_{3,2} \leq \sqrt{\left(\frac{4}{3}\pi^4 + 1\right)C_6^6 + 2\pi C_3^6 + 9C_8^4 C_4^2} \|k\|_{3,2}^3,$$

$$(14) \quad \|\varphi_3(k)\|_{3,2} \leq \sqrt{\frac{2}{9}\frac{(2\pi)^{9/2}}{5^{1/2}}C_4^2 + 2\pi^2 + 3 + 2C_8^4 C_4^2} \|k\|_{2,2}^4 \|k_0\|_{3,2}^2,$$

$$(15) \quad \|\varphi_4(k)\|_{3,2} \leq \dots \\ \leq \sqrt{\frac{(2\pi)^4}{3} + 16\pi^2 + 8} \left\{ C_6^3 \sqrt{2\pi} \|k_0\|_{3,2} \|k\|_{2,2}^5 + \frac{1}{2} C_3^3 \|k\|_{2,2}^4 + 2\pi p \|k\|_{2,2} \right\},$$

où les constantes C_3 , C_4 , C_6 et C_8 sont respectivement les constantes des injections de Sobolev suivantes :

$$(16) \quad \forall u \in H^1(0, 2\pi) : \quad \|u\|_{0,p} \leq C_p \|u\|_{1,2}, \quad p = 3, 4, 6, 8.$$

L'application du théorème de Schauder nécessite alors d'évaluer numériquement l'ensemble des constantes de Sobolev que nous avons mentionnées.

THÉORÈME 1. — Soient C_p , pour $p = 3, 4, 6$ et 8 , les constantes des injections de Sobolev de $H^1(0, 2\pi)$ dans $L^p(0, 2\pi)$. On a les estimations numériques suivantes :

$$(17) \quad C_3 \approx 1,41, \quad C_4 \approx 1,68, \quad C_6 \approx 2,01 \quad \text{et} \quad C_8 \approx 2,26.$$

Preuve. — D'après les travaux de Talenti [5], on a pour toute fonction u définie de R^3 dans R , suffisamment régulière et à décroissance rapide à l'infini :

$$(18) \quad \left(\int_{R^3} |u(x, y, z)|^6 dx dy dz \right)^{1/6} \leq C_T \left(\int_{R^3} |Du(x, y, z)|^2 dx dy dz \right)^{1/2}, \quad C_T \approx 0.42,$$

où $|Du(x, y, z)|$ représente la longueur du gradient de u .

Soit alors v une fonction définie de R dans R , suffisamment régulière et à décroissance rapide à l'infini. On pose $u(x, y, z) = v(x)v(y)v(z)$. L'inégalité (18) appliquée à u permet d'écrire pour v :

$$(19) \quad \|v\|_{L^6(R)}^3 \leq C_p \sqrt{3} \|v'\|_{L^2(R)} \|v\|_{L^2(R)}^2.$$

On procède à présent par symétrie et troncature en considérant une fonction de troncature χ , affine par morceaux. On a alors pour toute fonction $w \in H^1(0, 2\pi)$, les inégalités suivantes :

$$(20) \quad \|w\|_{0,6} \leq \|\chi(w)\|_{L^6(R)} \leq (C_T \sqrt{3})^{1/3} \|\chi(w)\|_{H^1(R)} \leq (C_T \sqrt{3})^{1/3} \sqrt{5} \|w\|_{1,2}.$$

Concernant l'évaluation de C_8 , nous procéderons par interpolation. À cette fin, on utilise l'injection de $H^1(R)$ dans $L^\infty(R)$. On pourra trouver une valeur de la constante de cette injection dans Brezis [6].

En procédant de nouveau par symétrie et troncature, on détermine une majoration de la constante C_∞ associé à l'injection de $H^1(0, 2\pi)$ dans $L^\infty(0, 2\pi)$:

$$(21) \quad C_\infty \leq e^{1/e} \sqrt{5} \approx 3.23.$$

L'estimation des constantes C_3 , C_4 et C_8 , résulte alors de l'application de l'inégalité de Hölder, ce qui achève la démonstration.

Par ailleurs, la fonctionnelle φ est un opérateur compact de $H^2(0, 2\pi)$ dans lui-même. En effet, d'une part φ est une application continue en vertu des différents termes qui la composent, d'autre part, l'image d'une suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée de $H^2(0, 2\pi)$ est bornée dans $H^3(0, 2\pi)$ d'après le lemme 1. Il en résulte qu'il existe une sous-suite de $\varphi(k_n)$ qui converge dans $H^2(0, 2\pi)$, l'injection canonique de $H^3(0, 2\pi)$ dans $H^2(0, 2\pi)$ étant compacte.

Le théorème de Schauder peut à présent être appliqué à la fonctionnelle φ .

THÉORÈME 2. – Soient r , r_0 , p et ε vérifiant $r \leq 0.11$, $r_0 \leq 0.01$, $p \leq 10^{-4}$ et $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

Il existe une solution k du problème (P) dans la boule $B(0, r)$ de $H^2(0, 2\pi)$, satisfaisant la condition (10), pour toute fonction k_0 appartenant à la boule $B(0, r_0)$ incluse dans $H^3(0, 2\pi)$.

Preuve. – Soit $B(0, r)$ la boule de centre O de rayon r de $H^2(0, 2\pi)$. Sous les conditions précédentes, $\varphi[B(0, r)]$ est incluse dans $B(0, r)$. En effet, en vertu du théorème 1, on montre que :

$$(22) \quad \|\varphi(k)\|_{2,2} \leq 85 \|k_0\|_{3,2} \|k\|_{2,2}^5 + 6 \|k\|_{2,2}^4 + 48 \|k\|_{2,2}^3 + 36 \|k_0\|_{3,2} \|k\|_{2,2}^2 + \dots \\ + 27p \|k\|_{2,2} + 46p + 2\sqrt{2\pi}\varepsilon + 3 \|k_0\|_{3,2}.$$

Les valeurs numériques portant sur r , r_0 , p et ε garantissent alors que $\|\varphi(k)\|_{2,2} \leq \|k\|_{2,2}$. Ces valeurs ont été calculées afin que le rayon de la boule $B(0, r)$ soit maximal. L'algorithme employé a été celui du Solveur d'Excel 5.0a de Microsoft, à savoir par une méthode de gradient conjugué.

3. Conclusions

Le modèle de coques cylindriques à sections droite quelconques soumises à un champ de pressions et qui conduit à la formulation du problème (P), permet d'appréhender les variations de formes de la section droite d'un tube dans lequel s'écoule un fluide visqueux incompressible et newtonien en régime stationnaire. Le théorème 2 garantit l'existence de solutions du problème (P) satisfaisant la condition (10). On remarquera que ce résultat impose aux paramètres p et ε de vérifier $p \leq 10^{-4}$ et $\varepsilon \leq 10^{-3}$. Ceci traduit d'une part que la coque doit être soumise à des contraintes de pression n'excédant pas un seuil limite, d'autre part que les variations du rayon de courbure, à l'origine de l'arc, entre la configuration initiale et déformée soient suffisamment petites.

L'ensemble de ces travaux permettront de développer un algorithme numérique, qui s'appuiera sur l'analyse mathématique que nous avons développée, afin de quantifier les champs de déplacements résultant d'un champ de pressions donné et d'une forme initiale de la section droite du tube.

Note remise le 20 octobre 1995, acceptée après révision le 4 décembre 1995.

Références bibliographiques

- [1] Ericksen J. L. et Truesdell C. 1958. Exact theory of stress and strain in rods and shells, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1, p. 295-323.
- [2] Chaskalovic J. et Naili S., 1995. Bifurcation theory applied to buckling states of cylindrical shell, *J. Appl. Math. and Pys. (ZAMP)*, 46, 1995, p. 149-155.
- [3] Do Carmo M. P., 1976. *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [4] Berger M., 1977. *Nonlinearity and functional analysis* Einlenberg S. et Bass H. éd., Academic Press.
- [5] Talenti G., 1976. Best constants in Sobolev inequality, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 110, p. 353-372.
- [6] Brezis H., 1983. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Ciarlet P. G. et Lions J. L., éd., Masson.