C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série I, p. 923-926, 1988

Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*
(Mécanique des fluides/*Mechanics of Fluids*)

Un résultat d'unicité des solutions de Navier-Stokes modélisant une tornade

Joël CHASKALOVIC

Résumé — J. Serrin a obtenu en 1972 des résultats d'existence pour les solutions des équations de Navier-Stokes associées à un fluide visqueux, incompressible en régime stationnaire dans lequel réside une ligne de vorticité orthogonale à un plan; cet écoulement modélise une tornade. Nous établissons qu'à forte viscosité, le champ des vitesses vérifie alors une propriété d'unicité locale qui garantit la stabilité vis-à-vis de petites perturbations.

An uniqueness result for Navier-Stokes equations applied to tornado phenomena

Abstract — *In* 1972 *J. Serrin showed the existence of solutions for the Navier-Stokes equations corresponding to an infinite vortex line in a viscous fluid interacting with a plane boundary surface at right angles to the line; the time and the compressibility are not included in this model of tornadoes. We establish for high viscosity a property of uniqueness for the field of velocity which guarantees the stability against small perturbations.*

I. PRÉSENTATION DU PROBLÈME. FORMULATION MATHÉMATIQUE. — On considère un fluide visqueux, incompressible contenu dans un demi-espace limité par un plan. On suppose qu'il existe une demi-droite de vorticité orthogonale au plan et on ne s'intéressera ici qu'au régime stationnaire de l'écoulement. C'est un modèle simplifié d'un cyclone ou d'une tornade dont on prend en compte l'interaction avec le sol.

J. Serrin [1] a montré que ce problème pouvait se ramener à la résolution du système intégro-différentiel suivant :

Trouver f et Ω, deux fonctions numériques définies par :

$$f:\quad [0,1[\to\mathbf{R},\qquad \Omega:\quad [0,1[\to\mathbf{R}$$

$$x\mapsto f(x),\qquad x\mapsto\Omega(x)$$

et solutions de :

$$(\mathrm{P1})\quad\left\{\begin{aligned}&f'(x)+f^2(x)=\frac{k^2\,\mathrm{G}(x)}{(1-x^2)^2},\qquad 0\leqq x<1,\\&\Omega''(x)+2f(x)\,\Omega'(x)=0,\qquad 0\leqq x<1,\\&\mathrm{G}(x)=2(1-x)^2\int_0^x\frac{t\,\Omega^2(t)}{(1-t^2)^2}dt+2x\int_x^1\frac{\Omega^2(t)}{(1+t)^2}dt-\mathrm{P}(x-x^2),\\&f(0)=0,\qquad \Omega(0)=0,\qquad \lim_{x\to 1^-}\Omega(x)=1,\end{aligned}\right.$$

où k représente le nombre de Reynolds si l'écoulement est laminaire, P caractérisant l'énergie du vortex. Il s'agit donc d'une famille de solutions à deux paramètres.

Note présentée par Henri CABANNES.

0249-6291/88/03070923 $ 2.00

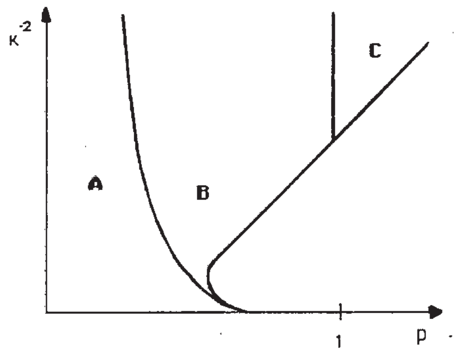

Fig. 1

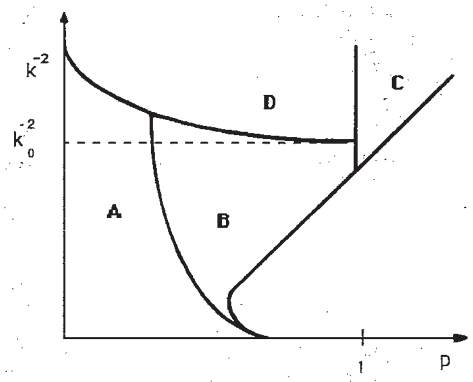

Fig. 2

Fig. 1. — Diagramme d'existence des solutions du problème (P1) (d'après J. Serrin [1]).

Fig. 1. — Existence diagram for the solutions of problem (P1) (from J. Serrin [1]).

Fig. 2. — Domaine de stabilité des solutions du problème (P3), déterminé par le théorème 2. k_0 est défini par : $k_0^{-2}=32e^3[1+e^{-1}h_0]^3[1-h_0]^{-3}$.

Fig. 2. — Stability area for the solutions of problem (P3), as deduced from theorem 2. k_0 is defined by: $k_0^{-2}=32e^3[1+e^{-1}h_0]^3[1-h_0]^{-3}$.

L'étude de J. Serrin montre que le problème (P_1) admet des solutions sous réserve que P et k vérifient des conditions présentées par la figure 1; un point pris dans l'une des zones A, B ou C permet de garantir l'existence d'une solution f dont le signe et la monotonie dépendent de la zone. Pour une telle fonction f, il existe une fonction Ω solution du problème (P_1) et on a :

$$(f, \Omega)\in(C^1([0, 1[)\cap L^1(0, 1))\times C^2([0, 1]).$$

Nous allons établir qu'il existe des sous-domaines de A, B ou C où l'on peut garantir qu'une solution du problème (P_1) est isolée dans un espace fonctionnel approprié. On en déduit un résultat d'unicité locale pour une telle solution dans cet espace.

II. L'Opérateur L. — On effectue le changement de fonction suivant :

$$\text{dans le problème } (P_1) : \quad y(x)=\operatorname{Exp}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right), \quad 0\leqq x\leqq 1.$$

On obtient alors le problème (P_2) :

$$(P2)\quad \left\{\begin{array}{l}
\text{Trouver } (y, \Omega) \text{ solution de :}\\
\qquad y''(x)=\dfrac{k^2 G(x)}{(1-x^2)^2}y(x), \qquad 0\leqq x<1,\\
\qquad \Omega'(x)=\dfrac{y^{-2}(x)}{\displaystyle\int_0^1 y^{-2}(t)\,dt}, \qquad 0\leqq x\leqq 1,\\
G(x)=2(1-x)^2\displaystyle\int_0^x \frac{t\,\Omega^2(t)}{(1-t^2)^2}dt+2x\int_x^1 \frac{\Omega^2(t)}{(1+t)^2}dt-P(x-x^2),\\
\text{et vérifiant les conditions aux limites}\\
\qquad y(0)=1, \quad y'(0)=0, \quad \Omega(0)=0, \quad \Omega(1)=1.
\end{array}\right.$$

Après deux intégrations par rapport à x, le problème (P_2) s'écrit :

$$(P_3)\quad\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } (y, \Omega) \text{ solution de :}\\ y(x)=1+\displaystyle\int_0^x \frac{k^2(x-t)}{(1-t^2)^2} G(t)\, y(t)\, dt, \qquad 0 \leqq x < 1,\\ \Omega'(x)=\dfrac{y^{-2}(x)}{\displaystyle\int_0^1 y^{-2}(t)\, dt}, \qquad 0 \leqq x \leqq 1,\\ G(x)=2(1-x)^2 \displaystyle\int_0^x \frac{t\,\Omega^2(t)}{(1-t^2)^2} dt + 2x \int_x^1 \frac{\Omega^2(t)}{(1+t)^2} dt - P(x-x^2),\\ \text{vérifiant les conditions aux limites}\\ \Omega(0)=0, \qquad \Omega(1)=1.\end{array}\right.$$

Afin d'obtenir un résultat d'unicité, on considère l'opérateur L défini par :

$$L:\quad E=C^0([0, 1]) \cap \{y \mid y>0\} \to C^0([0, 1])$$
$$y \mapsto \tilde{y}$$

où :

$$\tilde{y}(x)=L(y)(x)=1+\int_0^x \frac{k^2(x-t)}{(1-t^2)^2} G_y(t)\, y(t)\, dt,$$

$$G_y(x)=2(1-x)^2 \int_0^x \frac{t\,\Omega_y^2(t)}{(1-t^2)} dt + 2x \int_x^1 \frac{\Omega_y^2(t)}{(1+t)^2} dt - P(x-x^2)$$

et Ω_y est solution du problème différentiel

$$\left\{\begin{array}{l}\Omega_y'(x)=\dfrac{y^{-2}(x)}{\displaystyle\int_0^1 y^{-2}(t)\, dt}, \qquad 0 \leqq x \leqq 1,\\ \Omega_y(0)=0, \qquad \Omega_y(1)=1.\end{array}\right.$$

Par construction, y est solution de (P_3) si et seulement si y est un point fixe de l'opérateur L.

Les lemmes 1, 2, 3 qui suivent permettent de montrer que l'opérateur L est défini quel que soit y appartenant à E.

LEMME 1. — *La fonction Ω_y est monotone croissante de* 0 *à* 1 *lorsque x décrit l'intervalle* [0, 1].

LEMME 2. — *La fonction G_y vérifie :*

$$G_y(0)=G_y(1)=0,$$

$$G_y'(0)=2\int_0^1 \frac{\Omega_y^2(t)}{(1+t)^2} dt - P, \qquad G_y'(1)=P-1.$$

LEMME 3. — *La fonction G_y appartient à $C^3([0, 1[)$ et vérifie la double inégalité suivante :*

si l'on pose $Q=G_y'(0)$, alors,

pour tout $x \in]0,1[$: $Q(x-x^2) < G_y(x) < (1-P)(x-x^2)$.
Enfin, précisons que $\tilde{y} = L(y)$ *appartient à* $C^0([0, 1])$ *comme primitive d'une fonction de* $L^1(0, 1)$.

II. Différentiabilité de l'opérateur L. — L'opérateur L est défini sur $E = C^0([0, 1]) \cap \{y \mid y > 0\}$ qui est un ouvert de $C^0([0, 1])$ pour la norme de la convergence uniforme. On peut alors montrer le résultat suivant :

Théorème 1. — *L'opérateur* L *est différentiable sur* E *et sa différentielle vaut :*

$$[DL(y).h](x) = \int_0^x \frac{k^2(x-t)\,G_y(t)\,h(t)}{(1-t^2)^2}\,dt + \int_0^x \frac{k^2(x-t)\,y(t)}{(1-t^2)^2}[DG_y.h](t)\,dt,$$

avec :

$$[DG_y.h](x) = 2(1-x)^2 \int_0^x \frac{2t\,\Omega_y(t)}{(1-t^2)^2}[D\Omega_y.h](t)\,dt + 2x \int_x^1 \frac{2\,\Omega_y(t)}{(1+t)^2}[D\Omega_y.h](t)\,dt,$$

$$[D\Omega_y.h](x) = \int_0^x (D\Omega'_y.h)(t)\,dt = \int_0^x 2\,\Omega'_y(t)\left[-\frac{h(t)}{y(t)} + \frac{\int_0^1 (y^{-3}h)(s)\,ds}{\int_0^1 y^{-2}(s)\,ds}\right]dt.$$

IV. Estimations *a priori*. Résultat d'unicité. — Afin d'obtenir un résultat d'unicité locale, on établit les estimations *a priori* suivantes :

Lemme 4. — *Soit* y^* *une solution du problème* (P_3). *Alors :*
(i) $0 < y^*(x) < \operatorname{Exp}(1 + (1/4)(1-P)k^2)$,
(ii) *pour tout* $P \leqq 1$, *on a :* $\tilde{y}(x) > 1$.
En particulier, $y^*(x) > 1$.

Théorème 2. — *Soient* $P \leqq 1$, $k > 0$, $0 < h_0 < 1$ *tels que :*

$$(1) \qquad (1-P)k^2 + 32k^2\left[\frac{\operatorname{Exp}(1+(1/4)(1-P)k^2) + h_0}{1-h_0}\right]^3 < 1,$$

Alors tout point fixe y^* *de l'opérateur* L *est isolé dans la boule* $B(y^*, h_0) \subset E$. *Sous ces conditions, le problème* (P_3) *admet une solution unique* y^* *dans* $B(y^*, h_0)$.

V. Résultats numériques. Conclusion. — La relation (1) du théorème 2 permet de préciser les résultats obtenus par J. Serrin et résumés sur la figure 1 : cette relation introduit une zone D (*fig.* 2) telle que pour tout couple (P, k^{-2}) situé dans cette zone, la stabilité de solutions (y, Ω) du problème (P_3) est garantie vis-à-vis de petites perturbations. Cette zone caractérise uniquement les écoulements à forte viscosité; il faudra donc envisager d'autres techniques afin d'étudier la stabilité d'un tel vortex pour des nombres de Reynolds élevés.

Note reçue le 22 juin 1988, acceptée le 3 octobre 1988.

Références bibliographiques

[1] J. Serrin, The swirling vortex, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A271, 1972, p. 320-360.

Laboratoire de Météorologie dynamique,
E.N.S. 24, *rue Lhomond,* 75231 *Paris Cedex* 05.