C. R. Acad. Sci. Paris, t. 311, Série II, p. 1045-1050, 1990

Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*

Sur la modélisation mathématique de courants atmosphériques singuliers

Joël CHASKALOVIC

Résumé – Peu d'études théoriques sur la genèse des tornades ont été effectuées à ce jour. Nous envisageons ici la première étape d'une telle étude en proposant un modèle mathématique de certains courants atmosphériques observés en météorologie comme la phase initiale de la formation d'une tornade; ces courants sont provoqués par de forts gradients de température entre le sol et l'atmosphère. Ce modèle consiste en une famille de champs de vitesses à deux paramètres satisfaisant les équations de Navier-Stokes stationnaires et incompressibles, couplées à une condition d'adhérence au niveau du sol. Nous établissons un résultat d'unicité locale pour chacun de ces champs de vitesses vis-à-vis du couple de paramètres qui le définit.

On a mathematical model of atmospheric singular flows

Abstract – *So far, few theorical studies have been done on the genesis of tornadoes. Here, we investigated a first step in this direction by proposing a mathematical model of certain atmospherical flows observed in meteorology as the beginning of tornado formation; these flows are generated by strong gradients of temperature between the ground and the atmosphere. This model consists of a family of velocity fields depending on two parameters, satisfying the stationary and incompressible Navier-Stokes equations and vanishing at the ground. We establish a local property of uniqueness for each of these fields as a function of the parameters which define it.*

Abridged English Version – (I) FORMULATION OF THE PROBLEM. – It is convenient to introduce spherical polar coordinates $(\mathrm{R}, \alpha, \theta)$, where R is the radial distance from the origin, α is the angle between the radius vector and the positive z-axis, and θ is the meridian angle about the z-axis. The positive z-axis is then described by $\alpha=0$, the boundary plane $z=0$ by $\alpha=\pi/2$. The respective physical components of the velocity vector **V** in this coordinate system will be denoted by $\mathrm{V_R}$, V_α, V_θ.

We shall consider here steady-state fluid motions having the basic structure

$$\text{(1)}\qquad \mathrm{V_R}=\frac{\mathrm{G}(x)}{r},\qquad \mathrm{V}_\alpha=\frac{\mathrm{F}(x)}{r},\qquad \mathrm{V}_\theta=0\quad\text{where}\quad r=\mathrm{R}\sin(\alpha),\quad x=\cos(\alpha).$$

The streamlines of the field (1) present a characteristic form which corresponds to homothetic curves for which the center is the origin (*see* Berker [1]). In this way, this field can be proposed for modelling some atmospheric flows which govern the genesis of tornadoes.

However, the field (1) must satisfy the stationary and incompressible Navier-Stokes equations adhering to the plane $z=0$. Then, we find after some calculations that F and G are solutions of the following partial differential equations:

$$\text{(2)}\qquad \nu(1-x^2)\mathrm{F}^{(4)}(x)-4\nu x\mathrm{F}^{(3)}(x)+\mathrm{F}(x)\mathrm{F}^{(3)}(x)+3\mathrm{F}'(x)\mathrm{F}''(x)=0,\qquad 0\leqq x<1,$$

$$\text{(3)}\qquad \mathrm{G}(x)=\mathrm{F}'(x)(1-x^2)^{1/2},\qquad 0\leqq x<1,$$

$$\text{(4)}\qquad (a)\quad \mathrm{F}(0)=\mathrm{F}'(0)=0,\qquad (b)\quad \lim_{x\to 1^-}-\mathrm{F}(x)=0,$$

where ν is the kinematic viscosity, the boundary condition (4 *a*) is the adherence condition $\mathrm{V}=0$ and the condition (4 *b*) guarantees that the line $\alpha=0$ is neither a source nor a sink.

The resolution of (2) with (4 *a*) and (4 *b*) gives F and then G by (3). So, we integrate three times the equation (2) on $[0, x]$ to find the problem (P1);

$$\text{(P1)}\qquad f'(x)+f^2(x)=\frac{-k^2\mathrm{P}x}{(1-x)(1+x)^2},\qquad 0\leqq x<1,\qquad f(0)=0,$$

Note présentée par Henri CABANNES.

0764-4450/90/03111045 \$ 2.00 © Académie des Sciences

where $F(x)=2\nu(1-x^2)f(x)$ and $k=(2\nu)^{-1}$, and the parameter P is a constant of integration. Physical interpretation of P is obtained when one proves that

$$\frac{\partial V_R}{\partial \alpha}(x=0, R)=\frac{P}{2\nu R}.$$

Then, P characterizes the strength of the vertical shear near the ground. Finally, we observe that we must deal with a two-parameter family of fluid motions, P and k, solution of (P1). The following lemma proves the existence of solutions of the problem (P1) and gives a *a priori* estimation of them.

LEMMA. — *Let* (P, k) *be a couple of parameters with* $P k^2<\lambda^2$ ($\lambda\approx 2{,}85$); *then solutions of the problem* (P1) *exist and satisfy the* a priori *estimation:*

$$f\sim\frac{k^2 P}{4}\operatorname{Log}(1-x) \quad as\ x\to 1^-.$$

Furthermore, these solutions are negative for $P>0$, *and positive for* $P<0$.

Proof. — Let f be the solution of (P1); we introduce the function y defined by: $y(x)=\exp\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$; the derivative y' of y is given by

$$y'(x)=-k^2 P\int_0^x \frac{t y(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt.$$

Then,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{y'(x)}{\operatorname{Log}(1-x)}=\frac{k^2 P y(1)}{4}$$

by the Hospital rule and the behavior of f is proved. This estimation shows that one can consider the solutions of (P1) in the space functions $C^1([0, 1[)\cap L^1(0, 1)$.

Moreover, Serrin [2] showed the existence of solutions of (P1) under the conditons $P k^2<\lambda^2$ ($\lambda\approx 2.85$), and $f=O(\operatorname{Log}(1-x))$; the previous estimation guarantees this result.

Finally, the sign of solutions is determined by remarking that the differential equation of the problem (P1) can be integrated:

$$f(x)=-k^2 P\int_0^x \frac{t}{(1-t)(1+t)^2}\exp\left(-\int_t^x f(u)\,du\right)dt, \qquad 0\le x<1.$$

(II) LOCAL UNICITY OF SOLUTIONS OF THE PROBLEM (P1). — In the sequel we set $y(x)=\exp\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$; the problem (P1) becomes equivalent to the problem (P2):

(P2) Find y in $C^0([0, 1])\cap\{y/y>0\}$ solution of

$$y(x)=1-k^2 P\int_0^x \frac{(x-t)\,t y(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt.$$

To establish a local uniqueness result for the solutions y of (P2), we consider the operator φ defined by:

$$\varphi:\quad C^0([0, 1])\cap\{y/y>0\}\times\mathbf{R}_+^*\to C^0([0, 1]), \qquad (y, \lambda)\to\tilde{y}$$

with

$$\lambda=-P k^2 \qquad\text{and}\qquad \tilde{y}(x)=y(x)-\left[1+\lambda\int_0^x \frac{(x-t)\,t y(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt\right].$$

Then, all solution y^* of (P2) corresponding to a parameter λ^* satisfies $\varphi(y^*, \lambda^*)=0$.

If we write the partial differential $D_y \varphi(y^*, \lambda^*)$, $D_y \varphi(y^*, \lambda^*) = I - \lambda^* T$, where T is the operator defined by:

$$T: \quad C^0([0, 1]) \to C^0([0, 1]) \qquad U \to \tilde{U} \quad \text{with } \tilde{U}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)\, t\, U(t)}{(1-t)(1+t)^2}\, dt.$$

Then, one can prove the following results:

PROPOSITION 1. — *The operator* T *is compact.*

PROPOSITION 2. — *The eigenvalues equation* $U = \mu T(U)$ *admits only the trivial solution* $U = 0$.

THEOREM. — *The partial differential* $D_y \varphi(y^*, \lambda^*)$ *is a linear Fredholm operator of index zero as a compact perturbation of the identity.*

Remarks. — (*a*) The compactness of T is established by application of Ascoli-Arzela theorem; indeed, if B is a bounded set of $C^0[(0, 1])$, T(B) consists of functions which are uniformly continous if one remarks that,

$$T(U)(x) - T(U)(x') = \int_0^x \frac{(x-x')\, t\, U(t)}{(1-t)(1+t)^2}\, dt - \int_x^{x'} \frac{(x'-t)\, t\, U(t)}{(1-t)(1+t)^2}\, dt$$

for $U \in B$, $(x, x') \in [0, 1]^2$, $x < x'$, and that the next two integrals can be controlled by:

$$\left| \int_0^x \frac{(x-x')\, t\, U(t)}{(1-t)(1+t)^2}\, dt \right| \leqq M_1 \sqrt{x'-x}\, [-\sqrt{1-x}\, \text{Log}\,(1-x)],$$

$$\left| \int_x^{x'} \frac{(x'-t)\, t\, U(t)}{(1-t)(1+t)^2}\, dt \right| \leqq \frac{1}{2} . M_1 (x'-x).$$

(*b*) Proposition 2 is demonstrated when one remarks that the eigenvalues equation in a Volterra integral equation of the second kind which admits only the trivial solution $U = 0$ (*see* Tricomi [3]).

(III) CONCLUSION. — The flows (1) describe either updrafts ($f < 0$ if $P > 0$) or downdrafts ($f > 0$ if $P < 0$) for meteorological investigations. The preceding theorem shows that these flows are stable against the parameter P. So, the complete modeling of tornado genesis will consist of perturbing the flows (1) by a field of velocity with non-zero V_θ component.

(I) MODÉLISATION MATHÉMATIQUE D'UNE ASCENDANCE. — On introduit le système de coordonnées sphériques (O; R, α, θ), où R désigne la distance radiale à l'origine, α l'angle entre le rayon vecteur et l'axe des z-positifs, et θ l'angle méridien autour de l'axe des z. L'axe des z positifs correspond à $\alpha = 0$ et le plan frontière $z = 0$ à $\alpha = \pi/2$. Les composantes respectives d'un champ de vitesses **V** dans ce système s'écrivent : V_R, V_α, V_θ.

On considère dans toute la suite une famille de champs de vitesses stationnaires ayant la structure suivante :

$$(1) \qquad V_R = \frac{G(x)}{r}, \qquad V_\alpha = \frac{F(x)}{r}, \qquad V_\theta = 0 \qquad \text{où } r = R \sin(\alpha), \quad x = \cos(\alpha).$$

Pour un tel champ, les lignes de courant sont des courbes homothétiques, le centre d'homothétie étant l'origine [1]. C'est pourquoi, le champ (1) peut être proposé comme modèle de ces courants atmosphériques intervenant dans la genèse des tornades. Par ailleurs, les fonctions F et G sont à déterminer de telle sorte que le champ **V** vérifie les équations de Navier-Stokes stationnaires, incompressibles et couplées à une condition d'adhérence au plan $z=0$.

Ainsi, F et G sont solutions du problème mixte suivant :

$$\nu(1-x^2)\,F^{(4)}(x)-4\,\nu\,x\,F^{(3)}(x)+F(x)\,F^{(3)}(x)+3\,F'(x)\,F''(x)=0, \qquad 0 \leqq x<1, \tag{2}$$

$$G(x)=F'(x)\,(1-x^2)^{1/2}, \qquad 0 \leqq x<1, \tag{3}$$

$$(a)\quad F(0)=F'(0)=0, \qquad (b)\quad \lim_{x \to 1^-} F(x)=0, \tag{4}$$

où le paramètre ν désigne le coefficient de viscosité cinématique du fluide; les conditions aux limites (4 *a*) traduisent l'adhérence du fluide au niveau du sol et la condition (4 *b*) impose à l'écoulement de ne présenter au voisinage de l'axe de l'ascendance, ni puits ni source.

La résolution de (2) couplée aux conditions (4 *a*) et (4 *b*) détermine F et par suite G par la relation (3); on intègre alors trois fois l'équation (2) sur $[0, x]$ et on obtient le problème (P1);

$$f'(x)+f^2(x)=\frac{-k^2\,P\,x}{(1-x)(1+x)^2}, \qquad 0 \leqq x<1, \qquad f(0)=0, \tag{P1}$$

où l'on a posé : $F(x)=2\,\nu(1-x^2)\,f(x)$ et $k=(2\,\nu)^{-1}$, le paramètre P étant une constante d'intégration. L'interprétation physique de P s'obtient en montrant que $F''(0)=-P/2\,\nu$ et que

$$\frac{\partial V_R}{\partial \alpha}(x=0,\ R)=\frac{P}{2\,\nu\,R}.$$

Ainsi, P caractérise l'intensité du cisaillement vertical au voisinage du sol. En outre, les solutions du problème (P 1) constituent une famille à deux paramètres k et P. Le lemme qui suit prouve l'existence de solutions du problème (P1) et précise leur comportement.

LEMME. — *Soit* (P, k) *un couple de paramètres tel que* $P\,k^2<\lambda^2$ ($\lambda \approx 2{,}85$), *alors il existe des solutions du problème* (P1) *vérifiant l'estimation* a priori *suivante :*

$$f \sim \frac{k^2\,P}{4}\ \mathrm{Log}\,(1-x) \quad \text{si } x \text{ tend vers } 1^-$$

De plus, ces solutions sont négatives ou nulles pour des valeurs du paramètre $P>0$, et positives ou nulles pour $P<0$.

Preuve. — Soit f solution du problème (P1), on pose : $y(x)=\exp\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$; la dérivée y' de y est alors donnée par

$$y'(x)=-k^2\,P\int_0^x \frac{t\,y(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt.$$

Le comportement de f au voisinage de $x=1$ s'en déduit en remarquant que

$$f(x)=\frac{y'(x)}{y(x)} \quad \text{et que} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{y'(x)}{\mathrm{Log}\,(1-x)}=\frac{k^2\,P\,y(1)}{4}$$

par application du théorème de l'Hospital. Cette estimation montre que l'on peut considérer les solutions du problème (P1) dans $C^1([0, 1[) \cap L^1(0, 1)$.

Par ailleurs, Serrin [2] a montré l'existence de solutions du problème (P1), sous réserve que $\mathrm{P}k^2$ soit strictement inférieur à une constante λ^2, $(\lambda \approx 2{,}85)$, et que f vérifie au voisinage de $x=1 : f=O(\mathrm{Log}(1-x))$.

L'estimation précédente permet ainsi d'établir l'existence de solutions de (P1).

Enfin, le signe de ces solutions est obtenu en remarquant que l'équation différentielle du problème (P 1) peut s'intégrer :

$$f(x)=-k^2\,\mathrm{P}\int_0^x \frac{t}{(1-t)(1+t)^2}\exp\left(-\int_t^x f(u)\,du\right)dt, \qquad 0 \leqq x < 1.$$

(II) Unicité locale des solutions du problème (P1). — On effectue le changement de fonction suivant le problème (P1) : $y(x)=\exp\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$.

Le problème (P1) devient équivalent au problème (P2):

Trouver y appartenant à $\mathrm{C}^0([0, 1]) \cap \{y/y>0\}$ solution de l'équation intégrale

$$\text{(P2)} \qquad y(x)=1-k^2\,\mathrm{P}\int_0^x \frac{(x-t)\,t\,y(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt.$$

Afin d'établir un résultat d'unicité locale pour les solutions y de (P2), on considère l'opérateur φ défini par :

$$\varphi: \quad \mathrm{C}^0([0, 1]) \cap \{y/y>0\} \times \mathbf{R}^* \to \mathrm{C}^0([0, 1]), \qquad (y, \lambda) \to \tilde{y}$$

avec :

$$\lambda=-\mathrm{P}k^2 \qquad \text{et} \qquad \tilde{y}(x)=y(x)-\left[1+\lambda\int_0^x \frac{(x-t)\,t\,y(t)}{(1-t)(1+t)^2}\right].$$

Ainsi, toute solution y^* du problème (P2) associée à un paramètre λ^* vérifie $\varphi(y^*, \lambda^*)=0$.

L'unicité locale de y^*, fonction de λ^*, est obtenue en montrant que l'opérateur φ vérifie les conditions du théorème des fonctions implicites au voisinage d'un couple (y^*, λ^*) tel que $\varphi(y^*, \lambda^*)=0$. Pour cela, on remarque que la différentielle partielle $\mathrm{D}_y\varphi(y^*, \lambda^*)$ s'écrit : $\mathrm{D}_y\varphi(y^*, \lambda^*)=\mathrm{I}-\lambda^*\mathrm{T}$, où l'opérateur T est défini par :

$$\mathrm{T}: \quad \mathrm{C}^0([0, 1]) \to \mathrm{C}^0([0, 1]), \qquad \mathrm{U} \to \tilde{\mathrm{U}} \quad \text{avec : } \tilde{\mathrm{U}}(x)=\int_0^x \frac{(x-t)\,t\,\mathrm{U}(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt.$$

La caractérisation de l'opérateur $\mathrm{D}_y\varphi(y^*, \lambda^*)$ s'effectue alors à partir de l'opérateur T comme suit.

Proposition 1. — *L'opérateur* T *est compact.*

Preuve. — Soit B un borné de $\mathrm{C}^0([0, 1])$, *i.e.* : $\mathrm{B}=\{\mathrm{U}\in\mathrm{C}^0([0, 1])/\|\mathrm{U}\|_0 \leqq \mathrm{M}_1\}$ où $\|\cdot\|_0$ est la C^0-norme. On montre que les éléments de T(B) sont uniformément bornés, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{M}_2>0$ tel que : $\forall\,\mathrm{U}\in\mathrm{B}$, $\|\mathrm{T}(\mathrm{U})\|_0 \leqq \mathrm{M}_2$. Par ailleurs, l'équicontinuité des fonctions de T(B) s'obtient de la façon suivante :

Soient $\mathrm{U}\in\mathrm{B}$, $(x, x')\in[0, 1]^2$, $x<x'$ alors

$$\mathrm{T}(\mathrm{U})(x)-\mathrm{T}(\mathrm{U})(x')=\int_0^x \frac{(x-x')\,t\,\mathrm{U}(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt\int_x^{x'} \frac{(x'-t)\,t\,\mathrm{U}(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt$$

et on peut contrôler ces deux intégrales par :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-x')\,t\,\mathrm{U}(t)}{(1-t)(1+t)^2}\,dt\right| \leqq \mathrm{M}_1\sqrt{x'-x}\,\{-\sqrt{1-x}\,\mathrm{Log}(1-x)\},$$

$$\left| \int_x^{x'} \frac{(x'-t)\, t\, \mathrm{U}(t)}{(1-t)(1+t)^2}\, dt \right| \leqq \frac{1}{2} \cdot \mathrm{M}_1 (x'-x).$$

L'application du théorème d'Ascoli-Arzéla établit la relative compacité de $\mathrm{T}(\mathrm{B})$ dans $\mathrm{C}^0 [(0, 1])$; par suite, l'opérateur T est compact.

Proposition 2. — *L'équation aux valeurs propres* $\mathrm{U} = \mu \mathrm{T}(\mathrm{U})$ *admet uniquement la solution triviale* $\mathrm{U} = 0$, *quel que soit* μ *appartenant à* $\mathbf{R}$.

Preuve. — Cette équation est une équation intégrale de Volterra homogène, de seconde espèce dont le noyau $\mathrm{K}(x, t)$ est défini par :

$$\mathrm{K}(x, t) = \begin{cases} \dfrac{(x-t)\, t}{(1-t)(1+t)^2} & \text{si} \quad 0 \leqq t \leqq x \leqq 1, \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leqq x \leqq t \leqq 1. \end{cases}$$

Ce noyau étant dans $\mathrm{L}^2(0, 1) \times \mathrm{L}^2(0, 1)$, on peut utiliser un résultat standard [3] pour la résolution de telles équations intégrales et on obtient immédiatement $\mathrm{U} = 0$ comme unique solution.

On peut à présent caractériser l'opérateur $\mathrm{D}_y \varphi(y^*, \lambda^*)$ par le théorème suivant.

Théorème. — *La différentielle partielle* $\mathrm{D}_y \varphi(y^*, \lambda^*)$ *est un opérateur de Fredholm d'index zéro et inversible.*

Preuve. — La compacité de l'opérateur T confère le caractère de Fredholm d'index zéro à $\mathrm{D}_y \varphi(y^*, \lambda^*)$ comme perturbation compacte de l'identité, l'inversibilité étant obtenue par la proposition 2 en choisissant $\mu = \lambda^*$, en effet, les fonctions propres U de l'opérateur T sont les éléments du noyau de l'opérateur $\mathrm{D}_y \varphi(y^*, \lambda^*)$. L'injectivité de $\mathrm{D}_y \varphi(y^*, \lambda^*)$ en découle, la nullité de l'index donnant l'inversibilité.

(III) Conclusion. — La famille de champs de vitesses (1) modélise une ascendance météorologique ($f < 0$ pour $\mathrm{P} > 0$). Cette famille décrit aussi des écoulements de la même forme mais dont les lignes de courant sont orientées de l'atmosphère vers le sol ($f > 0$ pour $\mathrm{P} < 0$).

Ces deux types d'écoulements sont susceptibles de représenter la toute première phase de la formation d'une tornade puisqu'ils ont été observées soit séparement, soit simultanément au cours de la genèse de celle-ci.

Le théorème précédent montre que le champ (1) est défini localement de manière unique par la donnée de $\mathrm{P}k^2$ associée au couple de paramètres (P, k). En effet, ce théorème montre que la différentielle partielle $\mathrm{D}_y \varphi(y^*, \lambda^*)$ est un isomorphisme et l'application du théorème des fonctions implicites prouve l'unicité locale.

La modélisation complète de la genèse d'une tornade consiste ensuite à construire par perturbation du champ de vitesses (1) une deuxième famille d'écoulements s'apparentant à un régime de tornade développée.

Cette étude a été effectuée dans le cadre d'un contrat D.R.E.T. n° 88/1215.

Note remise le 18 juin 1990, acceptée le 13 septembre 1990.

Références bibliographiques

[1] R. Berker, Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, *Hand. Phys.*, VIII/2, Berlin, Springer-Verlag, 1963, p. 59.

[2] J. Serrin, The swirling vortex, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A 271, 1972, p. 320-360.

[3] F. G. Tricomi, Integral equations, *Pure and Applied mathematics*, Courant-Bers-Stoker, 1957, p. 10.

Laboratoire de Météorologie dynamique, E.N.S., 24, *rue Lhomond*, 75231 *Paris Cedex* 05.