

Thèse de Doctorat
de
l'Ecole Normale Supérieure de Cachan

Spécialité
Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil

présentée par

Boris Desmorat

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan

TITRE DE LA THÈSE :

Optimisation de Structures Composites

Soutenue le 19 décembre 2002 devant le jury composé de :

Président :	Monsieur	O. Allix
Rapporteur :	Monsieur	S. Andrieux
Rapporteur :	Monsieur	M. Potier-Ferry
Examineur :	Madame	F. Léné
Examineur :	Monsieur	S. Grihon
Directeur de thèse :	Monsieur	G. Duvaut

Laboratoire de Modélisation et Mécanique des Structures
Université Paris 6 / CNRS
8 rue du capitaine Scott, 75015 Paris

Je tiens à remercier vivement Olivier Allix qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi que Stéphane Andrieux et Michel Potier-Ferry qui ont accepté la lourde charge d'être rapporteurs de ce travail.

Merci Georges pour tous les enseignements aussi bien humains que professionnels que tu m'as apportés,

Merci Françoise pour m'avoir si bien accueilli au LM2S,

Merci Rodrigue pour m'avoir si bien montré la voie,

Merci à tous mes amis du LM2S pour ces années bien agréables,

Merci Séverine pour ton soutien sans faille.

Résumé

Le problème de la conception optimale d'une structure élastique en terme de maximisation de la rigidité globale de cette structure au moindre coût (par exemple au moindre poids) peut revêtir de multiples formes. L'une d'elle est la minimisation d'un critère énergétique global défini comme la somme pondérée de la compliance et d'un terme de coût.

Dans cette thèse, on se propose de développer des méthodes d'optimisation numériquement performantes qui permettent de résoudre ce problème de conception optimale d'une structure industrielle du milieu de l'aéronautique : l'assemblage de plaques composites. Pour ce faire, nous développons un nouveau modèle de renforcement d'un milieu tridimensionnel élastique linéaire par des plaques de Kirchhoff Love. En considérant un milieu tridimensionnel de faible rigidité renforcé par des plaques très rigides en comparaison, il nous permet de modéliser des structures élastiques linéaires de type assemblage de plaques composites.

Dans le cas de paramètres d'optimisation distribués, le problème d'optimisation considéré dans le cadre de l'élasticité linéaire peut se résoudre à l'aide d'un algorithme déjà existant numériquement performant qui effectue des minimisations locales par rapport aux paramètres d'optimisation et permet donc d'éviter tout calcul de sensibilité global sur la structure. En utilisant le modèle d'assemblage de plaques, nous proposons une application de cet algorithme à une structure non-académique, un volet de gouverne d'Airbus. A l'aide du même modèle, nous considérons ensuite le problème d'optimisation géométrique du positionnement optimal des renforts internes et montrons comment un choix de paramètres spécifique limite le nombre de minimums locaux.

Dans une deuxième partie, nous généralisons l'algorithme à paramètres distribués précédent aux cas des lois de comportement élastiques non-linéaires. Nous prouvons que seules les lois dérivant de potentiels thermodynamiques duaux proportionnels sont utilisables avec cet algorithme. Après avoir caractérisé de tels potentiels, nous étudions sa compatibilité avec quelques lois de comportement élastiques non-linéaire dissymétriques en traction-compression qui caractérisent la dissymétrie de comportement de matériaux composites à fibres longues et de matériaux micro-fissurés.

Mots clefs : Optimisation / Compliance / Structures composites / Assemblage de plaques / Elasticité non-linéaire / Dissymétrie en traction compression

Table des matières

	iii
Résumé	v
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xiii
INTRODUCTION	1
1 Optimisation structurale basée sur la compliance	9
1.1 Définition du problème élastique de référence	12
1.2 Définition du problème d'optimisation	14
1.3 Optimisation topologique en élasticité linéaire	17
1.4 Optimisation de structures minces composites multicouches à fibres longues curvilignes	21
1.5 Optimisation structurale en élasticité non-linéaire	28
1.6 Conclusion	30
2 Modélisation du renfort d'un milieu tridimensionnel	33
2.1 Description du problème	35
2.2 Equations locales relatives au milieu tridimensionnel	35
2.3 Equations locales relatives aux renforts modélisés par des plaques de Kirch- hoff Love	36
2.4 Formulations variationnelles	40
2.5 Mise en œuvre numérique	48
2.6 Conclusion	52
3 Optimisation de structures aéronautiques de type assemblage de plaques com-	

posites	55
3.1 Définition du problème d'optimisation	58
3.2 Algorithme d'optimisation avec paramètres distribués	58
3.3 Mise en œuvre numérique dans le cas d'un assemblage de membranes composites avec effort normal	62
3.4 Exemples numériques. Cas d'un volet de gouverne d'Airbus (collaboration LM2S / AIRBUS / ONERA)	67
3.5 Optimisation de la position des renforts	84
3.6 Exemples numériques	86
3.7 Conclusion	95
4 Optimisation structurale basée sur la compliance en élasticité non-linéaire	97
4.1 Problème élastique non-linéaire de référence	99
4.2 Optimisation de la compliance dans le cas de potentiels duaux proportionnels	101
4.3 Caractérisation des potentiels duaux proportionnels	105
5 Optimisation avec des lois de comportement dissymétriques en traction-compression	111
5.1 Une loi de comportement tridimensionnelle anisotrope élastique dissymétrique en traction-compression	114
5.2 Loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire de type puissance dissymétrique en traction-compression	119
5.3 Comportements dissymétriques en traction-compression de matériaux composites à fibres longues	122
5.4 Exemples numériques pour un matériau composite à fibres longues à loi de comportement orthotrope élastique linéaire par morceaux	140
5.5 Conclusion	150
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	153
Bibliographie	157
ANNEXES	
A Minimisation locale pour un renfort de type membrane avec effort normal	163
B Orientation optimale d'un matériau à loi de comportement dissymétrique en traction-compression	169

Table des figures

1	Modèle éléments finis d'un aileron de gouverne d'Airbus (graphique autorisé à reproduction par Airbus)	2
1.1	Description d'un milieu tridimensionnel élastique	12
1.2	Épaisseur relative optimale (t) en fonction du rapport des contraintes membranaires généralisées (N_I et N_{II}) (Hammer [40])	27
1.3	Résultats de l'optimisation d'une membrane composite monocouche à fibres longues curvilignes de proportion variable chargée dans son plan (extrait de Terrel [62])	28
2.1	Description d'un milieu tridimensionnel renforcé par un renfort interne et un renfort externe	35
2.2	Description du milieu tridimensionnel utilisé pour la définition du milieu plaque	37
2.3	Représentation schématique du milieu tridimensionnel renforcé par un panneau interne	53
2.4	Déformée du milieu tridimensionnel avec un renfort interne	53
	(a) Structure tridimensionnelle	53
	(c) Renfort interne	53
3.1	Représentation schématique du milieu tridimensionnel renforcé par un panneau interne et des conditions aux limites considérées	69
3.2	Déformée du milieu tridimensionnel avec un renfort interne pour la répartition de fibres optimale	69
	(a) Structure tridimensionnelle	69
	(b) Renfort interne	69
3.3	Répartition de fibres dans le renfort interne du milieu tridimensionnel (l'échelle correspond à la proportion de fibre)	70
	(a) Répartition de fibres initiale	70
	(b) Répartition de fibres optimale	70

3.4	Etat de contraintes (Hill Tsai) dans le renfort interne du milieu tridimensionnel (échelle identique pour les deux graphiques, le maximum de l'échelle correspond au maximum de la contrainte de Hill Tsai pour la répartition de fibres initiale)	70
	(a) Pour la répartition de fibres initiale (maximum : 0.54)	70
	(b) Pour la répartition de fibres optimale (maximum : 0.29)	70
3.5	Représentation schématique du milieu tridimensionnel renforcé par un panneau interne et cinq panneaux externes	72
3.6	Déformée du milieu tridimensionnel entièrement renforcé pour la répartition de fibres optimale	72
	(a) Structure tridimensionnelle	72
	(b) Renfort interne	72
3.7	Répartition de fibres optimale dans les différents renforts du milieu tridimensionnel entièrement renforcé	73
	(a) Renfort interne	73
	(b) Renforts latéraux	73
	(c) Renfort chargé	73
	(d) Renfort opposé au renfort chargé	73
	(e) Renfort du bout	73
3.8	Modèle éléments finis d'un aileron de gouverne d'Airbus (graphique autorisé à reproduction par Airbus)	74
3.9	Représentation schématique d'une nervure interne d'aileron modélisé dans le cadre de l'élasticité bidimensionnelle	77
3.10	Déformée de la nervure pour la répartition de fibres optimale (Modèle 2D)	77
3.11	Répartition de fibres optimale pour le modèle bidimensionnel de la nervure (l'échelle correspond à la proportion de fibres)	77
3.12	Représentation schématique d'une sous-structure d'aileron tridimensionnelle avec un renfort interne (nervure) et 4 renforts externes (2 nervures latérales, extrados, intrados)	79
3.13	Déformée de la sous-structure tridimensionnelle d'aileron pour la répartition de fibres optimale	80
	(a) Déformée de la sous-structure tridimensionnelle	80
	(b) Autre vue de la déformée de la sous-structure tridimensionnelle	80
	(c) Déformée de la nervure interne	80
3.14	Répartition de fibres optimale dans le renfort interne de la sous-structure d'aileron	81

(a)	Nervure interne	81
(b)	Zoom sur la partie inférieure de la nervure interne	81
(c)	Zoom sur la partie supérieure de la nervure interne	81
3.15	Répartition de fibres optimale dans le renfort latéral de la sous-structure d'aileron	81
(a)	Nervure latérale	81
(b)	Zoom sur la partie inférieure de la nervure latérale	81
(c)	Zoom sur la partie supérieure de la nervure latérale	81
3.16	Répartition de fibres optimale dans l'extrados (renfort chargé)	82
3.17	Répartition de fibres optimale dans l'intrados (renfort inférieur)	83
3.18	Représentation schématique de la structure académique test	88
3.19	Conditions aux limites en déplacements	88
(a)	Description des conditions aux limites de type "encastrement"	88
(b)	Description des conditions aux limites de type zones d'attache	88
3.20	Conditions aux limites en efforts	88
(a)	Description du chargement constant	88
(b)	Description du chargement variable	88
3.21	Définition des paramètres d'optimisation caractérisant la position des renforts internes	88
3.22	Positions des zones d'attache supposées fixées	91
3.23	Positions optimales des renforts dans le cas de zones d'attache fixées	91
(a)	Pour un chargement constant	91
(b)	Pour un chargement variable	91
3.24	Positions optimales des renforts dans le cas de zones d'attache variables	93
(a)	Pour un chargement constant	93
(b)	Pour un chargement variable	93
3.25	Positions optimales des renforts dans le cas de l'encastrement	93
(a)	Pour un chargement constant	93
(b)	Pour un chargement variable	93
4.1	Description d'un milieu tridimensionnel élastique	99
5.1	Essai de traction-compression dans le sens des fibres d'un carbone epoxyde (document extrait de la thèse de Vittecoq [65])	124

5.2	Représentation schématique de la membrane et des conditions aux limites appliquées	149
5.3	Répartition de fibres optimale pour une loi de comportement élastique linéaire orthotrope ($E_{f_1}^C = E_{f_1}$)	151
5.4	Répartition de fibres optimale pour une loi de comportement élastique orthotrope dissymétrique en traction-compression ($E_{f_1}^C = 0.5E_{f_1}$)	151

Liste des tableaux

3.1	Positions optimales obtenues en fonction de la position initiale pour un chargement constant	91
3.2	Positions optimales obtenues en fonction de la position initiale pour un chargement variable	91
5.1	Orientation optimale minimisant l'énergie complémentaire locale à contraintes fixées dans le cas d'un matériau élastique linéaire orthotrope pour lequel $G_{12} < E_1 E_2 / (E_1 + (1 + \nu_{12}) E_2)$	146
5.2	Orientation optimale minimisant l'énergie complémentaire locale dans le cas de la loi de comportement élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression de type (5.26) dans le cas particulier défini par (5.31).	146
5.3	Résultats numériques normalisés obtenus pour les trois lois de comportement considérées	150

INTRODUCTION

L'OPTIMISATION de structures composites est un domaine vaste tant pour la multitude des applications visées que pour le nombre de problèmes d'optimisation qui peuvent être envisagés. Les structures composites ont connu un grand essor et sont couramment utilisées dans les domaines de grande diffusion pour leurs bonnes caractéristiques mécaniques à faible coût, dans les domaines de diffusion restreinte pour leur excellent rapport caractéristiques mécaniques/poids et dans les secteurs de pointe pour les spécificités nouvelles que de nouveaux matériaux composites permettent d'atteindre.

D'un autre côté, la multitude des spécificités de tels matériaux autorise l'utilisation d'un grand nombre de paramètres d'optimisation avec lesquels le concepteur peut jouer pour satisfaire à des cahiers des charges de plus en plus complexes, les objectifs en terme de performances mécaniques devenant de plus en plus difficiles à remplir dans les domaines de pointe. De nombreuses problématiques peuvent être envisagées, le poids, la résistance mécanique et la rigidité globale de la structure étant les critères mécaniques principaux dans ces domaines de hautes performances.

D'un point de vue plus technique, les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation sont nombreuses et relèvent de deux grandes familles :

- la programmation mathématique qui permet la définition d'algorithmes adaptés à des formes spécifiques de problèmes d'optimisation et qui sont donc indépendants des propriétés des disciplines considérées (mécanique, chimie, physique ...),
- les algorithmes d'optimisation qui tiennent compte de particularités spécifiques des équations considérées, dans notre cas les équations de la mécanique.

Contexte industriel de l'étude

Le travail présenté considère l'étude de structures composites aéronautiques à hautes performances. Il a été effectué dans le cadre d'une collaboration entre mon laboratoire d'accueil, le LM2S, le département de mécanique du solide et de l'endommagement de l'Onera-Lille et Airbus.

L'utilisation des méthodes numériques que nous cherchons à développer est liée à la phase de préconception de structures industrielles de géométrie complexe, ce qui implique des problèmes numériques de grande taille. Lors de cette phase de préconception, de nombreux paramètres du cahier des charges ne sont pas définis de façon précise (géométrie, choix

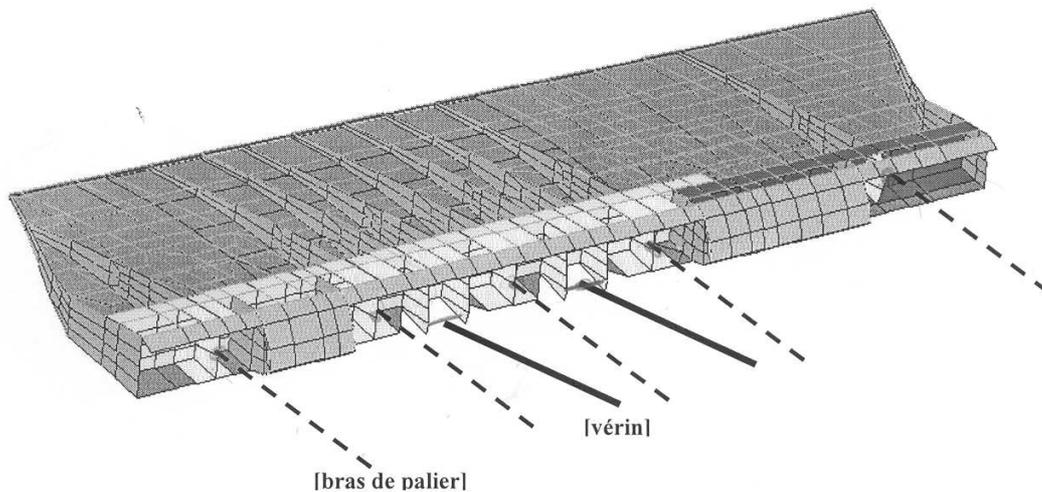


Figure 1 — Modèle éléments finis d'un aileron de gouverne d'Airbus (graphique autorisé à reproduction par Airbus)

de matériau, contraintes de poids...). L'objectif des méthodes d'optimisation à développer est alors de définir des solutions techniques optimales en fonction d'un choix particulier de critère, de paramètres et de contraintes d'optimisation et de cas de charges qui n'englobe pas toutes les contraintes de conception. A partir de ces solutions techniques, les démarches de conception et de validation internes à l'entreprise devront bien sûr être mises en œuvre.

L'outil numérique à développer doit posséder deux caractéristiques principales :

- une rapidité d'exécution pour pouvoir utiliser le processus d'optimisation en fonction d'un certain nombre de paramètres qui ne seront pas inclus dans les paramètres d'optimisation. Un compromis doit donc être trouvé lors du choix des paramètres d'optimisation et des paramètres figés lors de l'optimisation effectuée par l'outil numérique. Cette phase de choix requiert un savoir-faire ingénieur lié à la démarche de conception envisagée.
- une totale indépendance vis à vis des compétences métier de l'ingénieur qui ne doit pas avoir à intervenir lors de cette optimisation effectuée par l'outil numérique, dans le but de pouvoir obtenir des types de solutions qui n'avaient pas encore été envisagées.

Dans ce cadre industriel du milieu aéronautique, une structure test représentative a été choisie conjointement avec Airbus. En partant du constat que de nombreuses sous-structures utilisées lors de la conception d'un avion sont de type assemblage de plaques composites, un volet de gouverne d'Airbus a été retenu comme structure industrielle test. Cette structure est constituée de deux panneaux composites, l'extrados et l'intrados, et de nombreux panneaux composites internes. Au bord de fuite, une liaison encastrement est réalisée par rivetage et au bord d'attaque un système complexe de conditions aux limites est réalisé par un ensemble de longerons constitués de matériaux métalliques. Un modèle éléments finis de cette structure est présenté dans la figure 1 (autorisation Airbus).

L'optimisation de ce type de structure est confrontée aux difficultés majeures suivantes :

- structure à géométrie complexe (structure de grande taille avec variations de géométrie localisée à petite échelle)
- conditions aux limites complexes (trous habités, rivetage ...)
- nombreuses caractérisations des panneaux composites possibles

Ces trois points influent directement sur les choix possibles des paramètres d'optimisation.

Il est possible de considérer :

- des paramètres d'optimisation géométriques par exemple associés à la position des renforts internes,
- des paramètres d'optimisation par exemple associés à des critères de trous habités (critères métier),
- des paramètres d'optimisation distribués, c'est-à-dire variables dans le domaine de définition géométrique de la structure, permettant la caractérisation du matériau composite. On peut par exemple associer des paramètres d'optimisation distribués à des fibres longues curvilignes de proportion variable, à des épaisseurs relatives de plis, à des épaisseurs totales locales des stratifiés ou au séquençement des plis.

Optimisation basée sur la compliance

Un problème d'optimisation se met sous la forme générique suivante : étant donné un jeu de paramètres d'optimisation, on cherche à minimiser un critère donné en satisfaisant un certain nombre de contraintes de type égalité ou inégalité. Le choix des paramètres d'optimisation (distribués, géométriques), du critère (explicite ou non en fonction des paramètres d'optimisation) et des contraintes (explicites ou non, linéaires ou non) influe de manière radicale sur le type d'algorithme d'optimisation utilisable.

Nous considérons tout le long de la thèse le problème de la maximisation de la rigidité globale d'une structure élastique. Cet objectif peut se formuler par la minimisation d'un critère global défini sur la structure, la compliance (ou travail des efforts extérieurs dans le champ de déplacements solution d'un problème élastique). Les contraintes d'optimisation qui peuvent être considérées sont liées à la résistance mécanique et au poids de la structure. Les paramètres d'optimisation sont de deux natures, paramètres distribués ou géométriques, et sont liés au type de structure présentée dans la section précédente.

En considérant des paramètres distribués, nous nous intéressons à un algorithme d'optimisation particulier qui découle de certaines propriétés des équations de la mécanique et qui ne fait donc pas partie des méthodes de programmation mathématique. Cet algorithme, initialement introduit dans le cadre de l'élasticité linéaire par Allaire et al. [5] a été développé dans le cadre de l'optimisation topologique.

La problématique générale de l'optimisation topologique est la suivante : étant donné un domaine de l'espace sur la frontière duquel sont imposées des conditions aux limites en efforts et en déplacements, on recherche la distribution optimale d'une certaine quantité de

matière donnée qui minimise le critère choisi, tout en satisfaisant les conditions aux limites. En considérant un critère basé sur la compliance, ce problème, s'il est posé en terme de présence ou absence du matériau en chaque point (par utilisation d'une fonction indicatrice), s'avère être mal posé. De nombreux travaux ont permis de montrer que la relaxation du problème par utilisation de matériaux homogénéisés constitués localement de vide et du matériau en une proportion variable entre 0 et 1 et organisés suivant certains types de microstructures permettait de rendre le problème bien posé.

Pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes ont vu le jour suivant la reformulation du problème d'optimisation initial en un problème de type minimisation-maximisation par utilisation du théorème de l'énergie potentielle, ou en un problème de type minimisation-minimisation par utilisation du théorème de l'énergie complémentaire. Une autre différence entre ces approches est liée à la prise en compte de la contrainte d'optimisation qui limite le poids de la structure. Certains auteurs l'utilisent comme une contrainte dans la formulation du problème d'optimisation tandis que d'autres la transforment en un terme de pénalisation du critère.

Le travail effectué dans cette thèse s'appuie sur la reformulation du problème d'optimisation à paramètres distribués basé sur la compliance dans le cadre de l'élasticité linéaire en un problème de type minimisation-minimisation avec prise en compte de la quantité de matériau introduite sous la forme d'une pénalisation du critère. Dans ce cadre plus restreint du traitement du problème d'optimisation, un algorithme d'optimisation convergent peut être défini [5]. Il fait appel à une suite de minimisations locales par rapport aux paramètres d'optimisation distribués à contraintes fixées et de minimisations globales par rapport aux contraintes à paramètres d'optimisation fixés (par utilisation du théorème de l'énergie complémentaire). La grande force de cet algorithme est le caractère local des minimisations par rapport aux paramètres d'optimisation. Cela aboutit à une réduction importante du coût numérique, surtout si cette minimisation est explicite, car aucune analyse de sensibilité globale n'est à effectuer, et permet donc, si le nombre d'itérations à convergence s'avère être faible, le traitement des structures complexes qui nous intéressent plus particulièrement, les assemblages de plaques composites.

Dans la littérature, de nombreuses études traitent de l'optimisation des plaques ou coques composites à fibres longues. Nous nous plaçons toujours dans la même problématique de l'optimisation de la compliance que celle décrite ci-dessus. Les différences notables qui apparaissent par rapport à l'optimisation topologique sont liées aux types différents de paramètres d'optimisation considérés. En les considérant distribués, ils peuvent être relatifs aux épaisseurs relatives des plis, à l'orientation locale du matériau homogénéisé du stratifié, aux proportions de fibres ... Dans ces différents cas, la minimisation locale s'écrit différemment et est parfois explicite. Une revue détaillée sera présentée dans le premier chapitre bibliographique.

Le résultat frappant de ces études est le fait que de nombreux paramètres d'optimisation liés à un large spectre de matériaux composites peuvent être pris en compte alors que les géométries des structures restent très académiques : membranes en élasticité bidimension-

nelle ou coques à comportement purement membranaire. Ce constat, mis en parallèle avec la problématique de conception aéronautique décrite dans la première section de cette introduction, révèle la nécessité de développer des modèles de structures composites complexes, tels les assemblages de plaques composites, compatibles avec l'algorithme d'optimisation, pour pouvoir profiter des nombreux résultats liés à la minimisation locale d'une large famille de matériaux composites à fibres longues.

En considérant des paramètres d'optimisation qui ne sont plus distribués, on perd en général la possibilité d'utiliser l'algorithme d'optimisation précédent car la minimisation par rapport à ces paramètres nécessite alors une analyse de sensibilité globale sur la structure qui n'est alors en général plus explicite. Dans ce cas, l'utilisation d'un algorithme d'optimisation lié à la programmation mathématique devient nécessaire. Dans le cas particulier du modèle d'assemblage de plaques composites développé et utilisé pour des paramètres d'optimisation distribués, nous étudierons le problème du positionnement optimal des renforts internes du volet de gouverne.

Prise en compte de lois de comportement élastiques non-linéaires

Les études d'optimisation de structures élastiques ont été historiquement effectuées en premier pour des lois de comportement élastiques linéaires sous les hypothèses de petits déplacements et de petites déformations. En optimisation topologique, la raison majeure est le manque de modèles mathématiques permettant d'homogénéiser des lois de comportement élastiques non-linéaires. Depuis quelques années, des méthodes de résolution de problèmes d'optimisation avec lois de comportement élastiques non-linéaires sont apparues. Elles allient quelquefois d'autres difficultés associées à des non-linéarités du problème mécanique, comme la prise en compte de grands déplacements ou de grandes déformations.

Le point de départ de notre étude est la volonté d'effectuer l'optimisation de structures constituées de matériaux composites dissymétriques en traction-compression. Différents types de dissymétries existent. Elles sont liées aux différents phénomènes physiques, en général microstructuraux, mis en jeu. Dans le contexte de matériaux composites à fibres longues utilisés dans le secteur aéronautique, nous nous intéressons plus particulièrement à deux types de dissymétries. Tout d'abord, des travaux [54][65][6] ont mis en évidence expérimentalement la dissymétrie de comportement en traction-compression pour des états de sollicitation dans le sens des fibres de matériaux composites à fibres longues. Les caractéristiques mécaniques de comportement et de résistance de tels matériaux composites se trouvent être grandement affectées dans l'état de compression. Ensuite, l'endommagement d'un certain nombre de matériaux, dont les matrices des matériaux composites à fibres longues, est lié à l'apparition de micro-fissures. A un stade d'endommagement donné, le comportement initialement symétrique en traction-compression pour un matériau non-endommagé est alors dissymétrique suivant que la sollicitation entraîne l'ouverture des micro-fissures et donc une perte de rigidité en traction ou la fermeture des micro-fissures sans perte de rigidité en compression.

Le concept de dissymétrie en traction-compression s'avère donc être fréquemment rencontré et est lié à des phénomènes microstructuraux qui souvent diminuent de façon significative les caractéristiques de comportement ou de résistance mécanique. Sa non-prise en compte lors d'un processus d'optimisation peut donc aboutir à des résultats fortement éloignés des objectifs visés. D'un point de vue optimisation, la prise en compte de lois de comportement non-linéaires, de grands déplacements ou de grandes déformations, aboutit à des algorithmes d'optimisation qui font appel à des analyses de sensibilité globales, par exemple effectuées à l'aide de la méthode de l'état adjoint [14][17]. Le caractère local de la minimisation par rapport aux paramètres d'optimisation distribués, qui est une propriété fondamentale de l'algorithme présenté dans la section précédente en vue du traitement de structures industrielles, est alors perdu.

Ce constat introduit le deuxième axe de recherche de ce travail qui peut se formuler sous la forme : sous quelles conditions peut-on étendre l'algorithme d'optimisation développé dans le cadre de l'élasticité linéaire à des lois de comportement élastiques non-linéaires tout en gardant le caractère local des minimisations par rapport aux paramètres d'optimisation distribués ?

Présentation de la thèse

Dans un contexte industriel défini par une collaboration avec Airbus et l'Onera-Lille, le problème de la maximisation de la rigidité globale d'une structure élastique pour laquelle les impératifs de poids sont prépondérants est considérée. La famille de structures à caractère industriel étudiée concerne les assemblages de plaques stratifiées composites à fibres longues. En considérant un critère défini comme la somme de la compliance et d'un terme de coût, la reformulation du problème d'optimisation par une approche de double minimisation dans le cadre de l'élasticité linéaire aboutit à un algorithme d'optimisation numériquement performant, les minimisations par rapport aux paramètres d'optimisation distribués étant locales (c'est-à-dire sur chaque élément fini dans le cadre de calculs par éléments finis).

Dans ce cadre, les objectifs de la thèse sont les suivants :

1. effectuer une modélisation d'un assemblage de plaques composites compatible avec l'algorithme d'optimisation à paramètres distribués précédent puis traiter l'optimisation d'un assemblage de plaques composites industriel : un volet de gouverne d'Airbus.
2. étendre l'algorithme d'optimisation aux lois de comportement élastiques non-linéaires avec un intérêt particulier pour les lois de comportement dissymétriques en traction-compression.

Le plan de ce manuscrit est articulé en 5 chapitres.

Dans le **chapitre 1** sont récapitulés les différents travaux de la littérature sur l'optimisation de la compliance par reformulation du problème d'optimisation sous la forme d'une double minimisation. Dans ce cadre, la problématique de l'optimisation topologique est

d'abord rappelée, puis les différentes études à paramètres d'optimisation distribués sur les matériaux composites à fibres longues sont décrites. Enfin, les différentes approches d'optimisation avec des matériaux à lois de comportement élastiques non-linéaires sont présentées.

Dans le **chapitre 2** est développée une analyse linéaire originale du problème du renforcement d'un milieu élastique tridimensionnel par des plaques de Kirchhoff Love internes ou externes. La mise sous forme variationnelle du problème permet de conclure à l'existence et à l'unicité d'une solution. Une mise en œuvre numérique par éléments finis est alors appliquée sur un exemple académique.

Le modèle obtenu est utilisé dans le **chapitre 3** pour traiter l'optimisation d'un assemblage de plaques composites à caractère industriel : un volet de gouverne d'Airbus. Dans un premier temps, on montre comment l'algorithme d'optimisation à paramètres distribués décrit au chapitre 1 peut s'appliquer à ce type de structure industrielle. Les résultats numériques obtenus permettent d'énoncer un certain nombre de règles de conception en terme de répartition optimale des fibres au sein des renforts internes du volet de gouverne. Dans un deuxième temps, la problématique du positionnement optimal des renforts internes est abordée. On montre, à l'aide d'un exemple académique, comment ce problème d'optimisation géométrique, qui possède de nombreux minimums locaux, peut se traiter numériquement simplement à l'aide de l'algorithme du gradient projeté en utilisant un jeu de paramètres d'optimisation qui permet de diminuer le nombre de minimums locaux.

Dans le **chapitre 4**, l'algorithme d'optimisation introduit au chapitre 1 est étendu aux cas de lois de comportement élastiques non-linéaires sous l'hypothèse des petits déplacements et des petites déformations. Il est montré que cette généralisation n'est possible que pour les lois de comportement élastiques non-linéaires dérivant de potentiels thermodynamiques duaux proportionnels. Une caractérisation simple et systématique de tels potentiels est présentée.

Dans le **chapitre 5**, en utilisant cette caractérisation des potentiels thermodynamiques duaux proportionnels, différentes lois de comportement dissymétriques en traction-compression sont étudiées. Un modèle tridimensionnel tenant compte de l'ouverture ou de la fermeture de micro-fissures au sein du matériau est prouvé être utilisable avec l'algorithme d'optimisation généralisé. Ensuite, dans le cas de matériaux composites à fibres longues pour lesquels une dissymétrie de comportement en traction-compression liée au phénomène de micro-flambage des fibres en compression longitudinale est observée, différents modèles de comportement sont étudiés en parallèle avec leur utilisation dans l'algorithme d'optimisation généralisé.

Chapitre 1

Optimisation structurale basée sur la compliance

Dans ce premier chapitre bibliographique, nous définissons le problème d'optimisation qui est à la base des travaux de cette thèse. Le problème de la maximisation de la rigidité globale d'une structure élastique est formulé sous la forme de la minimisation d'un critère énergétique global défini à l'aide du travail des efforts extérieurs dans le champ de déplacements solution, ou compliance. Selon le type de paramètres d'optimisation considéré, différentes contraintes d'optimisation peuvent être introduites.

Dans le cadre de l'élasticité linéaire et de paramètres d'optimisation distribués, un algorithme convergent et numériquement performant peut être défini. Initialement introduit par Allaire et al. [5] dans le cadre de l'optimisation topologique, il repose sur une reformulation du critère qui élimine les contraintes d'optimisation autres que celles liées au problème élastique de référence, en introduisant un terme de pénalisation de la compliance fonction des paramètres d'optimisation dont l'introduction doit être limitée. Ce terme de pénalisation, appelé coût, peut par exemple être proportionnel au poids de la structure optimisée.

L'algorithme d'optimisation obtenu est numériquement performant car la minimisation par rapport aux paramètres d'optimisation est locale, et même explicite pour certains choix de paramètres. Il peut en outre être utilisé pour d'autre type de structures et dans d'autres démarches que celle de l'optimisation topologique. Les structures constituées de plaques ou coques stratifiées composites à fibres longues peuvent notamment être traitées.

Une limitation forte à cette démarche est sa capacité à prendre en compte les différentes non-linéarités inhérentes aux problèmes mécaniques telles que les non-linéarités géométriques ou de comportement. Dans ces cas plus complexes, l'étude de l'optimisation de la rigidité globale d'une structure pose de nombreux problèmes théoriques et numériques.

Dans une première phase (sections 1.1 et 1.2), le problème d'optimisation et l'algorithme associé qui seront à la base des développements théoriques présentés dans la thèse sous l'hypothèse des petites perturbations et pour des paramètres distribués est présenté. Ensuite

la problématique de l'optimisation topologique d'une structure élastique est rappelée (section 1.3). La non-existence de solution au problème d'optimisation initial conduit à l'utilisation d'un processus de relaxation qui permet de reformuler le problème d'optimisation sous la forme précédemment définie. L'algorithme d'optimisation associé est alors utilisable et performant car la minimisation locale par rapport aux paramètres d'optimisation s'écrit de façon explicite. Ensuite les différents résultats de la littérature traitant de l'optimisation de structures constituées de plaques ou coques stratifiées composites à fibres longues curvilignes dans le cadre d'une formulation du problème sous la forme précédemment introduite sont décrits (section 1.4). Différents types de paramètres d'optimisation distribués sont considérés comme l'orientation des fibres, leur proportion ou bien les épaisseurs relatives des plis. Enfin, une revue des différents résultats relatifs à l'optimisation d'un critère basé sur la compliance dans le cadre de l'élasticité non-linéaire (section 1.5) présente les différents types de non-linéarités qui peuvent être introduites et les méthodes de résolution associées, ces dernières n'étant alors plus exclusivement basées sur l'algorithme d'optimisation précédemment décrit.

Sommaire

1.1	Définition du problème élastique de référence	12
1.2	Définition du problème d'optimisation	14
1.2.1	Définition du critère et des paramètres d'optimisation	14
1.2.2	Définition du problème d'optimisation	15
1.2.3	Ecriture d'une forme équivalente du problème d'optimisation	15
1.2.4	Algorithme d'optimisation	16
1.2.5	Convergence théorique	17
1.3	Optimisation topologique en élasticité linéaire	17
1.3.1	Problématique	17
1.3.2	Relaxation du problème d'optimisation par homogénéisation	19
1.3.3	Modification du problème par utilisation des matériaux fictifs	20
1.3.4	Conclusion	21
1.4	Optimisation de structures minces composites multicouches à fibres longues curvilignes	21
1.4.1	Orientation optimale d'un matériau orthotrope élastique linéaire	21
1.4.2	Paramètres d'optimisation de type épaisseurs relatives des plis	24
1.4.3	Paramètres d'optimisation de type proportion de fibres	26
1.5	Optimisation structurale en élasticité non-linéaire	28
1.5.1	Orientation optimale de quelques matériaux élastiques non-linéaires	28
1.5.2	Les différents types de non-linéarités en optimisation	29
1.6	Conclusion	30

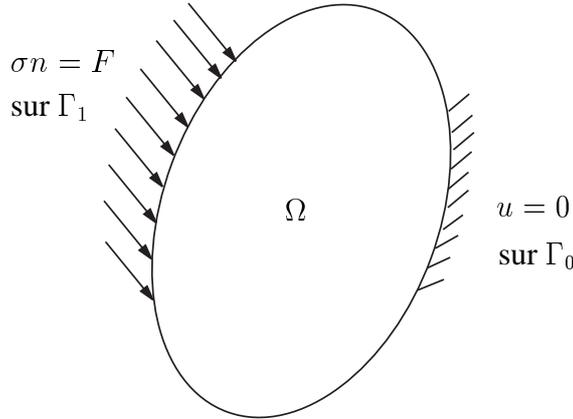


Figure 1.1 — Description d'un milieu tridimensionnel élastique

1.1 Définition du problème élastique de référence

Soit un milieu tridimensionnel Ω élastique linéaire. Sa frontière $\partial\Omega$ est divisée en deux parties Γ_0 et Γ_1 . Des déplacements nuls sont imposés sur Γ_0 , une densité surfacique de force \mathbf{F} est imposée sur Γ_1 et une densité volumique d'effort \mathbf{f} est imposée dans Ω (voir figure 1.1). Le problème d'élasticité linéaire tridimensionnelle (P) est défini par les équations suivantes :

$$(P) \quad \begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij} = a_{ijkl}\epsilon_{kl}(u) & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij}n_j = F_i & \text{sur } \Gamma_1 \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

On suppose que le tenseur de rigidité vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a_{ijkl}(x) = a_{jikl}(x) = a_{klij}(x) \\ \exists M > 0, \text{ tel que } |a_{ijkl}(x)| \leq M \\ \exists \alpha_0 > 0, \text{ tel que } a_{ijkl}(x)E_{ij}E_{kl} \geq \alpha_0 E_{ij}E_{ij}, \forall E_{ij} = E_{ji} \end{cases} \quad (1.2)$$

Sous ces conditions, le problème (P) possède une solution unique [32].

Introduisons l'espace vectoriel V des champs de déplacements cinématiquement admissibles :

$$V = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) ; v_i \in H^1(\Omega) ; \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \}$$

La **formulation variationnelle en déplacements** du problème (P) s'écrit :

Si \mathbf{u} est un champ de déplacements solution de (P) alors

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in V \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{kl}(\mathbf{v}) dV \\ L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f_i v_i dV + \int_{\Gamma_1} F_i v_i dS \end{cases}$$

Le tenseur de souplesse, inverse du tenseur de rigidité a_{ijkl} , sera noté A_{ijkl} . Introduisons l'ensemble Σ_{ad} des champs de contraintes statiquement admissibles :

$$\Sigma_{ad} = \left\{ \tau_{ij}, (i, j = 1, 2, 3) \mid \tau_{ij} = \tau_{ji}, \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \tau_{ij} n_j = F_i \text{ sur } \Gamma_1 \right\}$$

La **formulation variationnelle en contraintes** du problème (P) s'écrit :
Si σ est un champ de contraintes solution de (P) alors

$$\begin{cases} \sigma \in \Sigma_{ad} \\ A(\sigma, \tau - \sigma) = 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad} \end{cases}$$

avec

$$A(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij} \tau_{kl} dV$$

Les **théorèmes de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire** peuvent alors être présentés sous la forme de la double inégalité suivante :

Si \mathbf{u} et σ sont des champs de déplacements et de contraintes solutions du problème (P) alors on a la double inégalité

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in V, \sigma \in \Sigma_{ad} \\ -I(\mathbf{v}) \leq -I(\mathbf{u}) = J(\sigma) \leq J(\tau) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall \tau \in \Sigma_{ad} \end{cases} \quad (1.3)$$

avec

$$\begin{cases} I(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \\ J(\sigma) = \frac{1}{2} A(\sigma, \sigma) \end{cases}$$

Ces deux inégalités sont strictes si $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$ et $\tau \neq \sigma$.

Enfin, l'égalité entre le travail des efforts extérieurs, le double de l'énergie de déformation et le double de l'énergie complémentaire s'écrit :

Si \mathbf{u} et σ sont solution de (P) alors

$$L(\mathbf{u}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = A(\sigma, \sigma) \quad (1.4)$$

Remarque. Si on se place dans le cadre de l'élasticité linéaire bidimensionnelle sous l'hypothèse des contraintes planes, le problème d'élasticité se définit d'une manière identique en remplaçant les volumes par des surfaces et les surfaces par des bords linéiques. Le problème d'élasticité sera aussi noté (P) par extension.

1.2 Définition du problème d'optimisation

1.2.1 Définition du critère et des paramètres d'optimisation

Quand il s'agit de définir un algorithme d'optimisation, le choix du critère à minimiser (ou à maximiser) ainsi que le choix des paramètres d'optimisation considérés sont cruciaux. En fonction de ces choix, des méthodes de résolution très diverses peuvent être développées.

L'objectif visé est la maximisation de la rigidité globale d'une structure élastique. Cet objectif peut être réalisé en minimisant un critère énergétique global défini sur la structure. Dans cette bibliographie, comme dans tout le travail présenté dans cette thèse, on suppose que le critère est défini à partir de la compliance, qui est en fait le travail des efforts extérieurs dans le champ de déplacements solution d'un problème d'élasticité (P) (défini dans la section précédente). La compliance s'écrit :

$$Compl = L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS$$

Sauf mention contraire, nous faisons l'hypothèse restrictive de paramètres d'optimisation distribués. Ceci signifie que tout paramètre d'optimisation est un champ défini sur toute ou partie du domaine élastique Ω . Dès lors on scinde les paramètres d'optimisation en deux catégories que nous appellerons :

- paramètres d'optimisation de type orientation θ_i ($i = 1 \dots n$)
- paramètres d'optimisation de type proportion de constituant α_i ($i = 1 \dots n$)

Dans la majorité des cas considérés, sauf pour l'optimisation topologique basée sur la théorie de l'homogénéisation, les paramètres θ_i et α_i sont des fonctions scalaires bornées définies sur toute ou partie du domaine Ω .

Le critère $G(\theta_i, \alpha_i)$ à minimiser (ou à maximiser) par rapport à (θ_i, α_i) est supposé défini sous la forme :

$$G(\theta_i, \alpha_i) = Compl(\theta_i, \alpha_i) + COUT(\alpha_i)$$

où $COUT(\alpha_i) = \int_{\Omega} cout(\alpha_i) dV$ est le coût relatif aux paramètres d'optimisation de type proportion de constituant α_i et est à définir par l'utilisateur. Si l'optimisation ne tient pas compte de paramètres α_i , le critère se résume à la compliance.

A titre d'exemple, dans le cadre de l'élasticité bidimensionnelle sous l'hypothèse de contraintes planes, considérons le cas d'une membrane composite monocouche d'épaisseur constante à fibres longues curvilignes de proportion variable. Deux paramètres d'optimisation sont alors introduits en tant que champs définis sur le domaine plan S définissant la membrane :

- l'orientation des fibres $\theta(x, y)$, $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$
- la proportion de fibres $\alpha(x, y)$, $\alpha \in [0; 1]$

On note ρ_f et ρ_m les masses volumiques respectives des fibres et de la matrice. Le terme de

coût peut par exemple être défini sous la forme :

$$COUT(\alpha) = k \int_S (\alpha \rho_f + (1 - \alpha) \rho_m) dS$$

Le paramètre k est alors choisi par l'utilisateur et le coût est proportionnel au poids de la membrane composite.

1.2.2 Définition du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation s'écrit dans le cadre de la minimisation du critère :

$$\min_{(\theta_i, \alpha_i)} G(\theta_i, \alpha_i) = \min_{(\theta_i, \alpha_i)} \left(\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS + \int_{\Omega} cout(\alpha_i) dV \right) \quad (1.5)$$

où \mathbf{u} est solution du problème élastique (P).

Ce problème d'optimisation s'interprète en termes mécaniques comme la maximisation de la rigidité globale d'une structure élastique au moindre coût.

1.2.3 Ecriture d'une forme équivalente du problème d'optimisation

La solution (\mathbf{u}, σ) du problème d'élasticité linéaire (P) vérifie (voir équation (1.4)) :

$$\int_{\Omega} f_i u_i dV + \int_{\Gamma_1} F_i u_i dS = \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV \quad (1.6)$$

Le théorème de l'énergie complémentaire s'écrit :

$$\int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV = \min_{\tau \in \Sigma_{ad}} \int_{\Omega} A_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} dV$$

Le problème d'optimisation (1.5) se met donc sous la forme :

$$\min_{(\theta_i, \alpha_i)} \min_{\tau \in \Sigma_{ad}} \left(\int_{\Omega} A_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} dV + \int_{\Omega} cout(\alpha_i) dV \right) \quad (1.7)$$

Remarque. Dans le cas d'un critère défini par la compliance, sans terme de coût, une autre approche possible est la suivante :

Compte tenu de (1.4), le théorème de l'énergie potentielle implique que

$$-\frac{1}{2}L(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{kl}(u) dV - L(u) = \min_{v \in V} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{ij}(v) \epsilon_{kl}(v) dV - L(v) \right)$$

Comme $-\max(-L(u)) = \min(L(u))$, le problème d'optimisation se met sous la forme :

$$\min_{(\theta_i, \alpha_i)} L(u) = -2 \max_{(\theta_i, \alpha_i)} \min_{v \in V} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{kl}(u) dV - L(u) \right) \quad (1.8)$$

Les algorithmes d'optimisation associés à une telle formulation du problème ne seront pas utilisés dans le cadre du travail présenté. Pour une présentation détaillée de ce type d'approche voir [10] et [1] et les références incluses dans ces ouvrages. Notons tout de même ici que les travaux de [41] qui seront décrits dans la section 1.4.2 utilisent une telle approche du problème d'optimisation.

1.2.4 Algorithme d'optimisation

La formulation équivalente (1.7) du problème d'optimisation (1.5) suggère l'algorithme d'optimisation itératif suivant [5] :

1. Phase d'initialisation :

On choisit un champ de paramètres d'optimisation $(\theta_i^{(0)}, \alpha_i^{(0)})$ sur le domaine d'optimisation Ω . La résolution du problème d'élasticité (P) associé permet la définition du champ de contraintes $\sigma^{(0)}$.

2. Minimisation locale à contraintes fixées :

On effectue la minimisation locale, c'est-à-dire en chaque point du domaine Ω de l'intégrant du critère à contraintes $\sigma^{(n)}$ fixées, ce qui s'écrit :

$$\min_{(\theta_i, \alpha_i)} \left(A_{ijkl}(\theta_i, \alpha_i) \sigma_{ij}^{(n)} \sigma_{kl}^{(n)} + \text{cout}(\alpha_i) \right)$$

pour obtenir le champ de paramètres $(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)})$ qui vérifie la propriété

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A_{ijkl}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) \sigma_{ij}^{(n)} \sigma_{kl}^{(n)} dV + \int_{\Omega} \text{cout}(\alpha_i^{(n+1)}) dV \\ \leq \int_{\Omega} A_{ijkl}(\theta_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)}) \sigma_{ij}^{(n)} \sigma_{kl}^{(n)} dV + \int_{\Omega} \text{cout}(\alpha_i^{(n)}) dV \end{aligned}$$

3. Minimisation globale à paramètres d'optimisation fixés :

On résout le problème d'élasticité (P) associé au champ de paramètres $(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)})$ pour obtenir le champ de contraintes $\sigma^{(n+1)}$. Le théorème de l'énergie complémentaire, avec comme choix de champ de contraintes statiquement admissible $\sigma^{(n)}$, et après ajout du terme de coût associé aux paramètres $\alpha_i^{(n+1)}$ aux deux membres de l'inégalité im-

plique que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A_{ijkl}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) \sigma_{ij}^{(n+1)} \sigma_{kl}^{(n+1)} dV + \int_{\Omega} \text{cout}(\alpha_i^{(n+1)}) dV \\ & \leq \int_{\Omega} A_{ijkl}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) \sigma_{ij}^{(n)} \sigma_{kl}^{(n)} dV + \int_{\Omega} \text{cout}(\alpha_i^{(n+1)}) dV \end{aligned}$$

En considérant la propriété (1.6), les étapes 2 et 3 impliquent la propriété sur le critère G :

$$G(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) \leq G(\theta_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)})$$

On itère alors les étapes 2 et 3. Le critère étant une grandeur positive qui diminue à chaque itération, il converge nécessairement vers une limite.

1.2.5 Convergence théorique

En ce qui concerne la suite des fonctions $(\theta_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)})$, il est démontré dans [62] que, lorsque ces fonctions sont constantes par morceaux, $G(\theta_i, \alpha_i)$ possède un minimum $G(\tilde{\theta}_i, \tilde{\alpha}_i)$ atteint pour un couple (\mathbf{u}, σ) qui est solution du problème élastique associé à $(\tilde{\theta}_i, \tilde{\alpha}_i)$. Il existe néanmoins la possibilité de plusieurs suites minimisantes et donc de plusieurs minimums relatifs.

1.3 Optimisation topologique en élasticité linéaire

Cette section est dédiée à la présentation succincte de quelques travaux portant sur l'optimisation topologique basée sur la compliance qui aboutissent à une formulation du problème d'optimisation du type (1.7). La problématique de l'optimisation topologique est tout d'abord rappelée. La non-existence de solution au problème d'optimisation obtenu impose alors le recours à une méthode de relaxation : la démarche de relaxation du problème à l'aide de matériaux composites et de la théorie de l'homogénéisation est tout d'abord présentée, puis l'approche par les matériaux fictifs est décrite.

Nous rappelons que les travaux effectués par une reformulation du problème d'optimisation du type (1.8) ne sont pas présentés et le lecteur est dirigé vers les ouvrages de référence [10] et [1] et aux références incluses dans ces ouvrages.

1.3.1 Problématique

L'objectif de l'optimisation topologique est le suivant : étant donné un domaine Ω dont la frontière $\partial\Omega$ est divisée en trois parties Γ_0 , Γ'_1 et Γ''_1 , un chargement surfacique \mathbf{F} non nul sur la partie de la frontière Γ'_1 , un chargement volumique \mathbf{f} dans Ω , des déplacements imposés sur Γ_0 , on recherche la répartition optimale d'un matériau isotrope élastique linéaire

de tenseur de rigidité a dans Ω qui assure la prise en compte des conditions aux limites imposées et qui minimise un critère que l'on supposera basé sur la compliance.

Ce problème est approché par l'étude de la répartition optimale de deux matériaux isotropes élastiques linéaires de tenseurs de rigidité a et b dans Ω qui minimise un critère basé sur la compliance, la rigidité du matériau b étant supposée faible devant celle du matériau a . La loi de comportement dans Ω est :

$$a_\chi(x) = \chi(x)a + (1 - \chi(x))b \quad \text{où } \chi \in \{0, 1\} \quad (1.9)$$

Le problème d'élasticité s'écrit :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_\chi + \mathbf{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_\chi = a_\chi \epsilon(\mathbf{u}_\chi) & \text{dans } \Omega \\ \sigma_\chi n = \mathbf{F} & \text{sur } \Gamma'_1 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Dans cette présentation, le critère à minimiser est choisi de la forme :

$$G(\chi) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_\chi dV + \int_{\Gamma'_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_\chi dS + k \int_{\Omega} \chi dV$$

Le problème d'optimisation est défini par la minimisation :

$$\inf_{\chi} G(\chi) \quad (1.10)$$

Ce problème est démontré être mal posé dans le sens où il existe des exemples pour lesquels il n'existe pas de minimum (par exemple voir [1], théorème 4.1.2).

Dès lors, le problème d'optimisation (1.10) est relaxé en permettant la prise en compte de lois de comportement plus générales que (1.9) (une autre approche que nous ne décrivons pas ici consiste en l'ajout de contraintes au problème d'optimisation pour le rendre bien posé). Cette démarche permet alors de définir des solutions de ces problèmes relaxés qui seront ensuite soumises à un processus de pénalisation qui permettra de définir un design associé à des matériaux à loi de comportement de type (1.9).

Différentes méthodes peuvent être utilisées. Nous décrivons dans les sections suivantes l'approche qui utilise la théorie de l'homogénéisation présentée par Allaire et ses coauteurs dans [2, 5] et synthétisée dans le livre [1] du même auteur et celle des matériaux fictifs [10, 1], qui correspond en fait à une modification du problème initial.

1.3.2 Relaxation du problème d'optimisation par homogénéisation

Le processus de relaxation basé sur l'homogénéisation définit une loi de comportement plus générale sous la forme :

$$\sigma = A_\alpha^* \epsilon(\mathbf{u})$$

où $(\alpha, A^*) \in CD = \{(\alpha, A^*) \mid A^* \in G_\alpha\}$, G_α étant l'ensemble des lois de comportement homogénéisées défini par le mélange de deux matériaux a et b en proportion α et $(1 - \alpha)$. α est donc un paramètre d'optimisation de type proportion de constituant. A_α^* n'est pas un paramètre scalaire et est à cheval sur les deux catégories définies dans la section 1.2.1.

La fonction coût est choisie proportionnelle à la quantité de matériau rigide a et le problème d'optimisation s'écrit alors :

$$\min_{(\alpha, A^*) \in CD} \left(\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS + k \int_{\Omega} \alpha dV \right)$$

où \mathbf{u} est solution du problème d'élasticité linéaire :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma + \mathbf{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma = A_\alpha^* \epsilon(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \\ \sigma n = \mathbf{F} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Ce problème d'optimisation relaxé possède au moins une solution qui, suivant un certain sens mathématique, est relié à un design du matériau composite défini par la loi de comportement (1.9) ([1], théorème 4.1.7). Certains exemples laissent apparaître l'existence de plusieurs minimums globaux et il n'existe à ce jour pas de résultat sur la possible existence de minimum local ([1], remarque 4.1.18). On définit alors l'ensemble des paramètres d'optimisation basés sur les lamifiés séquentiels $LD^+ = \{(\alpha, A^*) \mid A^* \in L_\alpha^+\}$, où L_α^+ est l'ensemble des lamifiés séquentiels définis à partir du mélange des matériaux a et b en proportion α et $(1 - \alpha)$. On peut alors démontrer qu'une solution du problème d'optimisation peut être recherchée pour $(\alpha, A^*) \in LD^+$ car ([1], théorème 4.1.12) :

$$\begin{aligned} \min_{(\alpha, A^*) \in CD} \left(\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS + k \int_{\Omega} \alpha dV \right) \\ = \min_{(\alpha, A^*) \in LD^+} \left(\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS + k \int_{\Omega} \alpha dV \right) \end{aligned}$$

Puis la modification du problème d'optimisation décrite dans la section 1.2.3 est appliquée pour obtenir un problème de type (1.7) pour lequel l'algorithme défini dans la section 1.2.4 est utilisable. L'utilisation de la formulation du problème utilisant les lamifiés séquentiels constitue une simplification significative du problème car, les lois de comportement des lamifiés séquentiels étant connues de façon explicite, la minimisation locale par rapport aux

paramètres d'optimisation s'écrit de manière explicite ([1], théorème 2.3.36).

1.3.3 Modification du problème par utilisation des matériaux fictifs

Une loi de comportement plus générale est définie sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \alpha a_{ijkl} \epsilon_{kl}(u) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha \in [0; 1] \\ a \text{ fixé connu} \end{cases}$$

α est donc un paramètre de type proportion de constituant. Le problème d'optimisation s'écrit alors :

$$\min_{\alpha} \left(\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS + k \int_{\Omega} \alpha dV \right)$$

où \mathbf{u} est solution du problème d'élasticité linéaire :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij} = \alpha a_{ijkl} \epsilon_{kl}(u) & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij} n_j = F_i & \text{sur } \Gamma_1 \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

Ce problème d'optimisation possède au moins une solution, et tout minimum local est un minimum global ([1], théorème 5.2.8). Les solutions ne sont toutefois plus liées au type de design défini avec la loi de comportement (1.9) prise avec $b = 0$. Ce problème d'optimisation est modifiable comme précédemment et l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 1.2.4 est applicable.

Remarque. *En élasticité bidimensionnelle, cette approche des matériaux fictifs correspond à l'optimisation d'une membrane d'épaisseur variable α , et est dans ce cas équivalente à la formulation relaxée du problème tridimensionnel présentée dans la section précédente à laquelle on ajoute l'hypothèse de contraintes planes ([1], lemme 5.2.6).*

Remarque. *On peut aussi considérer une loi de comportement dénommée SIMP (simplified isotropic material with penalization) qui permet d'obtenir à la fin du processus d'optimisation une structure optimale déjà pénalisée. Dans ce cas la loi de comportement s'écrit :*

$$\sigma_{ij} = \alpha^n a_{ijkl} \epsilon_{kl}(u) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha \in [0; 1] \\ n > 1 \text{ fixé connu} \\ a \text{ fixé connu} \end{cases}$$

mais alors l'existence d'une solution au problème d'optimisation n'est plus assurée. Une revue détaillée de l'utilisation de telles lois de comportement en optimisation topologique peut être trouvée dans [14].

1.3.4 Conclusion

L'optimisation topologique traite donc de la répartition optimale d'un matériau au sein d'un domaine prédéfini. L'algorithme d'optimisation sous la forme présentée dans la section 1.2.4 fût initialement introduit dans le travail de Allaire et al. [5]. Il peut cependant s'appliquer à d'autres problématiques, telle la répartition des fibres au sein d'une structure composite mince (coque, plaque, membrane). Cette structure mince peut aussi avoir une épaisseur variable, auquel cas on est ramené à l'approche des matériaux fictifs. C'est pourquoi dans la section suivante, nous nous limiterons à l'étude de la répartition des fibres dans des structures minces *d'épaisseur totale constante* et des problématiques qui y sont associées.

1.4 Optimisation de structures minces composites multicouches à fibres longues curvilignes

Dans cette section sont présentés les résultats majeurs des études traitant de l'optimisation de structures minces d'épaisseur constante constituées de matériaux composites à fibres longues curvilignes. L'optique est différente de celle de l'optimisation topologique : on recherche toujours à maximiser la rigidité globale de la structure en utilisant un critère basé sur la compliance et une formulation du problème d'optimisation de type (1.5), mais au lieu de rechercher la répartition optimale d'un matériau élastique linéaire isotrope dans un domaine Ω , on cherche la conception optimale d'une structure mince (plaque ou coque) multicouche composite à fibres longues, pour laquelle le matériau homogénéisé est défini à partir des caractéristiques des fibres et de la matrice qui constituent chaque pli.

Nous nous limiterons à l'utilisation de paramètres d'optimisation distribués, ce qui exclut les implantations de fibres définies par une fonctionnelle dont les paramètres sont constants sur le domaine définissant la structure mince. L'utilisation de paramètres d'optimisation distribués exclut donc les fibres rectilignes ou bien une géométrie de fibres définie par des fonctions hyperboliques ou paraboliques (voir par exemple [24]). Il est néanmoins à noter que l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 1.2.4 peut être utilisé dans ces cas de paramètres non-distribués, mais il perd alors généralement sa caractéristique principale qui est que les minimisations par rapport aux paramètres de conception sont locales (c'est-à-dire effectuées en chaque point, ou numériquement, sur chaque élément fini).

1.4.1 Orientation optimale d'un matériau orthotrope élastique linéaire

Une étape importante lors de la mise œuvre de l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 1.2.4 est le traitement de la minimisation locale. Lorsque l'un des paramètres d'optimisation utilisé est l'orientation du matériau considéré, des solutions explicites à cette minimisation existent.

Dans cette section, nous présentons les travaux de Cheng et Pedersen [19] qui résolvent

le problème de l'orientation optimale des matériaux orthotropes en élasticité linéaire bi-dimensionnelle, qui sont les modèles classiques de comportement de stratifiés composites symétriques obtenus après intégration suivant l'épaisseur. Nous nous limiterons à la présentation des résultats de la minimisation de l'énergie complémentaire locale à contraintes fixées. L'article traite aussi le cas de la maximisation de l'énergie complémentaire et les cas de minimisation et maximisation de l'énergie potentielle. Un traitement du cas plus général de l'élasticité linéaire anisotrope peut être trouvée dans [23] et [56].

Dans toute cette section nous utiliserons la définition en $\sqrt{2}$ des vecteurs contraintes et déformations utilisée par les auteurs. Ces vecteurs s'écrivent alors :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \sqrt{2}\epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

La matrice de souplesse qui lie les vecteurs contraintes et déformations ainsi définis, sous l'hypothèse des contraintes planes s'écrit sous la forme :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{pmatrix} = \frac{1}{E_1} \begin{pmatrix} 1 & \beta_4 - \beta_3 & 0 \\ \beta_4 - \beta_3 & 1 - 2\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \beta_2 - 3\beta_3 - \beta_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \beta_2 = (1 - E_1/E_2)/2 \\ \beta_3 = (1 + E_1/E_2 - E_1/G_{12} + 2\nu_{12})/8 \\ \beta_4 = (1 + E_1/E_2 - E_1/G_{12} - 6\nu_{12})/8 \end{cases}$$

On considère un état de contraintes σ connu fixé. Soit σ_I et σ_{II} les contraintes principales associées à σ . On suppose sans perte de généralité que $|\sigma_I| \geq |\sigma_{II}|$ et que $E_1 > E_2$.

Soit ϕ l'angle orienté défini entre l'axe associé à la contrainte principale maximale en valeur absolue, et la direction du matériau orthotrope associée à la plus grande rigidité E_1 . L'énergie complémentaire locale u_C s'écrit alors :

$$u_C = \frac{1}{2E_1} \left\{ [1 - \beta_2(1 - \cos 2\phi) - \beta_3(1 - \cos 4\phi)] \sigma_I^2 + [1 - \beta_2(1 + \cos 2\phi) - \beta_3(1 - \cos 4\phi)] \sigma_{II}^2 + 2(\beta_4 - \beta_3 \cos 4\phi) \sigma_I \sigma_{II} \right\}$$

On différencie u_C par rapport à ϕ :

$$\frac{\partial u_C}{\partial \phi} = -\frac{4\beta_3}{E_1} (\sigma_I - \sigma_{II})^2 \sin 2\phi (\zeta + \cos 2\phi) \quad \text{avec} \quad \zeta = \frac{\beta_2 \sigma_I + \sigma_{II}}{4\beta_3 \sigma_I - \sigma_{II}}$$

En considérant que $|\sigma_I| \geq |\sigma_{II}|$, on a la propriété

$$\text{sign}(\zeta) = -\text{sign}(\beta_3) \quad (1.11)$$

La condition $\frac{\partial u_C}{\partial \phi} = 0$ est obtenue dans les cas suivants :

- $\beta_2 = \beta_3 = 0$: matériau isotrope
- $\sigma_I = \sigma_{II}$: état de contraintes isotrope
- $\phi = 0^\circ$ ou $\phi = 90^\circ$: alignement des directions principales des contraintes avec les directions d'orthotropie du matériau
- $\cos 2\phi = -\zeta$: solutions non-triviales (qui n'existent que si $|\zeta| \leq 1$)

Le calcul de la dérivée seconde implique alors :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 u_C}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=0} &= -\frac{(\sigma_I - \sigma_{II})^2}{E_1} 8\beta_3(1 + \zeta) \\ \left. \frac{\partial^2 u_C}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=90} &= -\frac{(\sigma_I - \sigma_{II})^2}{E_1} 8\beta_3(1 - \zeta) \\ \left. \frac{\partial^2 u_C}{\partial \phi^2} \right|_{\cos 2\phi = -\zeta} &= +\frac{(\sigma_I - \sigma_{II})^2}{E_1} 8\beta_3(1 - \zeta^2) \end{aligned}$$

(pour cette dernière égalité, il s'agit bien d'un signe +, le signe – de l'article est erroné).

Une comparaison des valeurs de l'énergie complémentaire pour $\phi = 0$, $\phi = 90$ (et $\cos 2\phi = -\zeta$ si $|\zeta| \leq 1$) aboutit à :

$$\begin{aligned} u_C|_{\phi=0} - u_C|_{\phi=90} &< 0 \\ \text{sign}(u_C|_{\phi=0} - u_C|_{\cos 2\phi = -\zeta}) &= \text{sign}(\beta_3) \\ \text{sign}(u_C|_{\phi=90} - u_C|_{\cos 2\phi = -\zeta}) &= \text{sign}(\beta_3) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Différents cas existent en fonction des paramètres matériau. Nous présentons le cas qui correspond aux matériaux composites à fibres longues classiquement rencontrés définis par :

$$G_{12} < \frac{E_1 E_2}{E_1 + (1 + 2\nu_{12} E_2)} \quad (1.13)$$

Dans l'article, cette classe de matériau est appelée "low shear stiffness material" avec β_3 négatif. Comme β_3 est négatif, ζ est positif (équation (1.11)), $\left. \frac{\partial^2 u_C}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=0} > 0$ et (1.12) implique :

$$u_C|_{\cos 2\phi = -\zeta} > u_C|_{\phi=90} > u_C|_{\phi=0}$$

Donc, pour un matériau orthotrope élastique linéaire, l'orientation optimale qui correspond au minimum global de l'énergie complémentaire locale à contraintes fixées est $\phi = 0$, ce qui correspond à un alignement de la direction principale des contraintes associée à la contrainte principale maximale en valeur absolue avec la direction d'orthotropie associée à la plus grande rigidité E_1 .

Remarque. Pedersen [58] a prouvé que dans tous les cas de l'étude, et notamment dans le cas défini par (1.13), l'optimum est obtenu pour des directions principales des contraintes et des directions principales de déformation alignées. Dans le cas décrit ci dessus, il y a de

surcroît alignement avec la direction d'orthotropie associée à la plus grande rigidité.

1.4.2 Paramètres d'optimisation de type épaisseurs relatives des plis

Considérons un stratifié composite d'épaisseur totale constante à fibres longues curvilignes par couche. Tous les paramètres d'optimisation utilisés dans la suite sont des paramètres distribués.

Une première approche consisterait par exemple à considérer comme paramètres d'optimisation l'orientation locale des fibres dans chaque couche et les épaisseurs des plis suivant une direction donnée. De nombreuses études ont été menées suivant cette optique mais cela mène à des minimisations par rapport aux paramètres d'optimisation non-convexes.

Une autre approche est d'utiliser un jeu de paramètres d'optimisation qui permet l'étude d'un problème d'optimisation convexe : les paramètres de lamination ("lamination paramètres"). Nous présentons ici les travaux de Hammer et al. qui se déroulent en deux étapes :

1. Hammer et al. [41] : utilisation des paramètres de lamination pour définir un problème d'optimisation convexe qui permet de montrer l'existence de solutions (avec l'utilisation d'une formulation de type minimisation-maximisation (1.8)) et de montrer que, en élasticité plane, la membrane stratifiée optimale constituée d'un matériau orthotrope identique dans chaque couche, dans le cas de l'optimisation par rapport à un chargement unique, est un monocouche ou un bicouche orthogonal.
2. Hammer [40] : Utilisation des paramètres d'optimisation indépendants associés à un bicouche orthogonal d'épaisseur totale constante (c'est-à-dire épaisseur relative locale des couches à 0° et orientation locale du stratifié orthotrope) pour l'écriture explicite de la minimisation locale.

Hammer et al. [41] :

On considère un stratifié constitué de couches élastiques linéaires anisotropes à lois de comportement identiques. Dans cette démarche, la loi de comportement élastique d'un modèle classique de plaque de Kirchhoff Love est écrite sous la forme :

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{pmatrix}$$

où A , B et D sont exprimés en fonction des caractéristiques du comportement anisotrope de chaque pli qui constitue le stratifié et des paramètres de lamination qui sont définis comme des intégrales sur l'épaisseur de la plaque de fonctions trigonométriques de l'angle de rotation de la matrice de rigidité de chaque pli par rapport à un repère global fixé.

Ces paramètres de lamination sont alors généralisés au cas de plaques constituées à chaque altitude z d'une microstructure de stratifié infiniment fin à l'échelle macroscopique mais constituée de plis d'orientations différentes. Dans le cas d'un stratifié d'épaisseur to-

tale constante, aucun terme de coût n'est introduit et le problème se réduit à la minimisation de la compliance. Le problème d'optimisation est formulé par un problème de type minimisation-maximisation (équation (1.8)). De cette formulation, l'existence d'une solution est démontrée.

Dans le cas d'une membrane d'épaisseur constante, sous l'hypothèse des contraintes planes, seuls trois paramètres de lamination sont alors nécessaires. Cependant, la donnée d'un jeu de paramètres correspond à un stratifié non-unique (il est décrit dans [55] une méthode analytique qui permet, étant donné un jeu de paramètres de lamination, de définir un stratifié à trois couches en terme d'épaisseurs de couches et d'orientation).

Néanmoins, il est montré que lors de l'optimisation par rapport à un chargement multiple pour laquelle le critère à minimiser est défini comme la somme pondérée des compliances associées à chaque cas de charge, le stratifié optimal peut être construit à l'aide d'au plus deux plis qui sont orientés d'un angle $+\phi$ et d'un angle $-\phi$ par rapport à une direction tournée par rapport au repère global. De plus, dans le cas de plis constitués d'un matériau orthotrope (supposé identique dans toutes les couches), il est montré que, lors de l'optimisation par rapport à un chargement unique, le stratifié optimal peut être obtenu suivant les cas, par un monocouche ou un bicouche orthogonal, les directions d'orthotropie du stratifié homogénéisé suivant l'épaisseur étant alignées suivant les directions principales des déformations.

Hammer [40] :

Dans ce dernier cas, Hammer a alors considéré le problème d'optimisation de la compliance en utilisant des paramètres d'optimisation qui caractérisent de tels multicouches. Chaque pli est supposé avoir le même comportement élastique linéaire orthotrope (tourné de 90° dans le cas du bicouche). On note E_1 , E_2 , G_{12} et ν_{12} les coefficients du matériau orthotrope utilisé et on suppose sans perte de généralité que $E_1 > E_2$. Le comportement local homogénéisé du bicouche, ainsi que le comportement du monocouche sont donc orthotropes.

En considérant une épaisseur totale unité, deux paramètres uniquement sont à considérer : l'épaisseur relative h des couches orientées à 0° (pour le bicouche, l'épaisseur des couches à 90° est alors $(1 - h)$), et l'orientation locale θ du stratifié orthotrope. Nous supposons, sans perte de généralité, que $h > 1/2$, c'est-à-dire que la direction d'orthotropie de plus grande rigidité du matériau homogénéisé est alignée avec la direction d'orthotropie de plus grande rigidité des couches d'épaisseur h . Dans ce travail, Hammer utilise une formulation du problème d'optimisation du type (1.5) basée sur l'énergie complémentaire sans prise en compte d'un terme de coût et l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 1.2.4.

Avec le jeu de paramètres utilisé, la minimisation locale de l'algorithme d'optimisation est explicite. Considérons tout d'abord la minimisation locale par rapport à l'orientation locale du stratifié. L'orientation optimale est donnée par l'alignement de la direction d'orthotropie de plus grande rigidité (pour le bicouche, suivant la direction de la couche d'épaisseur h) avec la direction principale des contraintes associée à la contrainte principale maximale en valeur absolue (voir section 1.4.1). Cette direction optimale est indépendante des paramètres

matériau $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$ et de l'épaisseur relative h .

L'angle d'orientation local du stratifié étant donné, il reste à résoudre le problème de minimisation par rapport à l'épaisseur relative h . Pour ceci, nous n'utiliserons pas les notations de l'article mais présenterons les résultats en utilisant les paramètres matériau $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$. L'énergie complémentaire locale s'écrit sous la forme :

$$u_C = \frac{\sigma_I}{E_1} C \frac{Mh + P}{h^2 - h + C} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = \frac{E(E\nu^2-1)}{(E-1)^2} \\ E = E_2/E_1 \\ \nu = \nu_{12} \\ s = \sigma_{II}/\sigma_I \\ M = (1-E)(s^2-1) \\ P = Es^2 - 2\nu Es + 1 \end{cases}$$

et l'épaisseur relative optimale est :

$$\begin{aligned} \text{Cas 1 : } h_{opt} &= \frac{(1-E\nu) + sE(1-\nu)}{(E-1)(s-1)} & \text{si } & -1 < s < -\frac{(1-\nu)E}{1-\nu E} \\ \text{Cas 2 : } h_{opt} &= 1 & \text{si } & -\frac{(1-\nu)E}{1-\nu E} < s < +\frac{(1+\nu)E}{1+\nu E} \\ \text{Cas 3 : } h_{opt} &= \frac{-(1+E\nu) + sE(1+\nu)}{(E-1)(s+1)} & \text{si } & +\frac{(1+\nu)E}{1+\nu E} < s < 1 \end{aligned}$$

Ces résultats sont représentés sur la figure 1.2 extraite de l'article.

Cette étude clos le problème de l'optimisation de membranes composites multicouches de comportement identique par couche d'épaisseur totale constante à fibres longues curvilignes dans le cadre des paramètres distribués. Une limitation de l'approche est le fait que le comportement de chaque matériau dans chaque couche est supposé identique. Dans l'optique de palier à cette limitation, la section suivante traite le problème de l'optimisation de membranes composites avec prise en compte de la proportion de fibres comme paramètre d'optimisation.

1.4.3 Paramètres d'optimisation de type proportion de fibres

Considérons maintenant une plaque composite d'épaisseur totale constante à fibres longues curvilignes de proportion variable. Le cas le plus simple est celui d'une structure mince monocouche. Dans ce cas, deux paramètres d'optimisation distribués sont à considérer : l'orientation locale du matériau orthotrope formé par le mélange fibres et matrice et la proportion de fibres. Une telle approche est utilisée par Terrel [62] et par Duvaut et al. [34] pour des membranes composites en élasticité bidimensionnelle sous l'hypothèse des contraintes planes et pour des coques.

Le terme de coût dans ces études est choisi linéaire en fonction de la proportion de

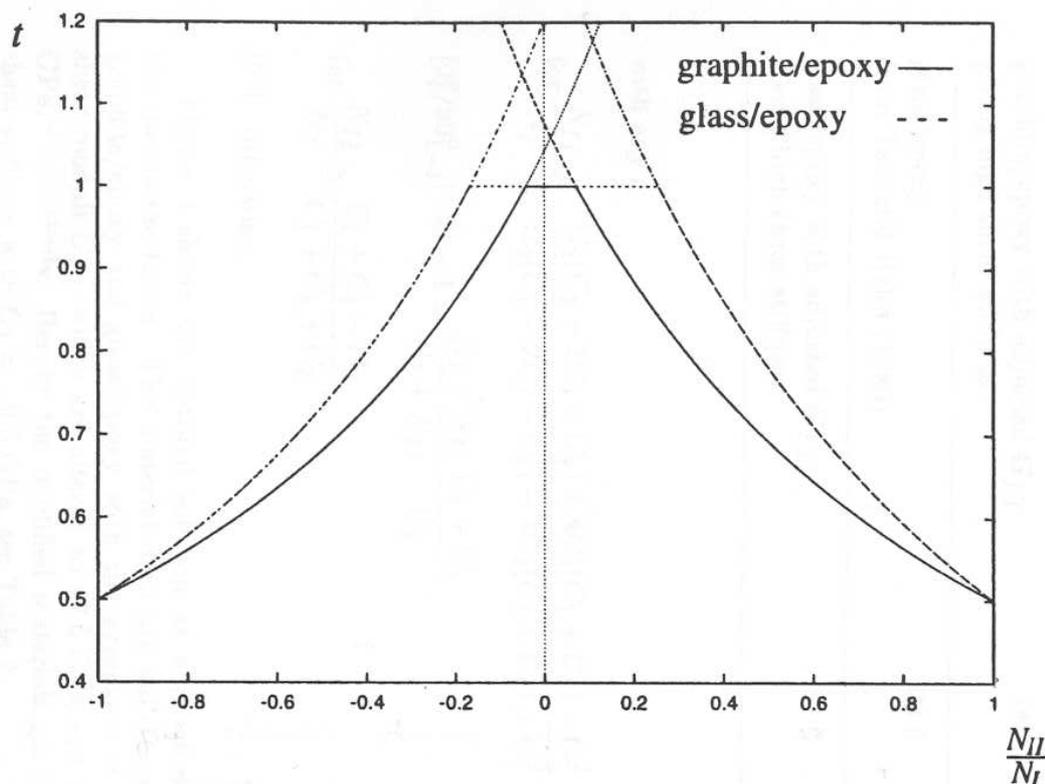


Figure 1.2 — Epaisseur relative optimale (t) en fonction du rapport des contraintes membranaires généralisées (N_I et N_{II}) (Hammer [40])

fibres α :

$$COUT(\alpha) = k \int_S \alpha dS$$

L'algorithme d'optimisation décrit dans la section 1.2.4 est utilisé. La minimisation locale à contraintes fixées peut s'écrire explicitement dans le cas de membranes bidimensionnelles si on utilise comme processus d'homogénéisation la loi des mélanges. En effet, quelque soit la proportion de fibres, le matériau homogénéisé est orthotrope, et s'oriente donc suivant la direction principale des contraintes qui est maximale en valeur absolue (voir section 1.4.1). L'angle optimal étant alors donné, on se ramène à la minimisation par rapport à la proportion de fibres, supposée comprise dans l'intervalle $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$. Cette dernière minimisation est explicite (elle se met sous la forme de la résolution d'un polynôme de degré 2), et un résultat de convergence théorique de l'algorithme d'optimisation existe [62]. D'un point de vue numérique, cette méthode est peu coûteuse car les minimisations locales sont explicites. Un exemple, extrait de [62], d'une telle optimisation est présenté dans la figure 1.3.

Dans le cas de coques composites, la minimisation locale par rapport à la proportion de fibres à orientation fixée reste explicite, mais la minimisation locale par rapport à l'orientation à proportion de fibres fixée ne l'est plus. Une méthode numérique doit être utilisée. Différents exemples numériques, tels des cylindres et des cônes ellipsoïdaux, qui peuvent modéliser par exemple des queues d'hélicoptères sont présentés dans [62].

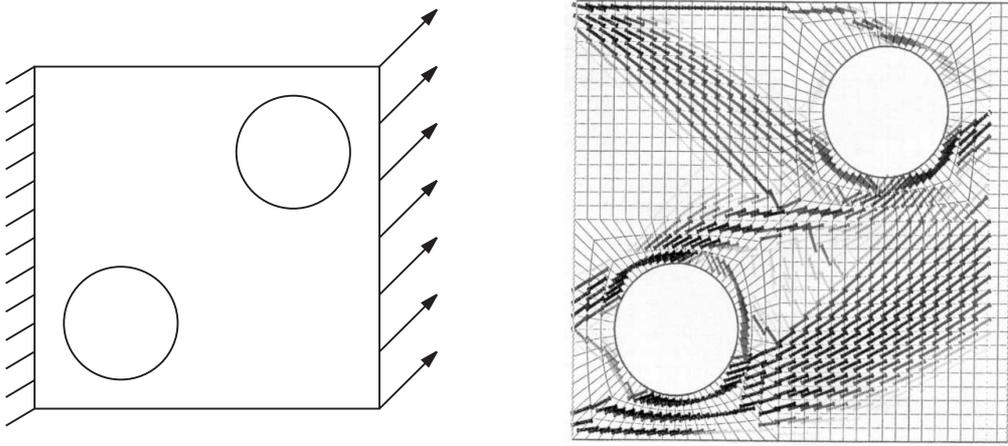


Figure 1.3 — Résultats de l'optimisation d'une membrane composite monocouche à fibres longues curvilignes de proportion variable chargée dans son plan (extrait de Terrel [62])

Dans le cas de membranes composites stratifiées, de multiples jeux de paramètres peuvent être utilisés. On peut par exemple considérer un bicouche orthogonal symétrique à fibres longues curvilignes de proportion variable par couche. Une telle étude a été menée par Thomsen [64] : elle fait appel à une méthode de programmation mathématique pour déterminer les proportions de fibres et les épaisseurs relatives à chaque itération de l'algorithme. Les résultats théoriques de l'étude menée par Hammer et al. [41] ne sont cependant plus applicables car on considère maintenant un matériau différent par couche. On ne sait donc plus si le stratifié optimal est un bicouche orthogonal dans ce cas.

1.5 Optimisation structurale en élasticité non-linéaire

Tous les travaux présentés jusqu'à présent ont pour cadre l'élasticité linéaire. De nombreuses évolutions peuvent être envisagées suivant les types de non-linéarités prises en compte. Dans une première partie on listera les travaux relatifs à l'orientation optimale d'un certain nombre de matériaux élastiques non-linéaires sous l'hypothèse des petites perturbations (petits déplacements et petites déformations). Ensuite on présentera les différentes non-linéarités qui peuvent être prises en compte et les évolutions nécessaires à la formulation du problème d'optimisation qui en découlent.

1.5.1 Orientation optimale de quelques matériaux élastiques non-linéaires

Dans cette section, nous considérons, en suivant le travail de Lellep et Majak [51, 52, 53], dans le cadre de l'élasticité plane, sous l'hypothèse des petites perturbations, une loi de

comportement élastique non-linéaire du type :

$$\sigma = F(\epsilon_e, E_i)[C]\epsilon \quad (1.14)$$

où $[C]$ est une matrice à coefficients adimensionnels et où F est une fonction différentiable donnée qui dépend de la déformation effective ϵ_e définie par $\epsilon_e^2 = \epsilon^T[C]\epsilon$ et de coefficients matériau E_i . Différentes définitions de la fonction F donnent lieu à différentes lois de comportement :

Cas 1 : $F(\epsilon_e, E_i) = E_1$: matériau élastique linéaire

Cas 2 : $F(\epsilon_e, E_i) = \epsilon_e^{p-1} E_1$: loi de comportement de type puissance ("power law non-linear elasticity")

Cas 3 : $F(\epsilon_e, E_i) = \frac{E_1}{\epsilon_e} \ln(E_2 \epsilon_e + 1)$: loi de comportement de type logarithmique

Cas 4 : $F(\epsilon_e, E_i) = \sum_{i=1}^N \epsilon_e^{i-1} E_i$: loi de comportement de type série de puissance

Plaçons nous dans le cas où $E_1[C]$ correspond à une matrice de rigidité définissant une loi de comportement orthotrope élastique linéaire.

Si $F(\epsilon_e, E_i) = E_1$, la loi de comportement est orthotrope élastique linéaire et on se retrouve dans le cas de la section 1.4.1. Si $F(\epsilon_e, E_i)$ est défini suivant une loi de type puissance (cas 2) ou de type logarithmique (cas 3), il est montré dans [52] et [53] que les orientations optimales dans ces deux cas coïncident avec celles obtenues dans le cas de l'élasticité linéaire. Dans le cas d'une série de type puissance (cas 4), il est montré dans [51] que l'ensemble des extremums inclut les extremums du cas élastique linéaire. Cependant d'autres extremums peuvent exister et peuvent correspondre au minimum global ou au maximum global.

Dans le cas des lois de comportement anisotropes élastiques non-linéaires, nous citerons le travail [56], qui pour des lois de comportement de type (1.14), propose une approche basée sur un critère qui aboutit à un comportement anisotrope optimal le plus proche possible d'un comportement orthotrope.

1.5.2 Les différents types de non-linéarités en optimisation

Dans le cadre de la maximisation de la rigidité d'une structure basée sur un critère défini à partir de la compliance, différentes non-linéarités peuvent être introduites et ont fait l'objet de travaux nombreux ces dernières années. Nous citons ici quelques travaux et leurs spécificités au regard des non-linéarités considérées, qui dans de nombreux cas aboutissent à l'utilisation d'algorithmes d'optimisation différents de celui présenté dans la section 1.2.4, considéré comme point de base de cette bibliographie. Les travaux éloignés du champ d'application de l'algorithme d'optimisation considéré ne seront que cités, tandis que ceux qui s'en rapprochent seront brièvement décrits.

Différents types de non-linéarités existent. On peut citer par exemple les non-linéarités géométriques, les lois de comportement élastiques non-linéaires (hyperélastiques) ou

bien non-linéaires (élastoplastiques, viscoélastiques, endommageables), et les chargements dépendant des paramètres d'optimisation.

Les chargements extérieurs dépendant des paramètres d'optimisation ont été traités dans le cadre de l'optimisation topologique par Hammer et Olhoff [42]. Dans ce travail, un algorithme d'optimisation est défini sous l'hypothèse des petites perturbations. Il permet de prendre en compte la position et la direction d'un chargement de pression sur tout ou partie de la frontière extérieure en fonction de la répartition du matériau à l'intérieur du domaine de conception. Cette étude utilise des matériaux à loi de comportement SIMP (voir section 1.3.3). Cette étude ne peut s'effectuer avec l'algorithme décrit dans la section 1.2.4, car dans ce cas, l'écriture du théorème de l'énergie complémentaire ne pourrait plus se faire avec le champ de contraintes de l'itération précédente car il ne serait plus statiquement admissible.

Ensuite, toujours dans l'hypothèse des petites perturbations, la loi de comportement élastique non-linéaire de type puissance définie dans la section précédente a été étudiée par Pedersen et Taylor [60]. Dans le cadre de la minimisation de la compliance sans prise en compte du terme de coût, il est prouvé que :

1. dans le cas de paramètres d'optimisation distribués de type orientation, la condition nécessaire de stationnarité de la compliance totale se réduit à la condition de stationnarité de l'énergie de déformation locale en chaque point du domaine. Les auteurs parlent alors de la mise en place possible d'un algorithme d'optimisation itératif pour trouver une solution satisfaisant la condition locale obtenue, mais ne le décrivent pas.
2. en considérant l'épaisseur de la plaque comme un paramètre d'optimisation distribué, pour une quantité totale de matériau fixée, la répartition optimale de matériau est indépendante de l'exposant de la loi puissance.

Enfin, d'autres études considèrent des problèmes d'optimisation topologiques basés sur la compliance dans le cadre de grands déplacements, de grandes déformations ou bien de lois de comportement hyperélastiques, ou bien de combinaisons de ces trois types de non-linéarités. A titre d'exemple, nous pouvons citer les travaux [18] (grands déplacements, petites déformations, élasticité linéaire), et [17] (grands déplacements, petites déformations, hyperélasticité). Mais dans ces exemples, les algorithmes d'optimisation utilisés ne sont plus de la famille de celui décrit dans la section 1.2.4, et ne seront pas présentés ici.

1.6 Conclusion

La littérature associée à l'optimisation de structures minces composites multicouches à fibres longues est limitée au vue des applications industrielles qu'elle permet de traiter. Sauf dans le cas de l'optimisation d'un cône composite qui peut être utilisé pour modéliser des structures industrielles comme par exemple les queues d'hélicoptères, les résultats pourtant riches par rapport aux types de paramètres d'optimisation utilisables ne sont pas d'un grand secours pour l'optimisation de structures industrielles complexes.

Lorsque des lois de comportement non-linéaires sont considérées, les méthodes mises

en œuvre pour résoudre le problème d'optimisation défini à l'aide d'un critère basé sur la compliance font alors appel à des algorithmes élaborés différents de celui présenté dans le cas de l'élasticité linéaire sous l'hypothèse des petits déplacements et petites déformations dans la section 1.2.4.

Ces deux constats sont le fondement des deux axes de développement suivis au cours du travail présenté dans cette thèse :

- utilisation de l'algorithme présenté dans la section 1.2.4 pour optimiser des structures composites à caractère industriel de type assemblages de plaques composites,
- extension du domaine d'application de l'algorithme présenté dans la section 1.2.4 à des lois de comportement élastiques non-linéaires, notamment à des lois de comportement dissymétriques en traction-compression qui permettent la prise en compte de l'effet du micro-flambage en compression des fibres longues curvilignes au sein de matériaux composites utilisés dans des structures minces stratifiées.

Chapitre 2

Modélisation du renfort d'un milieu tridimensionnel

Un objectif de la thèse est de traiter l'optimisation de structures composites industrielles de type assemblage de plaques composites. Pour ce faire, il nous faut définir un modèle de ce type de structures notamment compatible avec l'algorithme d'optimisation à paramètres distribués (ou une évolution de celui-ci) défini dans le chapitre 1.

Dans ce chapitre, un modèle original du renforcement d'un milieu tridimensionnel élastique linéaire par une plaque de Kirchhoff Love interne ou externe à ce milieu est développé. En considérant que le milieu tridimensionnel n'est en fait qu'un matériau de remplissage qui, à la limite, ne possède pas de rigidité significative, un assemblage de plaques composites peut alors être modélisé par un milieu tridimensionnel de faible rigidité renforcé par des plaques de Kirchhoff Love beaucoup plus rigides.

Dans le cas d'un milieu tridimensionnel avec un renfort interne et un renfort externe, une mise en équation originale est effectuée. Le système d'équations obtenu peut alors se mettre sous forme variationnelle. Les formulations variationnelles en déplacements et en contraintes ainsi que les théorèmes de l'énergie associés sont démontrés, ce qui permet de prouver l'existence et l'unicité d'une solution au problème élastique. Enfin, une mise en œuvre numérique dans le cas d'un modèle de renfort de type membrane avec effort normal est présentée et un exemple académique de renforcement interne d'un milieu tridimensionnel traité.

Sommaire

2.1	Description du problème	35
2.2	Equations locales relatives au milieu tridimensionnel	35
2.3	Equations locales relatives aux renforts modélisés par des plaques de Kirchhoff Love	36
2.3.1	Equations d'équilibre et conditions aux limites naturelles d'une plaque de Reissner Mindlin	36
2.3.2	Expression du chargement extérieur des renforts	37
2.3.3	Loi de comportement et conditions aux limites en déplacements	39
2.3.4	Equations relatives aux renforts interne et externe modélisés par des plaques de Kirchhoff Love	40
2.4	Formulations variationnelles	40
2.4.1	Formulation variationnelle en déplacements	41
2.4.2	Formulation variationnelle en contraintes	44
2.4.3	Théorème de la double inégalité	47
2.4.4	Egalité entre le travail des efforts extérieurs, le double de l'énergie de déformation et le double de l'énergie complémentaire	48
2.4.5	Existence et unicité de la solution du problème élastique	48
2.5	Mise en œuvre numérique	48
2.5.1	Modèle de renfort membranaire	48
2.5.2	Programmation	51
2.5.3	Exemple d'un milieu tridimensionnel avec un renfort interne	52
2.6	Conclusion	52

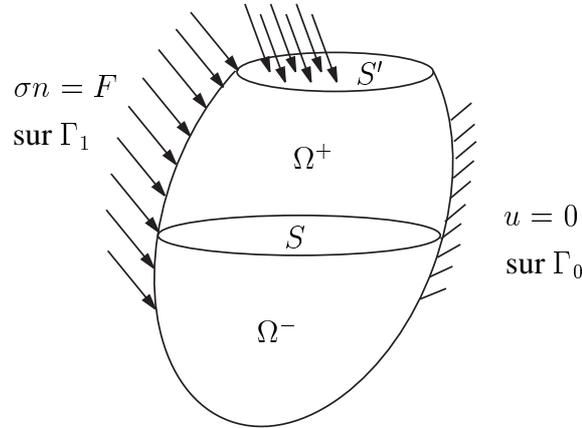


Figure 2.1 — Description d'un milieu tridimensionnel renforcé par un renfort interne et un renfort externe

2.1 Description du problème

On considère un milieu tridimensionnel Ω . Sa frontière est divisée en deux surfaces Γ_0 et Γ_1 . Sur Γ_0 est imposé un déplacement nul, sur Γ_1 un chargement surfacique \mathbf{F} . Un chargement volumique \mathbf{f} est imposé dans Ω .

Dans le cas de l'introduction d'un renfort interne, une surface plane S coupe Ω en deux milieux Ω^+ et Ω^- . Dans le cas d'un renfort externe, une surface plane S' est placée sur la surface extérieure de Ω . Le chargement \mathbf{F} s'applique alors sur la partie supérieure de S' (voir figure 2.1).

Dans la suite on considérera un milieu tridimensionnel avec un renfort interne et un renfort externe placé sur Ω^+ . On suppose, sans perte de généralité, que les renforts sont inclus dans des plans parallèles au plan (\vec{x}, \vec{y}) . Le vecteur \vec{z} est donc une normale extérieure à Ω^+ sur toute la frontière définie par S' et est un vecteur normal à S et S' .

2.2 Equations locales relatives au milieu tridimensionnel

Les équations d'équilibre dans Ω^+ et Ω^- s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & \text{dans } \Omega^- \end{cases} \quad (2.1)$$

Les conditions aux limites en déplacements sont :

$$u_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (2.2)$$

Les conditions aux limites en efforts s'écrivent sur la frontière sans présence du renfort S' :

$$\sigma_{ij} n_j = F_i \quad \text{sur } \Gamma_1 \setminus S' \quad (2.3)$$

On considère que les milieux Ω^+ et Ω^- sont élastiques linéaires :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \epsilon_{kl}(u) \Leftrightarrow \epsilon_{ij}(u) = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.4)$$

2.3 Equations locales relatives aux renforts modélisés par des plaques de Kirchhoff Love

L'objectif de cette section est d'écrire les équations relatives aux renforts interne et externe dans le cadre d'un modèle de plaque de Kirchhoff Love. La difficulté majeure réside dans l'expression du chargement extérieur appliqué aux plaques de renfort. Pour le définir, on rappelle tout d'abord les équations de plaque de Reissner Mindlin avec l'expression du chargement de type plaque en fonction du chargement tridimensionnel appliqué à la structure tridimensionnelle modélisée par une plaque (section 2.3.1). Puis on exprime les chargements de type plaque appliqués au renfort interne et au renfort externe en fonction de l'état de contraintes au sein des milieux Ω^+ et Ω^- et du chargement extérieur appliqué à Ω (section 2.3.2). On effectue alors l'hypothèse cinématique de Kirchhoff Love pour définir les lois de comportement des renforts et les conditions aux limites qui leur sont appliquées (section 2.3.3). En définitive, les équations, à caractère bidimensionnel, relatives aux renforts interne et externe modélisés par des plaques de Kirchhoff Love sont résumées dans la section 2.3.4.

2.3.1 Equations d'équilibre et conditions aux limites naturelles d'une plaque de Reissner Mindlin

Considérons le milieu tridimensionnel Ω_S de faible épaisseur h représenté sur la figure 2.2. Ses faces supérieures et inférieures S^+ et S^- sont planes et parallèles. Sa surface moyenne sera notée S . On suppose que le milieu Ω_S est chargé par une densité surfacique d'effort F^{3D} sur sa frontière extérieure (notée F^{3D+} sur S^+ , F^{3D-} sur S^- et F^{3D} sur la frontière latérale de Ω_S) et par une densité volumique d'effort f^{3D} . L'application du principe des puissances virtuelles avec le choix d'un champ de déplacements virtuels de type Reissner Mindlin de la forme :

$$\begin{cases} u_\alpha^{3D}(x, y, z) = u_\alpha(x, y) + z l_\alpha(x, y) \\ u_3^{3D}(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (\text{avec } \alpha = 1, 2)$$

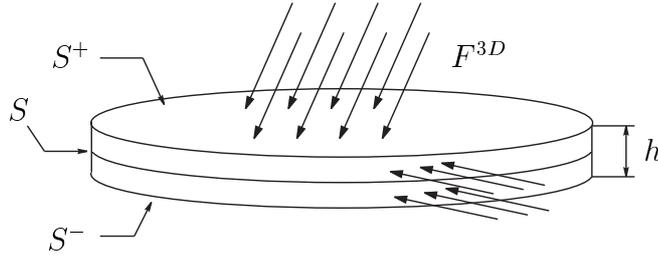


Figure 2.2 — Description du milieu tridimensionnel utilisé pour la définition du milieu plaque

conduit aux équations d'équilibres et aux conditions aux limites en efforts suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{\alpha\beta,\beta} + F_{\alpha}^S = 0 \\ Q_{\alpha,\alpha} + f = 0 \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} + m_{\alpha} = 0 \end{array} \right. \quad \text{dans } S, \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{\alpha\beta}\nu_{\beta} = F_{\alpha}^B \\ Q_{\alpha}\nu_{\alpha} = T \\ M_{\alpha\beta}\nu_{\beta} = \mu_{\alpha} \end{array} \right. \quad \text{sur } \partial S \quad (2.5)$$

où ν est une normale extérieure à S , $e_{\alpha\beta}(v) = \frac{1}{2}(v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha})$, et

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha\beta} dz \\ M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \sigma_{\alpha\beta} dz \\ Q_{\alpha} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{\alpha 3} dz \\ f = F_3^{3D+} + F_3^{3D-} + \int_{-h/2}^{+h/2} f_3^{3D} dz \\ m_{\alpha} = \frac{h}{2} (F_{\alpha}^{3D+} - F_{\alpha}^{3D-}) + \int_{-h/2}^{+h/2} f_{\alpha}^{3D} dz \\ F_{\alpha}^S = F_{\alpha}^{3D+} + F_{\alpha}^{3D-} + \int_{-h/2}^{+h/2} f_{\alpha}^{3D} dz \\ T = \int_{-h/2}^{+h/2} F_3^{3D} dz \\ F_{\alpha}^B = \int_{-h/2}^{+h/2} F_{\alpha}^{3D} dz \\ \mu_{\alpha} = \int_{-h/2}^{+h/2} z F_{\alpha}^{3D} dz \end{array} \right.$$

2.3.2 Expression du chargement extérieur des renforts

Hypothèse sur le poids des renforts : On néglige le poids des renforts, ce qui implique

$$\int_{-h/2}^{+h/2} f_{\alpha}^{3D} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} f_3^{3D} dz = 0, \quad \int_{-h/2}^{+h/2} z f_{\alpha}^{3D} dz = 0 \quad (2.6)$$

Expressions de f , m_{α} et F_{α}^S pour le renfort interne : Le chargement F_3^{3D-} appliqué sur la face inférieure du renfort interne est supposé égal au vecteur contrainte appliqué par le milieu tridimensionnel en contact. On note σ^- le champ de contraintes au sein du milieu tridimensionnel Ω^- au niveau de la face inférieure du renfort. Le vecteur \vec{z} est normal extérieur

à Ω^- . Le chargement appliqué par le milieu Ω^- sur la face inférieure est donc :

$$F_i^{3D-} = -(\sigma_{ij}^- n_j) = -\sigma_{i3}^-$$

Le chargement surfacique F_i^{3D+} appliqué sur la face supérieure est supposé égal au vecteur contrainte appliqué par le milieu tridimensionnel en contact. On note σ^+ le champ de contraintes au sein du milieu tridimensionnel Ω^+ au niveau de la face supérieure du renfort. Le vecteur $-\vec{z}$ est normal extérieur à Ω^+ . Le chargement appliqué par le milieu Ω^+ sur la face supérieure est donc :

$$F_i^{3D+} = -(\sigma_{ij}^+ n_j) = +\sigma_{i3}^+$$

Compte tenu de l'hypothèse (2.6), on obtient alors pour le renfort interne :

$$F_\alpha^S = \sigma_{\alpha 3}^+ - \sigma_{\alpha 3}^- \quad f = \sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^- \quad m_\alpha = \frac{h}{2} (\sigma_{\alpha 3}^+ + \sigma_{\alpha 3}^-) \quad (2.7)$$

Expressions de f , m_α et F_α^S pour le renfort externe : Comme décrit dans la section 2.1, on suppose que le renfort externe est inclus dans Γ_1 . Pour le renfort externe, le chargement surfacique appliqué sur la face supérieure du renfort est donc le chargement surfacique \mathbf{F} , ce qui implique :

$$F_i^{3D+} = F_i$$

Le chargement F_i^{3D-} appliqué sur la face inférieure du renfort externe est supposé égal au vecteur contrainte appliqué par le milieu tridimensionnel en contact. On note σ^- le champ de contraintes au sein du milieu tridimensionnel Ω^+ au niveau de la face inférieure du renfort. Le vecteur \vec{z} est normal extérieur à Ω^+ . Le chargement appliqué par le milieu Ω^+ sur la face inférieure est donc :

$$F_i^{3D-} = -(\sigma_{ij}^- n_j) = -\sigma_{i3}^-$$

On obtient alors pour le renfort externe, compte tenu de l'hypothèse (2.6) :

$$F_\alpha^S = F_\alpha - \sigma_{\alpha 3}^- \quad f = F_3 - \sigma_{33}^- \quad m_\alpha = \frac{h}{2} (F_\alpha + \sigma_{\alpha 3}^-) \quad (2.8)$$

Hypothèse sur le chargement surfacique de moment m_α : Pour la résolution du système d'équations global (milieu tridimensionnel et renforts), les contraintes tridimensionnelles σ^+ et σ^- , les efforts généralisés $N_{\alpha\beta}$, Q_α et $M_{\alpha\beta,\beta}$ des milieux plaques et le chargement extérieur \mathbf{F} seront supposés être du même ordre de grandeur en h , h étant un petit paramètre.

Compte tenu des expressions de m déterminées dans (2.7) et (2.8), la troisième équation d'équilibre de (2.5) s'écrit :

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + \frac{h}{2} (\sigma_{\alpha 3}^+ + \sigma_{\alpha 3}^-) &= 0 \quad \text{pour le renfort interne} \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + \frac{h}{2} (F_\alpha + \sigma_{\alpha 3}^-) &= 0 \quad \text{pour le renfort externe} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Q_α , $M_{\alpha\beta,\beta}$, $\sigma_{\alpha 3}^+$, $\sigma_{\alpha 3}^-$ et F_α étant supposés être du même ordre en h , on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} (\sigma_{\alpha 3}^+ + \sigma_{\alpha 3}^-) &\ll Q_\alpha & \frac{h}{2} (F_\alpha + \sigma_{\alpha 3}^-) &\ll Q_\alpha \\ \frac{h}{2} (\sigma_{\alpha 3}^+ + \sigma_{\alpha 3}^-) &\ll M_{\alpha\beta,\beta} & \frac{h}{2} (F_\alpha + \sigma_{\alpha 3}^-) &\ll M_{\alpha\beta,\beta} \end{aligned}$$

L'équation d'équilibre (2.9) peut donc être simplifiée sous la forme suivante, identique pour le renfort interne et le renfort externe :

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (2.10)$$

Expression du chargement extérieur sur le pourtour de la plaque $(T, F_\alpha^B, \mu_\alpha)$: Compte tenu de la faible épaisseur des renforts, on néglige les effets du chargement sur le bord latéral de Ω_S devant les effets du chargement surfacique appliqué sur S^+ et S^- , ce qui s'écrit :

$$T = 0 \quad F_\alpha^B = 0 \quad \mu_\alpha = 0$$

En considérant (2.10), les conditions aux limites de (2.5) s'écrivent pour le renfort interne et pour le renfort externe :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta} \nu_\beta = 0 \\ M_{\alpha\beta,\beta} \nu_\alpha = 0 \\ M_{\alpha\beta} \nu_\beta = 0 \end{cases}$$

2.3.3 Loi de comportement et conditions aux limites en déplacements

On effectue l'hypothèse cinématique supplémentaire $l_\alpha = -\partial w / \partial x_\alpha$. Le modèle de plaque utilisé pour les renforts est donc un modèle de Kirchhoff Love.

Loi de comportement La loi de comportement des plaques renforts est supposée élastique linéaire, et s'écrit dans le cadre d'un modèle de plaque de Kirchhoff Love pour le renfort interne et pour le renfort externe sous la forme :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}(u) \\ M_{\alpha\beta} = -d_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{,\gamma\delta} \end{cases}$$

où b et d sont symétriques définis positifs.

Conditions aux limites en déplacements Comme décrit en section 2.1, on suppose que le renfort externe est inclus dans Γ_1 . Donc, aussi bien pour le renfort interne que pour le renfort externe, les conditions aux limites en déplacements d'encastrement appliquées au milieu Ω , si elles sont actives, ne s'appliquent que sur le pourtour de la plaque. Ces conditions d'encastrement s'écrivent dans le cadre d'un modèle de plaque de Kirchhoff Love, pour le

renfort interne et le renfort externe sous la forme :

$$\begin{cases} u_\alpha = 0 \\ w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_0 \cap \partial S$$

2.3.4 Equations relatives aux renforts interne et externe modélisés par des plaques de Kirchhoff Love

On identifie les déplacements de la surface moyenne des plaques de renfort aux déplacements du (ou des) milieu(x) tridimensionnel(s) environnant(s). On notera les grandeurs relatives au renfort externe par des notations prime (X'). On résume ici les équations à caractère bidimensionnel relatives aux renforts internes et externes modélisés par des plaques de Kirchhoff Love.

Les équations relatives au renfort interne s'écrivent :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta,\beta} + (\sigma_{\alpha 3}^+ - \sigma_{\alpha 3}^-) = 0 \\ M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + (\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-) = 0 \end{cases} \quad \text{dans } S, \quad \begin{cases} N_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}(u) \\ M_{\alpha\beta} = -d_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta} \end{cases} \quad \text{dans } S$$

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 \\ M_{\alpha\beta,\beta}\nu_\alpha = 0 \\ M_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial S \cap \Gamma_1, \quad \begin{cases} u_\alpha = u_3 = 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial S \cap \Gamma_0$$

(2.11)

Les équations relatives au renfort externe sont :

$$\begin{cases} N'_{\alpha\beta,\beta} + (F_\alpha - \sigma_{\alpha 3}^-) = 0 \\ M'_{\alpha\beta,\alpha\beta} + (F_3 - \sigma_{33}^-) = 0 \end{cases} \quad \text{dans } S', \quad \begin{cases} N'_{\alpha\beta} = b'_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}(u) \\ M'_{\alpha\beta} = -d'_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta} \end{cases} \quad \text{dans } S'$$

$$\begin{cases} N'_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 \\ M'_{\alpha\beta,\beta}\nu_\alpha = 0 \\ M'_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial S' \cap \Gamma_1, \quad \begin{cases} u_\alpha = u_3 = 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial S' \cap \Gamma_0$$

(2.12)

2.4 Formulations variationnelles

Le système d'équation (P) à résoudre est constitué des équations (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.11) et (2.12). Le bloc d'équation (2.1)-(2.4) relatif au milieu tridimensionnel Ω est lié aux blocs (2.11) et (2.12) relatifs aux renforts par le champ de déplacements mais aussi par les valeurs des contraintes au sein des milieux Ω^+ et Ω^- sur leurs frontières où se situent les renforts.

L'objectif de cette section est l'écriture du problème (P) sous forme variationnelle.

2.4.1 Formulation variationnelle en déplacements

Introduisons l'espace vectoriel V des champs de déplacements admissibles :

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} | \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) ; v_i \in H^1(\Omega) \\ v_\alpha|_S \in H^1(S) ; v_3|_S \in H^2(S) ; v_\alpha|_{S'} \in H^1(S') ; v_3|_{S'} \in H^2(S') \\ \mathbf{v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 ; \frac{\partial v_3}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial S \cap \Gamma_0 \text{ et } \partial S' \cap \Gamma_0 \end{array} \right\}$$

Théorème 1. Si \mathbf{u} est solution du problème (P) alors

$$\mathbf{u} \in V, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.13)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{kl}(\mathbf{v}) dV + \int_S b_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\gamma\delta}(\mathbf{v}) dS + \int_S d_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} dS \\ \quad + \int_{S'} b'_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\gamma\delta}(\mathbf{v}) dS + \int_{S'} d'_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} dS \\ L(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV \end{array} \right.$$

Démonstration.

Résultat préliminaire 1 :

Intégrons par parties la grandeur suivante :

$$\int_S \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} v_\alpha dS = \int_{\partial S} N_{\alpha\beta} \nu_\beta v_\alpha ds - \int_S N_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dS$$

Sur $\partial S \cap \Gamma_0$, $v_\alpha = 0$ et sur $\partial S \cap \Gamma_1$, $N_{\alpha\beta} \nu_\beta = 0$, donc

$$\int_S \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} v_\alpha dS = - \int_S N_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} dS = - \int_S N_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) dS \quad (2.14)$$

De même, comme $v_\alpha = 0$ sur $\partial S' \cap \Gamma_0$, et $N_{\alpha\beta} \nu_\beta = 0$ sur $\partial S \cap \Gamma_1$, une intégration par parties implique :

$$\int_{S'} \frac{\partial N'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} v_\alpha dS = - \int_{S'} N'_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) dS \quad (2.15)$$

Résultat préliminaire 2 :

Intégrons par parties la grandeur suivante :

$$\int_S \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} v_3 dS = \int_{\partial S} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \nu_\alpha v_3 ds - \int_S \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} dS \quad (2.16)$$

Sur $\partial S \cap \Gamma_0$, $v_\alpha = 0$ et sur $\partial S \cap \Gamma_1$, $M_{\alpha\beta}\nu_\alpha = 0$, donc

$$\int_{\partial S} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \nu_\alpha v_3 ds = 0 \quad (2.17)$$

On intègre par parties :

$$-\int_S \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} dS = -\int_{\partial S} M_{\alpha\beta} \nu_\beta \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} ds + \int_S M_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dS \quad (2.18)$$

En considérant $v_{3,\alpha} = \frac{\partial v_3}{\partial \nu} \nu_\alpha + \frac{\partial v_3}{\partial s} t_\alpha$, où ν et t sont les vecteurs respectivement normaux et tangents à ∂S , et s l'abscisse curviligne définie sur ∂S , on a :

$$\int_{\partial S} M_{\alpha\beta} \nu_\beta \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} ds = \int_{\partial S} M_{\alpha\beta} \nu_\beta \frac{\partial v_3}{\partial \nu} \nu_\alpha ds + \int_{\partial S} M_{\alpha\beta} \nu_\beta \frac{\partial v_3}{\partial s} t_\alpha ds$$

Nous avons les conditions aux limites suivantes :

- sur $\partial S \cap \Gamma_1$, $M_{\alpha\beta} \nu_\beta = 0$
- Sur $\partial S \cap \Gamma_0$: $\partial v_3 / \partial \nu = 0$
- $v_3 = 0$ sur $\partial S \cap \Gamma_0 \Rightarrow \partial v_3 / \partial s = 0$ sur $\partial S \cap \Gamma_0$

donc

$$\int_{\partial S} M_{\alpha\beta} \nu_\beta \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} ds = 0$$

et (2.18) devient :

$$-\int_S \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \frac{\partial v_3}{\partial x_\alpha} dS = \int_S M_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dS \quad (2.19)$$

Compte tenu de (2.17) et (2.19), l'équation (2.16) devient :

$$\int_S \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} v_3 dS = \int_S M_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dS \quad (2.20)$$

D'une manière analogue, en utilisant les conditions aux limites associées au renfort externe, on prouve que :

$$\int_{S'} \frac{\partial^2 M'_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} v_3 dS = \int_{S'} M'_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dS \quad (2.21)$$

Démonstration principale :

Si \mathbf{u} est le champ de déplacements solution, on a $\mathbf{u} \in V$. Soit alors un élément quelconque $\mathbf{v} \in V$, multiplions (2.1) par v_i , et intégrons sur Ω^+ :

$$\int_{\Omega^+} -\sigma_{ij,j} v_i dV = \int_{\Omega^+} f_i v_i dV \quad (2.22)$$

On intègre par parties :

$$\int_{\Omega^+} -\sigma_{ij,j} v_i dV = \int_{\partial\Omega^+} -\sigma_{ij} n_j v_i dS + \int_{\Omega^+} \sigma_{ij} v_{i,j} dV$$

Dans notre configuration, $\partial\Omega^+ = (\partial\Omega^+ \cap \Gamma_0) \cup (\partial\Omega^+ \cap (\Gamma_1 \setminus S')) \cup (S) \cup (S')$:

- sur $\partial\Omega^+ \cap \Gamma_0$: $v_i = 0$
- sur $\partial\Omega^+ \cap (\Gamma_1 \setminus S')$: $\sigma_{ij} n_j = F_i$
- sur S : Le vecteur normal extérieur à Ω^+ est $-\vec{z}$, et $\sigma = \sigma^+$
- sur S' : Le vecteur normal extérieur à Ω^+ est $+\vec{z}$, et $\sigma = \sigma^-$

(Nous rappelons ici que σ^+ et σ^- sont sur S respectivement les contraintes au sein des milieux Ω^+ et Ω^- sur leur frontière commune S et que σ^- est sur S' la contrainte au sein du milieu Ω^+ sur sa frontière S' , les signes $+$ et $-$ étant utilisés pour indiquer les faces supérieure et inférieure de chaque renfort, voir section 2.3.2)

Donc

$$\int_{\partial\Omega^+} \sigma_{ij} n_j v_i dS = \int_{\partial\Omega^+ \cap (\Gamma_1 \setminus S')} F_i v_i dS + \int_S -\sigma_{i3}^+ v_i dS + \int_{S'} \sigma_{i3}^- v_i dS$$

Compte tenu que

$$\int_{\Omega^+} \sigma_{ij} v_{i,j} dV = \int_{\Omega^+} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) dV$$

l'équation (2.22) s'écrit :

$$\int_{\Omega^+} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) dV = \int_{\partial\Omega^+ \cap (\Gamma_1 \setminus S')} F_i v_i dS + \int_{\Omega^+} f_i v_i dV + \int_S -\sigma_{i3}^+ v_i dS + \int_{S'} \sigma_{i3}^- v_i dS \quad (2.23)$$

Maintenant, multiplions (2.1) par v_i , et intégrons sur Ω^- :

$$\int_{\Omega^+} -\sigma_{ij,j} v_i dV = \int_{\Omega^+} f_i v_i dV$$

Dans notre configuration, $\partial\Omega^- = (\partial\Omega^- \cap \Gamma_0) \cup (\partial\Omega^- \cap \Gamma_1) \cup (S)$:

- sur $\partial\Omega^- \cap \Gamma_0$: $v_i = 0$
- sur $\partial\Omega^- \cap \Gamma_1$: $\sigma_{ij} n_j = F_i$
- sur S : Le vecteur normal extérieur à Ω^- est $+\vec{z}$, et $\sigma = \sigma^-$

Une intégration par parties similaire à celle effectuée pour Ω^+ conduit à :

$$\int_{\Omega^-} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) dV = \int_{\partial\Omega^- \cap \Gamma_1} F_i v_i dS + \int_{\Omega^-} f_i v_i dV + \int_S \sigma_{i3}^- v_i dS \quad (2.24)$$

On ajoute membre à membre les équations (2.23) et (2.24) pour obtenir :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) dV = \int_S (\sigma_{i3}^- - \sigma_{i3}^+) v_i dS + \int_{S'} \sigma_{i3}^- v_i dS + \int_{\Gamma_1 \setminus S'} F_i v_i dS + \int_{\Omega} f_i v_i dV \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

On élimine $\sigma_{i3}^- - \sigma_{i3}^+$ dans l'intégrale sur S en utilisant les équations d'équilibre de (2.11) et

σ_{i3}^- dans l'intégrale sur S' en utilisant les équations d'équilibre de (2.12). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) dV - \int_S \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} v_{\alpha} dS - \int_S \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} v_3 dS \\ - \int_{S'} \frac{\partial N'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} v_{\alpha} dS - \int_{S'} \frac{\partial^2 M'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} v_3 dS = \int_{\Gamma_1} F_i v_i dS + \int_{\Omega} f_i v_i dV \\ \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned}$$

Compte tenu de (2.14), (2.15), (2.20) et (2.21), l'équation précédente se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) dV + \int_S N_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) dS - \int_S M_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} dS \\ + \int_{S'} N'_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) dS - \int_{S'} M'_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} dS = \int_{\Gamma_1} F_i v_i dS + \int_{\Omega} f_i v_i dV \\ \forall \mathbf{v} \in V \end{aligned}$$

On utilise alors les lois de comportement (2.4) du milieu Ω et celles du renfort interne (2.11) et externe (2.12) pour obtenir (2.13). □

2.4.2 Formulation variationnelle en contraintes

Introduisons l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles :

$$\Sigma_{ad} = \left\{ \begin{array}{l} (\tau_{ij}, N_{\alpha\beta}^*, M_{\alpha\beta}^*, N'_{\alpha\beta}, M'_{\alpha\beta}), (i, j = 1, 2, 3), (\alpha, \beta = 1, 2), \\ \tau_{ij} = \tau_{ji}, N_{\alpha\beta}^* = N_{\beta\alpha}^*, M_{\alpha\beta}^* = M_{\beta\alpha}^*, N'_{\alpha\beta} = N'_{\beta\alpha}, M'_{\alpha\beta} = M'_{\beta\alpha}, \\ \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega^+ \text{ et } \Omega^-, \tau_{ij} n_j = F_i \text{ sur } \Gamma_1 \setminus S' \\ \frac{\partial N_{\alpha\beta}^*}{\partial x_{\beta}} + \tau_{\alpha 3}^+ - \tau_{\alpha 3}^- = 0 \text{ dans } S, N_{\alpha\beta}^* \nu_{\beta} = 0 \text{ sur } \partial S \cap \Gamma_1 \\ \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}^*}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \tau_{33}^+ - \tau_{33}^- = 0 \text{ dans } S, M_{\alpha\beta}^* \nu_{\beta} = 0, \frac{\partial M_{\alpha\beta}^*}{\partial x_{\beta}} \nu_{\alpha} = 0 \text{ sur } \partial S \cap \Gamma_1, \\ \frac{\partial N'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + F_{\alpha} - \tau_{\alpha 3}^- = 0 \text{ dans } S', N'_{\alpha\beta} \nu_{\beta} = 0 \text{ sur } \partial S' \cap \Gamma_1 \\ \frac{\partial^2 M'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + F_3 - \tau_{33}^- = 0 \text{ dans } S', M'_{\alpha\beta} \nu_{\beta} = 0, \frac{\partial M'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} \nu_{\alpha} = 0 \text{ sur } \partial S' \cap \Gamma_1 \end{array} \right.$$

Théorème 2. Si (σ, N, M, N', M') est un champ de contraintes solution de (P) alors :

$$\begin{aligned} & (\sigma, N, M, N', M') \in \Sigma_{ad} \\ & A(\sigma, \tau - \sigma) + B_T(N, N^* - N) + B_N(M, M^* - M) \\ & \quad + B'_T(N', N'^* - N') + B'_N(M', M'^* - M') = 0 \quad (2.25) \\ & \quad \forall (\tau, N^*, M^*, N'^*, M'^*) \in \Sigma_{ad} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{cases} A(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij} \tau_{kl} dV \\ B_T(N, N^*) = \int_S B_{\alpha\beta\gamma\delta} N_{\alpha\beta} N^*_{\gamma\delta} dS, & B_N(M, M^*) = \int_S D_{\alpha\beta\gamma\delta} M_{\alpha\beta} M^*_{\gamma\delta} dS \\ B'_T(N', N'^*) = \int_{S'} B'_{\alpha\beta\gamma\delta} N'_{\alpha\beta} N'^*_{\gamma\delta} dS, & B'_N(M', M'^*) = \int_{S'} D'_{\alpha\beta\gamma\delta} M'_{\alpha\beta} M'^*_{\gamma\delta} dS \end{cases}$$

où A, B, D, B' et D' sont les tenseurs inverses de a, b, d, b' et d' respectivement.

Démonstration. Si \mathbf{u} et σ sont solutions du problème, on écrit (2.4) sous la forme :

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.26)$$

On multiplie cette équation par $\tau_{ij} - \sigma_{ij}$, et on intègre sur Ω^+ :

$$\int_{\Omega^+} (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) dV = \int_{\Omega^+} A_{ijkl} \sigma_{kl} (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) dV \quad (2.27)$$

Intégrons par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) dV &= \int_{\Omega^+} (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) u_{i,j} dV \\ &= \int_{\partial\Omega^+} (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) n_j u_i dS - \int_{\Omega^+} (\tau_{ij,j} - \sigma_{ij,j}) u_i dV \end{aligned}$$

Dans Ω^+ , $\tau_{ij,j} + f_i = 0$ et $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$, donc $\tau_{ij,j} - \sigma_{ij,j} = 0$.

Dans notre configuration, $\partial\Omega^+ = (\partial\Omega^+ \cap \Gamma_0) \cup (\partial\Omega^+ \cap (\Gamma_1 \setminus S')) \cup (S) \cup (S')$:

- sur $\partial\Omega^+ \cap \Gamma_0$: $v_i = 0$
- sur $\partial\Omega^+ \cap (\Gamma_1 \setminus S')$: $\tau_{ij} n_j = F_i$ et $\sigma_{ij} n_j = F_i$, donc $(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) n_j = 0$
- sur S : Le vecteur normal extérieur à Ω^+ est $-\vec{z}$, $\sigma = \sigma^+$ et $\tau = \tau^+$
- sur S' : Le vecteur normal extérieur à Ω^+ est $+\vec{z}$, $\sigma = \sigma^-$ et $\tau = \tau^-$

(Nous rappelons ici que σ^+ et σ^- (ou τ^+ et τ^-) sont sur S respectivement les contraintes au sein des milieux Ω^+ et Ω^- sur leur frontière commune S et que σ^- (ou τ^-) est sur S' la contrainte au sein du milieu Ω^+ sur sa frontière S' , les signes $+$ et $-$ étant utilisés pour indiquer les faces supérieure et inférieure de chaque renfort, voir section 2.3.2)

Donc

$$\int_{\Omega^+} (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) dV = \int_{S'} (\tau_{i3}^- - \sigma_{i3}^-) u_i dS - \int_S (\tau_{i3}^+ - \sigma_{i3}^+) u_i dS$$

L'équation (2.27) se réécrit alors sous la forme :

$$\int_{\Omega^+} A_{ijkl}\sigma_{kl}(\tau_{ij} - \sigma_{ij})dV = \int_{S'} (\tau_{i3}^- - \sigma_{i3}^-)u_i dS - \int_S (\tau_{i3}^+ - \sigma_{i3}^+)u_i dS \quad (2.28)$$

Maintenant multiplions (2.26) par $\tau_{ij} - \sigma_{ij}$, et intégrons sur Ω^- :

$$\int_{\Omega^-} (\tau_{ij} - \sigma_{ij})\epsilon_{ij}(\mathbf{u})dV = \int_{\Omega^-} A_{ijkl}\sigma_{kl}(\tau_{ij} - \sigma_{ij})dV$$

Dans notre configuration, $\partial\Omega^- = (\partial\Omega^- \cap \Gamma_0) \cup (\partial\Omega^- \cap \Gamma_1) \cup (S)$:

- sur $\partial\Omega^- \cap \Gamma_0$: $v_i = 0$
- sur $\partial\Omega^- \cap \Gamma_1$: $\tau_{ij}n_j = F_i$ et $\sigma_{ij}n_j = F_i$, donc $(\tau_{ij} - \sigma_{ij})n_j = 0$
- sur S : Le vecteur normal extérieur à Ω^- est $+\vec{z}$, $\sigma = \sigma^-$ et $\tau = \tau^-$

Une intégration par parties similaire à celle effectuée pour Ω^+ conduit à :

$$\int_{\Omega^-} A_{ijkl}\sigma_{kl}(\tau_{ij} - \sigma_{ij})dV = \int_S (\tau_{i3}^- - \sigma_{i3}^-)u_i dS \quad (2.29)$$

On ajoute membre à membre les équations (2.28) et (2.29) pour obtenir :

$$\int_{\Omega^+} A_{ijkl}\sigma_{kl}(\tau_{ij} - \sigma_{ij})dV = \int_{S'} (\tau_{i3}^- - \sigma_{i3}^-)u_i dS - \int_S [(\tau_{i3}^+ - \tau_{i3}^-) - (\sigma_{i3}^+ - \sigma_{i3}^-)] u_i dS$$

On élimine $\tau_{i3}^+ - \tau_{i3}^-$ et $\sigma_{i3}^+ - \sigma_{i3}^-$ dans l'intégrale sur S en utilisant les équations d'équilibre de (2.11), et τ_{i3}^- et σ_{i3}^- dans l'intégrale sur S' en utilisant les équations d'équilibre de (2.12).

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} A_{ijkl}\sigma_{kl}(\tau_{ij} - \sigma_{ij})dV - \int_S u_\alpha(N_{\alpha\beta,\beta}^* - N_{\alpha\beta,\beta})dS - \int_S u_3(M_{\alpha\beta,\alpha\beta}^* - M_{\alpha\beta,\alpha\beta})dS \\ - \int_{S'} u_\alpha(N_{\alpha\beta,\beta}' - N_{\alpha\beta,\beta}')dS - \int_{S'} u_3(M_{\alpha\beta,\alpha\beta}' - M_{\alpha\beta,\alpha\beta}')dS = 0 \\ \forall(\tau, N^*, M^*, N', M') \in \Sigma_{ad} \end{aligned}$$

Compte tenu de (2.14), (2.15), (2.20) et (2.21), et de leur équivalent écrit avec N^* , N'^* , M^* et M'^* , l'équation précédente se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} A_{ijkl}\sigma_{kl}(\tau_{ij} - \sigma_{ij})dV + \int_S e_{\alpha\beta}(\mathbf{u})(N_{\alpha\beta}^* - N_{\alpha\beta})dS - \int_S \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(M_{\alpha\beta}^* - M_{\alpha\beta})dS \\ + \int_{S'} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u})(N_{\alpha\beta}' - N_{\alpha\beta}')dS - \int_{S'} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(M_{\alpha\beta}' - M_{\alpha\beta}')dS = 0 \\ \forall(\tau, N^*, M^*, N', M') \in \Sigma_{ad} \end{aligned}$$

On utilise alors les lois de comportement (2.4) du milieu Ω et celles du renfort interne (2.11) et externe (2.12) pour obtenir (2.13). □

2.4.3 Théorème de la double inégalité

Théorème 3. Théorème de l'énergie potentielle

La formulation variationnelle en déplacements (2.13) est équivalente à :

$$\mathbf{u} \in V, \quad I(\mathbf{u}) \leq I(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

avec $I(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})$.

Démonstration. La démonstration est classique, voir par exemple [32]. □

Théorème 4. Théorème de l'énergie complémentaire

La formulation variationnelle en contraintes (2.25) est équivalente à

$$\begin{aligned} & (\sigma, N, M, N', M') \in \Sigma_{ad}, \\ & J(\sigma, N, M, N', M') \leq J(\tau, N^*, M^*, N'^*, M'^*) \quad \forall (\tau, N^*, M^*, N'^*, M'^*) \in \Sigma_{ad} \end{aligned} \quad (2.30)$$

avec

$$J(\sigma, N, M, N', M') = \frac{1}{2} \left(A(\sigma, \sigma) + B_T(N, N) + B_N(M, M) + B'_T(N', N') + B'_N(M', M') \right)$$

Démonstration. La démonstration est classique, voir par exemple [32]. □

Théorème 5. Théorème de la double inégalité

Si $(\mathbf{u}, \sigma, N, M, N', M')$ est solution de (P), alors

$$\begin{aligned} & \mathbf{u} \in V, \quad (\sigma, N, M, N', M') \in \Sigma_{ad}, \\ & -I(\mathbf{v}) \leq -I(\mathbf{u}) = J(\sigma, N, M, N', M') \leq J(\tau, N^*, M^*, N'^*, M'^*) \\ & \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall (\tau, N^*, M^*, N'^*, M'^*) \in \Sigma_{ad} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Démonstration. Il reste à montrer l'égalité centrale :

$$-I(\mathbf{u}) = J(\sigma, N, M, N', M')$$

En choisissant $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans (2.13), on obtient que $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = L(\mathbf{u})$. La précédente équation s'écrit alors :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = A(\sigma, \sigma) + B_T(N, N) + B_N(M, M) + B'_T(N', N') + B'_N(M', M')$$

ce qui se vérifie aisément en considérant les lois de comportement (2.4) dans Ω , (2.11) sur S et (2.12) sur S' . □

2.4.4 Egalité entre le travail des efforts extérieurs, le double de l'énergie de déformation et le double de l'énergie complémentaire

Dans la démonstration de la section précédente, il a été prouvé que
Si \mathbf{u} et (σ, N, M, N', M') sont solution du problème élastique (P) alors

$$L(\mathbf{u}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = A(\sigma, \sigma) + B_T(N, N) + B_N(M, M) + B'_T(N', N') + B'_N(M', M') \quad (2.32)$$

Cette équation s'interprète comme l'égalité entre le travail des efforts extérieurs pour le champ de déplacements solution, le double de l'énergie de déformation et le double de l'énergie complémentaire. Elle sera utilisée pour définir l'algorithme d'optimisation dans le chapitre 3.

2.4.5 Existence et unicité de la solution du problème élastique

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution du problème (P) est analogue à celle du problème d'élasticité tridimensionnelle classique [32].

2.5 Mise en œuvre numérique

Dans l'hypothèse de renfort de très faible épaisseur, la rigidité de flexion du renfort apportée à la structure tridimensionnelle peut être considérée faible devant celle apportée par la rigidité membranaire du renfort. Dans ces conditions, la modélisation peut être simplifiée.

La section 2.5.1 présente la modélisation du renfort d'un milieu tridimensionnel par une membrane et les formulations variationnelles qui en découlent. Puis une mise en œuvre numérique de ce modèle dans le code éléments finis MODULEF est décrite dans la section 2.5.2.

2.5.1 Modèle de renfort membranaire

Modélisation

On considère le milieu Ω_S décrit dans la section 2.3.1 (figure 2.2). On choisit un champ de déplacements virtuel de type membrane de la forme :

$$\begin{cases} u_\alpha^{3D}(x, y, z) = u_\alpha(x, y) \\ u_3^{3D}(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (\text{avec } \alpha = 1, 2)$$

L'écriture du principe des puissances virtuelles conduit alors aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites en efforts suivantes :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta,\beta} + F_\alpha^S = 0 \\ Q_{\alpha,\alpha} + f = 0 \end{cases} \quad \text{dans } S, \quad \begin{cases} N_{\alpha\beta}\nu_\beta = F_\alpha^B \\ Q_\alpha\nu_\alpha = T \end{cases} \quad \text{sur } \partial S$$

Une démarche analogue à celle effectuée en section 2.3.2 conduit à :

- pour un renfort interne :

$$\begin{cases} F_\alpha^S = \sigma_{\alpha 3}^+ - \sigma_{\alpha 3}^- \\ f = \sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^- \end{cases} \quad \begin{cases} N_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 \\ Q_\alpha\nu_\alpha = 0 \end{cases}$$

- pour un renfort externe :

$$\begin{cases} F_\alpha^S = F_\alpha - \sigma_{\alpha 3}^- \\ f = F_3 - \sigma_{33}^- \end{cases} \quad \begin{cases} N_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 \\ Q_\alpha\nu_\alpha = 0 \end{cases}$$

La loi de comportement des renforts est choisie élastique linéaire et s'écrit dans le cadre d'un modèle de membrane pour le renfort interne et le renfort externe sous la forme :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}(\mathbf{u}) \\ Q_\alpha = c_{\alpha\beta} w_{,\beta} \end{cases}$$

Les conditions aux limites d'encastrement s'écrivent dans le cadre d'un modèle de membrane pour le renfort interne et le renfort externe sous la forme :

$$\begin{cases} u_\alpha = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_0 \cap \partial S$$

On identifie les déplacements de la surface moyenne des plaques de renfort avec les déplacements du (ou des) milieu(x) tridimensionnel(s) environnant(s).

Les équations relatives au renfort interne s'écrivent :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta,\beta} + (\sigma_{\alpha 3}^+ - \sigma_{\alpha 3}^-) = 0 \\ Q_{\alpha,\alpha} + (\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-) = 0 \end{cases} \quad \text{dans } S, \quad \begin{cases} N_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}(\mathbf{u}) \\ Q_\alpha = c_{\alpha\beta} u_{3,\beta} \end{cases} \quad \text{dans } S \\ \begin{cases} N_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 \\ Q_\alpha\nu_\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial S \cap \Gamma_1, \quad \begin{cases} u_\alpha = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial S \cap \Gamma_0 \quad (2.33)$$

Les équations relatives au renfort externe sont :

$$\begin{cases} N'_{\alpha\beta,\beta} + (F_\alpha - \sigma_{\alpha 3}^-) = 0 \\ Q'_{\alpha,\alpha} + (F_3 - \sigma_{33}^-) = 0 \end{cases} \quad \text{dans } S', \quad \begin{cases} N'_{\alpha\beta} = b'_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}(\mathbf{u}) \\ Q'_{\alpha\beta} = c'_{\alpha\beta} u_{3,\beta} \end{cases} \quad \text{dans } S' \\ \begin{cases} N'_{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 \\ Q'_{\alpha}\nu_\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial S' \cap \Gamma_1, \quad \begin{cases} u_\alpha = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial S' \cap \Gamma_0 \quad (2.34)$$

Le système d'équations (\bar{P}) à résoudre est constitué des équations (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.33) et (2.34).

Formulations variationnelles

Dans ce cas particulier de renfort de type membrane, les formulations variationnelles en déplacements et en contraintes s'écrivent respectivement :

Théorème 6. Formulation variationnelle en déplacements pour un renfort de type membrane

Si \mathbf{u} est solution de (\bar{P}), alors

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in \bar{V} \\ \bar{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \bar{V} \end{aligned} \quad (2.35)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) ; v_i \in H^1(\Omega) ; v_i|_S \in H^1(S) ; v_i|_{S'} \in H^1(S') ; \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\} \\ \bar{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{kl}(\mathbf{v}) dV + \int_S b_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\gamma\delta}(\mathbf{v}) dS + \int_S c_{\alpha\beta} \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_3}{\partial x_\beta} dS \\ &\quad + \int_{S'} b'_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\gamma\delta}(\mathbf{v}) dS + \int_{S'} c'_{\alpha\beta} \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_3}{\partial x_\beta} dS \\ L(\mathbf{v}) &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV \end{aligned}$$

Théorème 7. Formulation variationnelle en contraintes pour un renfort de type membrane

Si (σ, N, Q, N', Q') est solution de (\bar{P}), alors

$$\begin{aligned} (\sigma, N, Q, N', Q') &\in \bar{\Sigma}_{ad} \\ A(\sigma, \tau - \sigma) + B_T(N, N^* - N) + \bar{B}_N(Q, Q^* - Q) \\ &\quad + B'_T(N', N'^* - N') + \bar{B}'_N(Q', Q'^* - Q') = 0 \quad (2.36) \\ \forall (\tau, N^*, Q^*, N'^*, Q'^*) &\in \bar{\Sigma}_{ad} \end{aligned}$$

$$\text{où } \bar{\Sigma}_{ad} = \left\{ \begin{array}{l} (\tau_{ij}, N_{\alpha\beta}^*, Q_{\alpha}^*, N'_{\alpha\beta}, Q'_{\alpha}), (i, j = 1, 2, 3), (\alpha, \beta = 1, 2), \\ \tau_{ij} = \tau_{ji}, N_{\alpha\beta}^* = N_{\beta\alpha}^*, N'_{\alpha\beta} = N'_{\beta\alpha}, \\ \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \text{ dans } \Omega^+ \text{ et } \Omega^-, \tau_{ij} n_j = F_i \text{ sur } \Gamma_1 \setminus S' \\ \frac{\partial N_{\alpha\beta}^*}{\partial x_{\beta}} + \tau_{\alpha 3}^+ - \tau_{\alpha 3}^- = 0 \text{ dans } S, N_{\alpha\beta}^* \nu_{\beta} = 0 \text{ sur } \partial S \cap \Gamma_1 \\ \frac{\partial Q_{\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}} + \sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^- = 0 \text{ dans } S, Q_{\alpha}^* \nu_{\alpha} = 0 \text{ sur } \partial S \cap \Gamma_1 \\ \frac{\partial N'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + F_{\alpha} - \tau_{\alpha 3}^- = 0 \text{ dans } S', N'_{\alpha\beta} \nu_{\beta} = 0 \text{ sur } \partial S' \cap \Gamma_1 \\ \frac{\partial Q'_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + F_3 - \sigma_{33}^- = 0 \text{ dans } S', Q'_{\alpha} \nu_{\alpha} = 0 \text{ sur } \partial S' \cap \Gamma_1 \end{array} \right\}$$

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} A(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij} \tau_{kl} dV \\ B_T(N, N^*) = \int_S B_{\alpha\beta\gamma\delta} N_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta}^* dS, \quad \bar{B}_N(Q, Q^*) = \int_S C_{\alpha\beta} Q_{\alpha} Q_{\beta}^* dS \\ B'_T(N', N'^*) = \int_{S'} B'_{\alpha\beta\gamma\delta} N'_{\alpha\beta} N'_{\gamma\delta} dS, \quad \bar{B}'_N(Q', Q'^*) = \int_{S'} C'_{\alpha\beta} Q'_{\alpha} Q'_{\beta} dS \end{array} \right.$$

On peut alors démontrer les théorèmes de l'énergie potentielle, de l'énergie complémentaire et de la double inégalité associés aux formulations variationnelles (2.35) et (2.36).

2.5.2 Programmation

Dans le cadre d'un calcul par éléments finis en déplacements, la simplification apportée par la prise en compte de renforts de type membrane permet une mise en œuvre élément fini simplifiée car l'utilisation simultanée d'éléments finis de membrane et tridimensionnels ne pose pas la difficulté de continuité de gradient de champ de déplacements, les champs $v_i|_S$ et $v_i|_{S'}$ étant seulement $H^1(S)$ et $H^1(S')$ respectivement et non plus $H^2(S)$ et $H^2(S')$ comme dans le cas de renforts modélisés par des plaques de Kirchhoff Love.

Le code éléments finis utilisé est le code MODULEF. L'élément fini tridimensionnel initial est un élément isoparamétrique à 8 noeuds avec une interpolation de type Q1 Lagrange (sous MODULEF : élément HEXA 3Q1D). A cet élément a été rajoutée la prise en compte d'une rigidité surfacique associée aux faces de l'élément. Cette prise en compte est facultative selon les faces. Les faces sont alors considérées comme des éléments isoparamétriques à 4 noeuds avec une interpolation de type Q1 Lagrange (un tel élément bidimensionnel existe sous MODULEF sous la dénomination QUAD 2Q1D).

Le module de calcul des matrices de rigidité élémentaires de MODULEF dénommé THELXX a été modifié pour permettre la prise en compte d'un élément tridimensionnel avec rigidité surfacique variable d'une face à l'autre et d'un élément à l'autre, ceci dans le

but de prendre en compte l'influence des paramètres de conception qui seront utilisés lors de la démarche d'optimisation.

Le module de calcul des contraintes a été modifié pour déterminer, sur chaque élément fini, le champ de contraintes tridimensionnelles, plus le champ de contraintes sur chaque face de l'élément à laquelle est associée une rigidité surfacique.

2.5.3 Exemple d'un milieu tridimensionnel avec un renfort interne

Divers exemples numériques seront présentés dans le chapitre suivant où est considérée l'optimisation simultanée de plusieurs renforts d'un milieu tridimensionnel.

Nous présentons ici l'exemple simple du renfort interne d'un milieu tridimensionnel défini par un parallélépipède rectangle encastré sur une face et chargé par une pression constante sur une autre (voir figure 2.3). Le renfort est centré dans le milieu tridimensionnel. Compte tenu de la symétrie du problème, seule la rigidité tangentielle du renfort est active.

Le chargement surfacique a pour valeur $0.1 MPa$. Les dimensions du milieu tridimensionnel sont $1m \times 3m \times 2m$ et celle de la plaque sont $1m \times 3m$. L'épaisseur de la plaque considérée est $0.01m$. Le milieu tridimensionnel est constitué d'un matériau isotrope élastique linéaire de module d'Young $E = 100 MPa$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Le renfort est constitué d'un matériau orthotrope ($E_1 = 59461 MPa$, $E_2 = 4685 MPa$, $G_{12} = 1777 MPa$, $\nu_{12} = 0.329$, voir section 3.4.1), la direction d'orthotropie associée à la plus grande rigidité étant orientée suivant la longueur de la plaque (direction Y). La loi de comportement tangentielle du renfort s'écrit alors, avec $\nu_{21} = E_2 \frac{\nu_{12}}{E_1}$:

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \end{pmatrix}$$

Les déformées de la structure et du renfort sont présentées dans la figure 2.4. On perçoit nettement l'effet rigidifiant du renfort sur la structure tridimensionnelle.

2.6 Conclusion

Une analyse linéaire originale du problème du renforcement d'un milieu tridimensionnel élastique linéaire par une plaque de Kirchhoff Love interne ou externe a abouti à une formulation variationnelle qui permet de conclure sur l'existence et l'unicité d'une solution.

Une mise en œuvre numérique dans le cadre de renforts de type membrane avec effort normal a été décrite et un exemple académique traité.

Ce nouveau modèle va permettre dans le chapitre suivant de considérer le problème de l'optimisation de la rigidité globale de ces structures renforcées, dont un cas particulier important est l'assemblage de plaques composites.

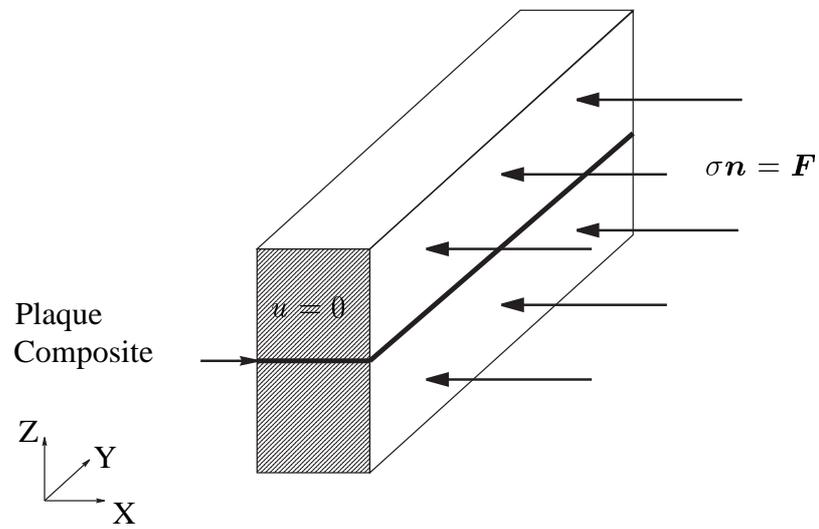
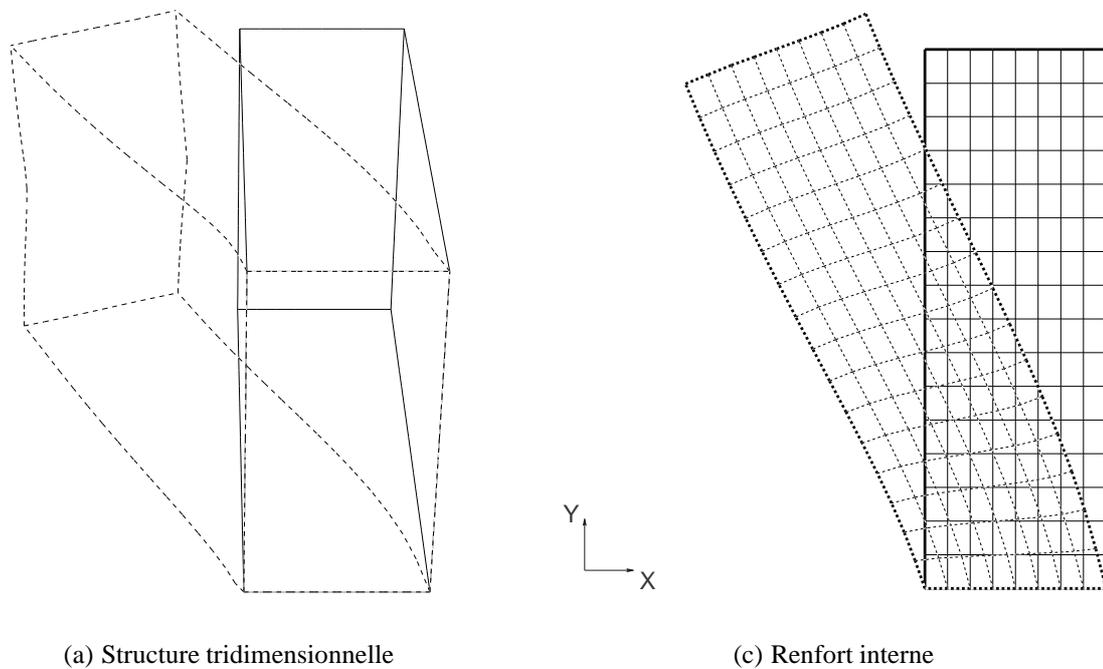


Figure 2.3 — Représentation schématique du milieu tridimensionnel renforcé par un panneau interne



(a) Structure tridimensionnelle

(c) Renfort interne

Figure 2.4 — Déformée du milieu tridimensionnel avec un renfort interne

Chapitre 3

Optimisation de structures aéronautiques de type assemblage de plaques composites

Le travail présenté s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre la LM2S, le département de mécanique du solide et de l'endommagement de l'ONERA-Lille et AIRBUS. Dans ce contexte industriel du milieu aéronautique, une structure test de type assemblage de plaques composites a été retenue : un volet de gouverne d'Airbus. Cette structure complexe doit satisfaire, dans sa phase de conception, à des exigences de rigidité structurale et de poids.

L'objectif de ce chapitre est double. Un premier aspect concerne l'application de l'algorithme d'optimisation rappelé au chapitre 1 sur des structures à caractère industriel. Le deuxième aspect consiste à déterminer des familles de structures optimales dans la phase de préconception de l'aileron pour lesquelles sa définition complète est encore à définir en grande partie.

Pour ce faire, nous utiliserons le modèle de renforcement d'un milieu tridimensionnel élastique linéaire par des plaques de Kirchhoff Love développé au chapitre précédent. Nous utiliserons cette formulation pour modéliser un assemblage de plaques composites en considérant un milieu tridimensionnel de très faible rigidité renforcé par des plaques très rigides en comparaison. L'optimisation d'une telle structure en terme de maximisation de sa rigidité globale est formulée de manière analogue à celle présentée au chapitre 1 par la minimisation d'un critère défini comme la somme de la compliance et d'un terme de coût. Deux types de paramètres d'optimisation, qui mènent à l'utilisation de deux algorithmes d'optimisation différents sont considérés :

- des paramètres d'optimisation distribués caractérisant la structure locale du matériau constituant les plaques de renfort. L'algorithme d'optimisation présenté au chapitre 1 est alors appliqué.

- des paramètres d'optimisation géométriques permettant de définir la position des renforts internes du volet de gouverne. L'algorithme d'optimisation utilisé est alors basé sur la méthode du gradient projeté.

Sommaire

3.1	Définition du problème d'optimisation	58
3.1.1	Définition du critère	58
3.1.2	Définition du problème d'optimisation	58
3.2	Algorithme d'optimisation avec paramètres distribués	58
3.2.1	Rappel des résultats utiles pour l'algorithme	59
3.2.2	Algorithme d'optimisation	60
3.3	Mise en œuvre numérique dans le cas d'un assemblage de membranes composites avec effort normal	62
3.3.1	Loi de comportement homogénéisée	63
3.3.2	Minimisation locale à contraintes fixées	65
3.4	Exemples numériques. Cas d'un volet de gouverne d'Airbus (collabo- ration LM2S / AIRBUS / ONERA)	67
3.4.1	Exemple d'un milieu tridimensionnel avec un renfort interne	67
3.4.2	Exemple d'un assemblage de plaques composites	71
3.4.3	Exemple d'un volet de gouverne d'Airbus	74
3.5	Optimisation de la position des renforts	84
3.5.1	Complémentarité avec l'optimisation à paramètres distribués	84
3.5.2	Algorithme d'optimisation	84
3.6	Exemples numériques	86
3.6.1	Problématiques de conception	86
3.6.2	Description de la structure académique test	87
3.6.3	Paramètres et contraintes d'optimisation	87
3.6.4	Mise en oeuvre numérique	89
3.6.5	Optimisation de la position des renforts dans le cas de zones d'at- tache fixées	90
3.6.6	Optimisation de la position des renforts dans le cas de zones d'at- tache variables	92
3.6.7	Optimisation de la position des renforts dans le cas de l'encastrement	94
3.6.8	Discussion	94
3.7	Conclusion	95

3.1 Définition du problème d'optimisation

3.1.1 Définition du critère

On se place dans le cadre de l'optimisation de structures composites légères constituées de cloisons minces qui sont réalisées lorsque les impératifs de rigidité et de poids sont prépondérants. Dans cette optique, un critère énergétique global quantifiant la rigidité globale d'une telle structure peut être utilisé. Il sera considéré être défini à partir de la compliance, qui n'est autre que le travail des efforts extérieurs donnés dans le champ de déplacements solution. Celle-ci s'écrit :

$$Compl = L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS$$

On définit d'une manière générale les paramètres d'optimisation par β . Pour maximiser la rigidité globale au moindre poids, ou plus généralement au moindre coût, le critère sera choisi comme la somme de la compliance et d'un coût qui dépendra des paramètres d'optimisation. Ce critère s'écrit :

$$G(\beta) = Compl(\beta) + COUT(\beta)$$

3.1.2 Définition du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation considéré s'écrit alors :

$$\min_{\beta} G(\beta) \tag{3.1}$$

Cette définition du problème d'optimisation suit une démarche identique à celle décrite dans le chapitre bibliographique 1.

3.2 Algorithme d'optimisation avec paramètres distribués

Nous ferons l'hypothèse, sans perte de généralité, que la structure considérée est constituée d'un milieu tridimensionnel renforcé par un panneau externe et un panneau interne. Le lecteur se référera au chapitre précédent pour la définition des notations utilisées et pour la définition du problème élastique de référence.

Nous faisons l'hypothèse de paramètres d'optimisation distribués définis sur les domaines géométriques des renforts. Ceci signifie que tout paramètre d'optimisation est un champ défini sur l'ensemble des surfaces définissant les renforts. Dès lors on scinde les paramètres d'optimisation en deux catégories que nous appellerons :

- paramètres d'optimisation de type orientation θ_i ($i = 1 \dots n$)
- paramètres d'optimisation de type proportion de constituant α_i ($i = 1 \dots n$)

Les paramètres d'optimisation distribués θ_i et α_i sont des fonctions scalaires bornées définies sur les domaines géométriques des renforts.

Le terme de coût est alors supposé ne dépendre que des paramètres de type proportion de constituant. En notant S le domaine géométrique d'un renfort, il s'écrit alors :

$$COUT(\alpha_i) = \sum_S \left[\int_S cout(\alpha_i) dS \right]$$

3.2.1 Rappel des résultats utiles pour l'algorithme

Le problème d'optimisation (3.1) est défini pour un champ de déplacements solution d'un problème élastique dont la formulation variationnelle en déplacements s'écrit (voir eq (2.13)) :

Si u est solution du problème (P) alors

$$\mathbf{u} \in V, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{kl}(\mathbf{v}) dV + \int_S b_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\gamma\delta}(\mathbf{v}) dS + \int_S d_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} dS \\ \quad + \int_{S'} b'_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\gamma\delta}(\mathbf{v}) dS + \int_{S'} d'_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} dS \\ L(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV \end{array} \right.$$

Cette formulation variationnelle permet la définition d'un champ de déplacements solution \mathbf{u} unique à paramètres d'optimisation fixés. L'utilisation des lois de comportement de (2.11) et (2.12) permet alors la définition du champ de contraintes (σ, N, M, N', M') associé solution.

Le théorème de l'énergie complémentaire s'écrit (équation (2.30)) :

Si (σ, N, M, N', M') est le champ de contraintes solution de (P) alors :

$$(\sigma, N, M, N', M') \in \Sigma_{ad},$$

$$J(\sigma, N, M, N', M') \leq J(\tau, N^*, M^*, N'^*, M'^*) \quad \forall (\tau, N^*, M^*, N'^*, M'^*) \in \Sigma_{ad}$$

avec

$$J(\sigma, N, M, N', M') = \frac{1}{2} \left(A(\sigma, \sigma) + B_T(N, N) + B_N(M, M) + B'_T(N', N') + B'_N(M', M') \right)$$

$$\text{et } \begin{cases} A(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij} \tau_{kl} dV \\ B_T(N, N^*) = \int_S B_{\alpha\beta\gamma\delta} N_{\alpha\beta} N^*_{\gamma\delta} dS, & B_N(M, M^*) = \int_S D_{\alpha\beta\gamma\delta} M_{\alpha\beta} M^*_{\gamma\delta} dS \\ B'_T(N', N'^*) = \int_{S'} B'_{\alpha\beta\gamma\delta} N'_{\alpha\beta} N'^*_{\gamma\delta} dS, & B'_N(M', M'^*) = \int_{S'} D'_{\alpha\beta\gamma\delta} M'_{\alpha\beta} M'^*_{\gamma\delta} dS \end{cases}$$

Enfin rappelons l'égalité entre le travail des efforts extérieurs dans le champ de déplacements solution et le double de l'énergie complémentaire (équation (2.32)) :

Si \mathbf{u} et (σ, N, N', M, M') sont solutions du problème (P) alors

$$L(\mathbf{u}) = A(\sigma, \sigma) + B_T(N, N) + B_N(M, M) + B'_T(N', N') + B'_N(M', M') \quad (3.2)$$

3.2.2 Algorithme d'optimisation

L'algorithme d'optimisation présenté dans la section 1.2.4 est étendu au problème d'élasticité rappelé dans la section précédente et présenté en détail dans le chapitre 2.

1. Phase d'initialisation :

On choisit un champ de paramètres d'optimisation $(\theta_i^{(0)}, \alpha_i^{(0)})$ sur les domaines définissant les plaques S et S' . La résolution du problème d'élasticité associé permet la définition du champ de contraintes $\Sigma^{(0)} = (\sigma^{(0)}, N^{(0)}, M^{(0)}, N'^{(0)}, M'^{(0)})$.

2. Minimisation locale à contraintes fixées :

On effectue la minimisation locale, c'est-à-dire en chaque point des domaines S et S' de l'intégrand du critère à contraintes $\Sigma^{(n)} = (\sigma^{(n)}, N^{(n)}, M^{(n)}, N'^{(n)}, M'^{(n)})$ fixées, ce qui s'écrit :

$$\min_{(\theta_i, \alpha_i)} \left(B_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(l)}(\theta_i, \alpha_i) N_{\alpha\beta}^{(l)(n)} N_{\gamma\delta}^{(l)(n)} + D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(l)}(\theta_i, \alpha_i) M_{\alpha\beta}^{(l)(n)} M_{\gamma\delta}^{(l)(n)} + \text{cout}(\alpha_i) \right)$$

pour obtenir le champ de paramètres $(\theta^{(n+1)}, \alpha^{(n+1)})$ qui vérifie la propriété

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij}^{(n)} \sigma_{kl}^{(n)} dV \\
& + \int_S \left[B_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) N_{\alpha\beta}^{(n)} N_{\gamma\delta}^{(n)} dS + D_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) M_{\alpha\beta}^{(n)} M_{\gamma\delta}^{(n)} \right] dS \\
& + \int_S \text{cout}(\alpha_i^{(n+1)}) dS \\
& + \int_{S'} \left[B'_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) N'_{\alpha\beta}{}^{(n)} N'_{\gamma\delta}{}^{(n)} dS + D'_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) M'_{\alpha\beta}{}^{(n)} M'_{\gamma\delta}{}^{(n)} \right] dS \\
& + \int_{S'} \text{cout}(\alpha_i^{(n+1)}) dS \\
& \leq \\
& \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij}^{(n)} \sigma_{kl}^{(n)} dV \\
& + \int_S \left[B_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)}) N_{\alpha\beta}^{(n)} N_{\gamma\delta}^{(n)} + D_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)}) M_{\alpha\beta}^{(n)} M_{\gamma\delta}^{(n)} \right] dS \\
& + \int_S \text{cout}(\alpha_i^{(n)}) dS \\
& + \int_{S'} \left[B'_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)}) N'_{\alpha\beta}{}^{(n)} N'_{\gamma\delta}{}^{(n)} + D'_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)}) M'_{\alpha\beta}{}^{(n)} M'_{\gamma\delta}{}^{(n)} \right] dS \\
& + \int_{S'} \text{cout}(\alpha_i^{(n)}) dS
\end{aligned}$$

3. Minimisation globale à paramètres d'optimisation fixés :

On résout le problème d'élasticité associé au champ de paramètres $(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)})$ pour obtenir le champ de contraintes $\Sigma^{(n+1)} = (\sigma^{(n+1)}, N^{(n+1)}, M^{(n+1)}, N'^{(n+1)}, M'^{(n+1)})$. Le théorème de l'énergie complémentaire, avec comme choix de champ de contraintes statiquement admissible $\Sigma^{(n)}$, et après ajout du terme de coût associé aux paramètres

$\alpha_i^{(n+1)}$ aux deux membres de l'inégalité implique que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij}^{(n+1)} \sigma_{kl}^{(n+1)} dV \\
 & + \int_S \left[B_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) N_{\alpha\beta}^{(n+1)} N_{\gamma\delta}^{(n+1)} dS + D_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) M_{\alpha\beta}^{(n+1)} M_{\gamma\delta}^{(n+1)} \right] dS \\
 & + \int_S \text{cout}(\alpha_i^{(n+1)}) dS \\
 & + \int_{S'} \left[B'_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) N'_{\alpha\beta}{}^{(n+1)} N'_{\gamma\delta}{}^{(n+1)} dS + D'_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) M'_{\alpha\beta}{}^{(n+1)} M'_{\gamma\delta}{}^{(n+1)} \right] dS \\
 & + \int_{S'} \text{cout}(\alpha_i^{(n+1)}) dS \\
 & \leq \\
 & \int_{\Omega} A_{ijkl} \sigma_{ij}^{(n)} \sigma_{kl}^{(n)} dV \\
 & + \int_S \left[B_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) N_{\alpha\beta}^{(n)} N_{\gamma\delta}^{(n)} + D_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) M_{\alpha\beta}^{(n)} M_{\gamma\delta}^{(n)} \right] dS \\
 & + \int_S \text{cout}(\alpha_i^{(n+1)}) dS \\
 & + \int_{S'} \left[B'_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) N'_{\alpha\beta}{}^{(n)} N'_{\gamma\delta}{}^{(n)} + D'_{\alpha\beta\gamma\delta}(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) M'_{\alpha\beta}{}^{(n)} M'_{\gamma\delta}{}^{(n)} \right] dS \\
 & + \int_{S'} \text{cout}(\alpha_i^{(n+1)}) dS
 \end{aligned}$$

En considérant la propriété (3.2), les étapes 2 et 3 impliquent la propriété sur le critère G :

$$G(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) \leq G(\theta_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)})$$

On itère alors les étapes 2 et 3. Le critère étant une grandeur positive qui diminue à chaque itération, il converge nécessairement vers une limite.

3.3 Mise en œuvre numérique dans le cas d'un assemblage de membranes composites avec effort normal

Dans cette section, nous spécifions certains aspects de la mise œuvre numérique de l'optimisation d'un milieu homogène isotrope par des renforts internes et externes de type membrane. Les équations de ce modèle sont celles présentées dans la section 2.5.1. Dans ce cas, l'écriture de l'algorithme d'optimisation est analogue à celle de la section précédente en considérant l'expression de l'énergie complémentaire de ce nouveau modèle.

Pour la mise en œuvre numérique, les membranes considérées sont des monocouches à fibres longues curvilignes de proportion variable. Deux paramètres d'optimisation sont alors définis :

- l'orientation locale des fibre θ

- la proportion de fibres α

Ces deux paramètres d'optimisation distribués sont définis sur chaque panneau, et sont supposés bornés :

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \alpha \in [\alpha_{min}; \alpha_{max}]$$

Pour prendre en compte le fait que les fibres constituent la matière qui coûte le plus dans la phase de conception, le coût est choisi proportionnel à la densité de fibre. On introduit un paramètre k constant fixé à définir par l'utilisateur. En notant S le domaine géométrique d'un renfort, le terme de coût s'écrit alors :

$$COUT = k \sum_S \left[\int_S \alpha dS \right]$$

La démarche numérique adoptée pour déterminer le champ de contraintes solution est un calcul par éléments finis en déplacements associé à l'utilisation en post-processeur de la loi de comportement. Il n'est pas nécessaire d'utiliser une formulation en contraintes d'un point de vue numérique.

Il reste à définir le processus d'homogénéisation utilisé : ce choix est lié à la volonté d'obtenir une minimisation locale numérique explicite, ceci dans le but de minimiser le coût numérique de cette étape de l'algorithme. Dans la section 1.4.3, il a été rappelé les travaux de Terrel [62] qui permettent, lors de l'optimisation d'une membrane composite monocouche d'épaisseur constante à fibres longues curvilignes de proportion variable, en élasticité bi-dimensionnelle sous l'hypothèse de contraintes planes, d'obtenir une minimisation locale explicite en utilisant la loi des mélanges comme processus d'homogénéisation.

En généralisant cette approche pour prendre en compte l'effort normal, une méthode d'homogénéisation qui aboutit à une minimisation locale itérative mais explicite par étape est définie dans les sections suivantes.

3.3.1 Loi de comportement homogénéisée

Les fibres sont supposées avoir un comportement élastique linéaire isotrope transverse et la matrice élastique linéaire isotrope. Le matériau homogénéisé constitué du mélange fibres matrice est supposé avoir un comportement élastique linéaire isotrope transverse. On note E un module d'Young, G un module de cisaillement, ν un coefficient de poisson et on utilise un indice f pour les grandeurs relatives aux fibres, m pour les grandeurs relatives à la matrice, 1 pour la direction longitudinale et 2 pour la direction transverse. La loi de comportement d'un

renfort membranaire (eq (2.33) et (2.34)) s'écrit, dans le repère des fibres, sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{11} = \frac{1}{hE_1}N_{11} - \frac{\nu_{12}}{hE_1}N_{22} \\ e_{22} = -\frac{\nu_{12}}{hE_1}N_{11} + \frac{1}{hE_2}N_{22} \\ 2e_{12} = \frac{1}{hG_{12}}N_{12} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{3,1} = \frac{Q_1}{hG_{12}} \\ u_{3,2} = \frac{Q_2}{hG_{22}} \end{array} \right.$$

Pour les coefficients matériau intervenant dans la loi de comportement tangentielle, la loi des mélanges s'écrit [15] :

$$\begin{aligned} E_1 &= \alpha E_{f1} + (1 - \alpha)E_m & \nu_{12} &= \alpha \nu_{f12} + (1 - \alpha)\nu_m \\ E_2 &= \left(\frac{\alpha}{E_{f2}} + \frac{1 - \alpha}{E_m} \right)^{-1} & G_{12} &= \left(\frac{\alpha}{G_{f12}} + \frac{1 - \alpha}{G_m} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Pour définir le comportement isotrope transverse du matériau homogénéisé, il faut exprimer un coefficient supplémentaire en fonction de la proportion de fibre. Il existe une relation entre le coefficient G_{22} et le coefficient ν_{22} de ce matériau :

$$G_{22} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{22})} \quad (3.3)$$

Deux options sont alors envisageables : exprimer ν_{22} ou exprimer G_{22} en fonction de la proportion de fibres. Dans l'optique d'obtenir une minimisation locale par rapport aux paramètres d'optimisation à contraintes fixées explicite, nous choisissons d'approximer le paramètre matériau G_{22} fonction de la proportion de fibres par un modèle analogue mathématiquement à celui utilisé pour G_{12} . Ce modèle s'écrit alors :

$$G_{22} = \left(\frac{\alpha}{G_{f22}} + \frac{1 - \alpha}{G_m} \right)^{-1} \quad \left(\text{avec } G_{f22} = \frac{E_{f2}}{2(1 + \nu_{f22})} \right) \quad (3.4)$$

Pour obtenir un module de cisaillement G_{22} toujours inférieur au module de cisaillement G_{12} , le paramètre matériau G_{f22} sera choisi inférieur au paramètre G_{f12} .

L'approximation de G_{12} par la loi des mélanges est une approximation qui possède un sens physique. Elle est obtenue en considérant une tranche de matériau constituée de couches successives de fibres et de matrice. Cette tranche est soumise à un chargement de cisaillement longitudinal qui induit des contraintes de cisaillement égales au sein de la fibre et de la matrice. Par contre, l'approximation de G_{22} est effectuée en collant au mieux la courbe expérimentale représentant les variations de G_{22} en fonction de la proportion de fibres et n'a pas de sens physique particulier.

Remarque. Le choix de G_{22} de la forme (3.4), compte tenu de (3.3), implique l'expression

de ν_{22} en fonction de la proportion de fibres suivante :

$$\nu_{22} = \frac{\alpha E_m(1 + \nu_{f22}) + (1 - \alpha)E_{f2}(1 + \nu_m)}{\alpha E_m + (1 - \alpha)E_{f2}} - 1$$

Valeurs numériques

Pour tous les exemples numériques présentés dans la suite de ce chapitre, on considérera des fibres de kevlar et une matrice epoxyde. Pour les fibres de kevlar, supposées élastiques linéaires isotropes transverses, on utilisera les valeurs numériques des coefficients matériau intervenant dans la loi de comportement dans le plan des fibres suivantes :

$$\begin{aligned} E_{f1} &= 139400 \text{ MPa} & E_{f2} &= 9580 \text{ MPa} \\ \nu_{f12} &= 0.37 & G_{f12} &= 3450 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Pour la matrice epoxyde, supposée élastique linéaire isotrope, on utilisera les valeurs numériques des coefficients matériau suivantes :

$$E_m = 3450 \text{ MPa} \quad \nu_m = 0.3$$

La valeur du paramètre G_{f22} utilisée est choisie arbitrairement en respectant la propriété $G_{f22} < G_{f12}$. On utilisera la valeur :

$$G_{f22} = 2000 \text{ MPa}$$

Pour une proportion de fibres de 60%, ces valeurs numériques impliquent les valeurs des paramètres du matériau homogénéisé élastique linéaire isotrope transverse suivantes :

$$\begin{aligned} E_1 &= 84780 \text{ MPa} & E_2 &= 5600 \text{ MPa} \\ \nu_{12} &= 0.34 & G_{12} &= 2100 \text{ MPa} \\ & & G_{22} &= 1660 \text{ MPa} \end{aligned}$$

3.3.2 Minimisation locale à contraintes fixées

La présentation complète de la minimisation locale est effectuée en annexe A. Nous présentons ici les différentes étapes et les principaux résultats de la démarche.

La grandeur à minimiser g est le double de l'énergie complémentaire locale plus le coût local, ce qui s'écrit dans ce cas dans le repère des fibres :

$$g = A + B + C$$

où A est le double de l'énergie complémentaire locale associé au comportement tangentiel :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{h} \left[\frac{N_{11}^2}{E_1} + \frac{N_{22}^2}{E_2} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} N_{11} N_{22} + \frac{N_{12}^2 + N_{21}^2}{2G_{12}} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{N_{11}^2}{E_1} + \frac{N_{22}^2}{E_2} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} N_{11} N_{22} + \frac{N_{12}^2}{G_{12}} \right] \end{aligned}$$

et B est le double de l'énergie complémentaire locale associée au comportement normal :

$$B = \frac{1}{h} \left[\frac{Q_1^2}{G_{12}} + \frac{Q_2^2}{G_{22}} \right]$$

et C est le terme de coût local :

$$C = k\alpha$$

Minimisation locale par rapport à l'orientation à proportion de fibres fixée :

La dérivée de la grandeur locale à minimiser g par rapport à l'orientation θ se met sous la forme :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = A_0 \sin(2\theta) + B_0 \cos(2\theta) + C_0 \sin(4\theta) + D_0 \cos(4\theta)$$

où A_0 et B_0 sont fonctions de N, Q et des coefficients matériau homogénéisés, et C_0 et D_0 sont fonctions de N et des coefficients matériau homogénéisés.

Par mise au carré, l'équation $\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$ se met sous la forme d'un polynôme du quatrième degré en $\sin(2\theta)$ ou $\cos(2\theta)$, et les solutions analytique explicites d'un tel polynôme existent. Numériquement, il convient donc de les calculer puis de les trier pour déterminer le minimum global de g .

Minimisation locale par rapport à la proportion de fibres à orientation fixée :

On se place dans le repère des fibres. Le double de l'énergie complémentaire locale associée au comportement tangentiel A se met sous la forme [62] :

$$A = \frac{A_1 + B_1\alpha + C_1\alpha^2}{h(\alpha E_{f1} + (1 - \alpha)E_m)}$$

où les paramètres A_1 , B_1 et C_1 sont fonctions de N et des coefficients matériau des fibres et de la matrice.

On peut, compte tenu de (3.4), écrire le double de l'énergie complémentaire locale associée au comportement normal B sous la forme :

$$B = \frac{1}{h} [A_2 + B_2\alpha]$$

où les paramètres A_2 et B_2 sont fonctions de Q et des coefficients matériau des fibres et de

la matrice.

Le grandeur locale à minimiser g se met alors sous la forme :

$$g = A + B + C = \frac{1}{h} \left[A_2 + \frac{A_1 + B_1\alpha + C_1\alpha^2}{\alpha E_{f1} + (1 - \alpha)E_m} \right] + k'\alpha$$

avec $k' = k + \frac{B_2}{h}$.

L'expression de $\partial g / \partial \alpha$ est alors de la même forme que celle trouvée dans le cas d'une membrane en élasticité plane. Le paramètre k' est désormais un paramètre non-constant sur S car il dépend des efforts normaux. La résolution de $\min_{\alpha} g$ est alors explicite [62].

3.4 Exemples numériques. Cas d'un volet de gouverne d'Airbus (collaboration LM2S / AIRBUS / ONERA)

Nous présentons dans cette section les résultats numériques de l'optimisation de structures tridimensionnelles académiques renforcées par des membranes monocouches composites à fibres longues curvilignes de proportion variable avant de traiter plus en détail l'exemple industriel d'un volet de gouverne d'AIRBUS.

3.4.1 Exemple d'un milieu tridimensionnel avec un renfort interne

Considérons l'exemple déjà introduit dans la section 2.5.3 rappelé dans la figure 3.1. La loi de comportement homogénéisée du renfort est celle présentée dans la section 3.3.1 et nous utilisons les valeurs numériques associées à des fibres de kevlar et une matrice epoxyde qui sont définies dans la même section.

Le paramètre k du terme de coût est choisi égal à $0.1 SI$. La proportion de fibres est autorisée à varier entre 0 et 0.6. L'épaisseur du renfort vaut $h = 0.01m$. Le milieu tridimensionnel est constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope de module d'Young $E = 100 MPa$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. L'orientation initiale des fibres est choisie suivant la longueur de la plaque de renfort (direction définie par l'axe Y). La proportion initiale de fibres est choisie égale à 0.412, ce qui correspond à un coût initial et final (c'est-à-dire dans l'état optimisé) identiques. Cet état initial correspond aux valeurs des coefficients du matériau orthotrope utilisés dans la section 2.5.3.

Les déformées du milieu tridimensionnel et du renfort pour la répartition optimale de fibres sont présentées dans la figure 3.2. Les répartitions initiale et optimale de fibres sont représentées dans la figure 3.3. Pour un coût total identique, le critère global diminue de 38% et la compliance diminue de 41%. Dans le même temps, le déplacement tridimensionnel maximal qui est localisé dans cet exemple aux mêmes points de la structure pour les états initial et optimal dans les coins non-encastés de la face chargée, passe de $4.7E - 02 m$ à $3.0E - 02 m$, soit une diminution de 36%. L'utilisation d'un critère de rigidité global sur la

structure aboutit donc dans ce cas à une diminution du déplacement tridimensionnel maximal du même ordre de grandeur que celle de la compliance.

Le renfort interne ne se déformant que dans son plan de part la symétrie du problème considéré, seule la rigidité dans le plan de la membrane est sollicitée. En faisant l'hypothèse d'un état de contraintes bidimensionnel au sein du renfort, on approxime ces contraintes par :

$$\sigma_{11} = \frac{N_{11}}{h} \quad \sigma_{22} = \frac{N_{22}}{h} \quad \sigma_{12} = \frac{N_{12}}{h}$$

En introduisant trois contraintes limites à rupture σ_{11}^R , σ_{22}^R et σ_{12}^R , le critère de Hill Tsai s'écrit en élasticité bidimensionnelle :

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^R}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{11}^R \sigma_{22}^R} + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^R}\right)^2 \leq 1$$

En utilisant la contrainte limite à rupture des fibres σ_f^R , la contrainte limite à rupture σ_{11}^R peut être approchée par la relation [15] :

$$\sigma_{11}^R = \sigma_f^R \left(\frac{\alpha E_{f1} + (1 - \alpha) E_m}{E_{f1}} \right)$$

Les contraintes limites à rupture σ_{22}^R et σ_{12}^R sont supposées indépendantes de la proportion de fibre [15]. Pour un mélange de fibres de kevlar et d'une matrice epoxyde, les valeurs numériques utilisées sont [15] :

$$\sigma_f^R = 2800 \text{ MPa} \quad \sigma_{22}^R = 60 \text{ MPa} \quad \sigma_{12}^R = 30 \text{ MPa}$$

Dans l'exemple numérique présenté, la contrainte de Hill Tsai maximale passe de 0.54 à 0.29 (voir figure 3.4). Cette diminution a deux causes principales :

- la diminution du critère énergétique global défini sur la structure s'accompagne d'une diminution de la valeur des déformations et des contraintes,
- dans le cas du comportement membranaire, l'orientation optimale des fibres avec la direction principale des contraintes associée à la contrainte principale maximale en valeur absolue correspond au minimum du critère de Hill Tsai par rapport à l'angle d'orientation local du matériau orthotrope.

En conclusion, la maximisation de la rigidité globale au moindre coût de la structure implique aussi une diminution du déplacement maximal tridimensionnel et de la contrainte de Hill Tsai au sein du renfort interne.

Remarque. *Le paramètre k intervenant dans le terme de coût, et considéré fixé lors de cette minimisation, pondère le coût global associé à l'introduction de fibres. Plus ce paramètre est petit, plus l'algorithme aura tendance à ajouter des fibres. Ce phénomène a cependant une limite, la proportion de fibres étant bornée : une fois que les régions fortement sollicitées auront atteint la proportion de fibres maximale, l'ajout de fibres dans les autres régions moins sollicitées n'influencera que très peu la compliance. Un compromis doit être trouvé.*

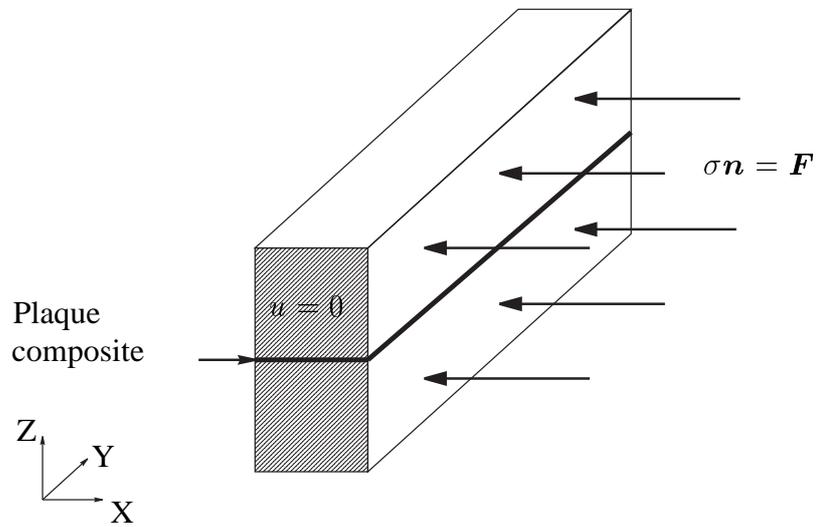


Figure 3.1 — Représentation schématique du milieu tridimensionnel renforcé par un panneau interne et des conditions aux limites considérées

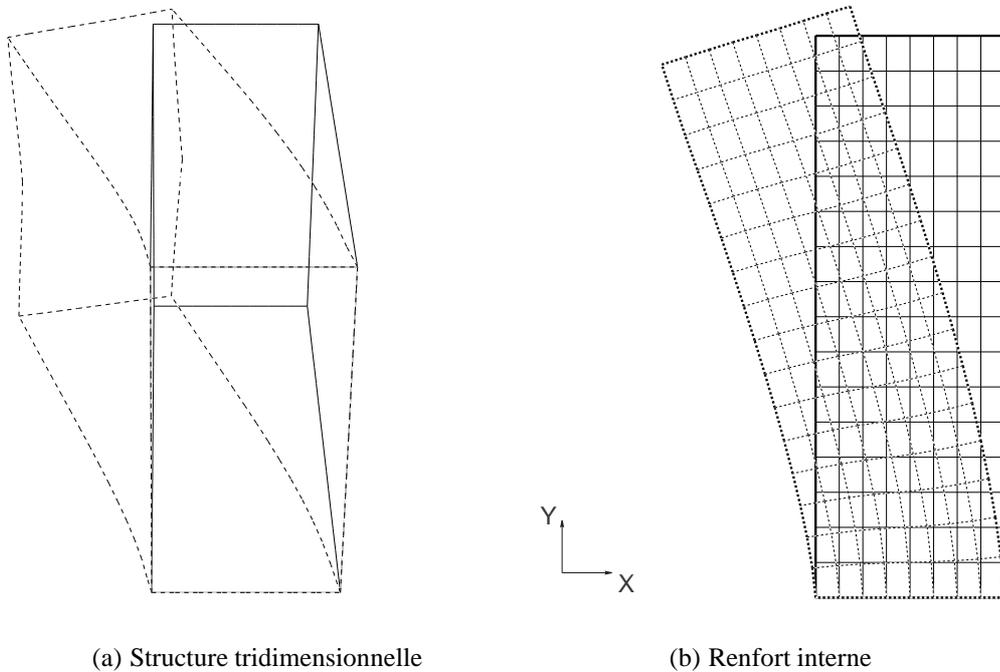


Figure 3.2 — Déformée du milieu tridimensionnel avec un renfort interne pour la répartition de fibres optimale

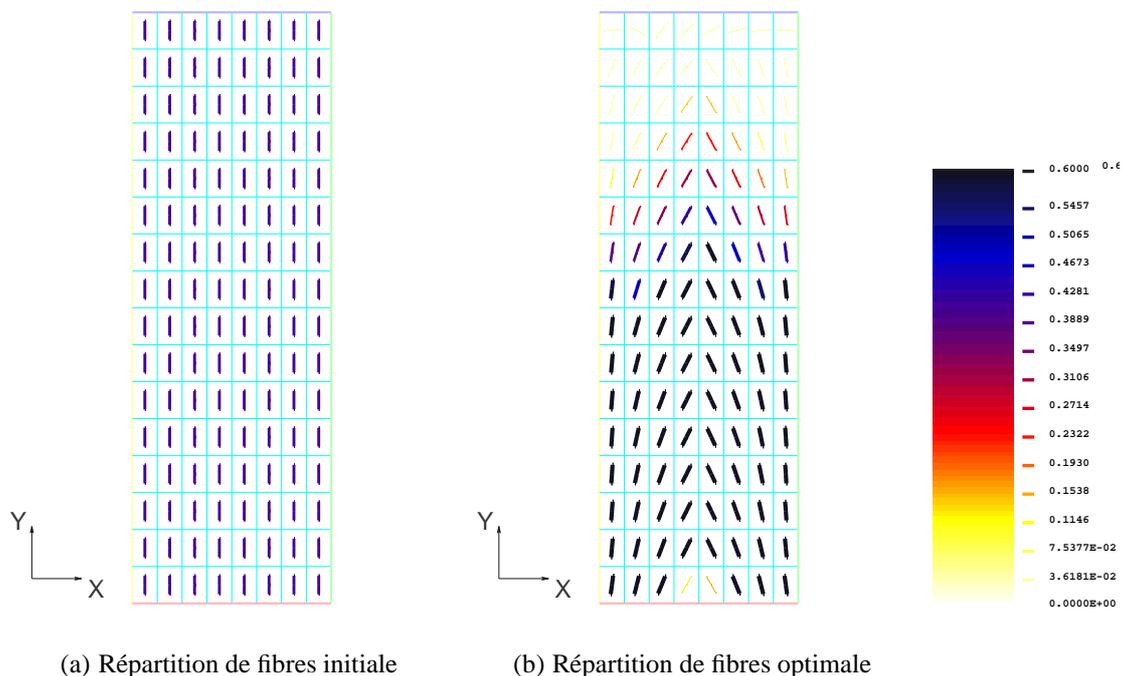


Figure 3.3 — Répartition de fibres dans le renfort interne du milieu tridimensionnel (l'échelle correspond à la proportion de fibre)

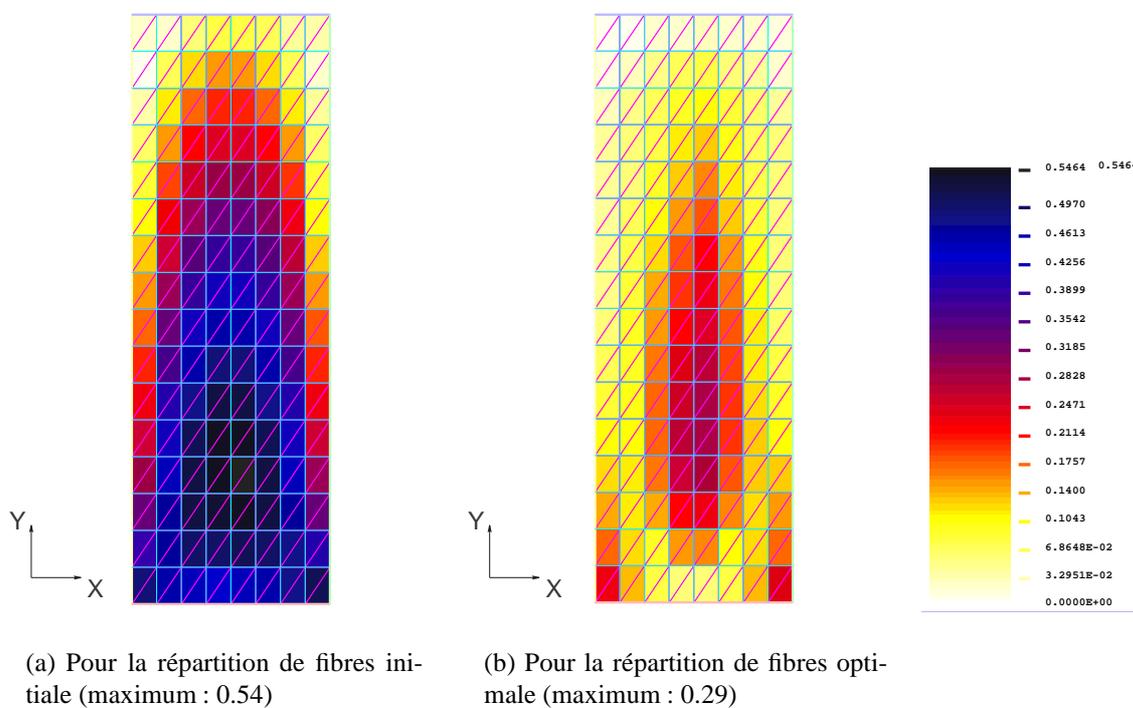


Figure 3.4 — Etat de contraintes (Hill Tsai) dans le renfort interne du milieu tridimensionnel (échelle identique pour les deux graphiques, le maximum de l'échelle correspond au maximum de la contrainte de Hill Tsai pour la répartition de fibres initiale)

Une première approche consiste à modifier ce paramètre k à chaque itération pour satisfaire à une contrainte sur la quantité de fibres totale (k est alors considéré comme un multiplicateur de Lagrange). Une telle approche est utilisée dans le cadre de l'optimisation topologique dans [1].

Une deuxième approche est liée au fait qu'il existe une méthode heuristique pour satisfaire indirectement, lors de la maximisation de la rigidité globale de la structure, à une contrainte de type critère de rupture. En effet, à partir d'un état optimisé obtenu pour une certaine valeur du paramètre k du terme de coût, la diminution de la valeur de ce paramètre entraîne une augmentation globale de la quantité de fibres et généralement une diminution de la contrainte de Hill Tsai maximale dans l'état optimisé au sein du renfort. Plusieurs optimisations successives peuvent alors permettre d'obtenir une distribution de fibres optimale pour laquelle la contrainte de Hill Tsai maximale est inférieure à une valeur donnée (0.9 par exemple).

3.4.2 Exemple d'un assemblage de plaques composites

Considérons maintenant un milieu tridimensionnel géométriquement identique à celui de la section précédente, renforcé par un panneau interne, mais aussi par cinq panneaux externes qui couvrent alors toute la frontière extérieure du milieu tridimensionnel (excepté la face sur laquelle sont imposées les conditions aux limites en déplacements). Cette structure est représentée sur la figure 3.5.

La loi de comportement homogénéisée du renfort est celle présentée dans la section 3.3.1 et nous utilisons les valeurs numériques associées à des fibres de kevlar et une matrice epoxyde qui sont définies dans la même section.

Le paramètre k du terme de coût est choisi égal à $0.08 SI$. La proportion de fibres est autorisée à varier entre 0 et 0.6. Tous les renforts sont supposés avoir la même épaisseur $h = 0.01 m$. Le milieu tridimensionnel est constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope de module d'Young $E = 10 MPa$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. L'orientation initiale des fibres est choisie suivant la longueur de la structure (direction de l'axe Y). Pour le renfort du bout (contenu dans un plan XZ), les fibres sont orientées suivant l'axe X . La proportion initiale de fibres est choisie constante dans tous les renforts et égale à 32%, ce qui correspond à l'égalité entre le coût initial et le coût final (c'est-à-dire pour la répartition optimale des fibres).

Les déformées du milieu tridimensionnel et du renfort interne pour la répartition optimale de fibres sont présentées dans la figure 3.6. Les répartitions optimales de fibres dans chaque renfort sont représentées dans la figure 3.7. Pour un coût total identique, le critère global diminue de 56% et la compliance diminue de 62%. Dans le même temps, le déplacement tridimensionnel maximal passe de $3.3E - 02$ à $1.5E - 02$, soit une diminution de 55%. L'utilisation d'un critère de rigidité global sur la structure aboutit encore dans ce cas à une diminution du déplacement tridimensionnel maximal du même ordre de grandeur que celle de la compliance.

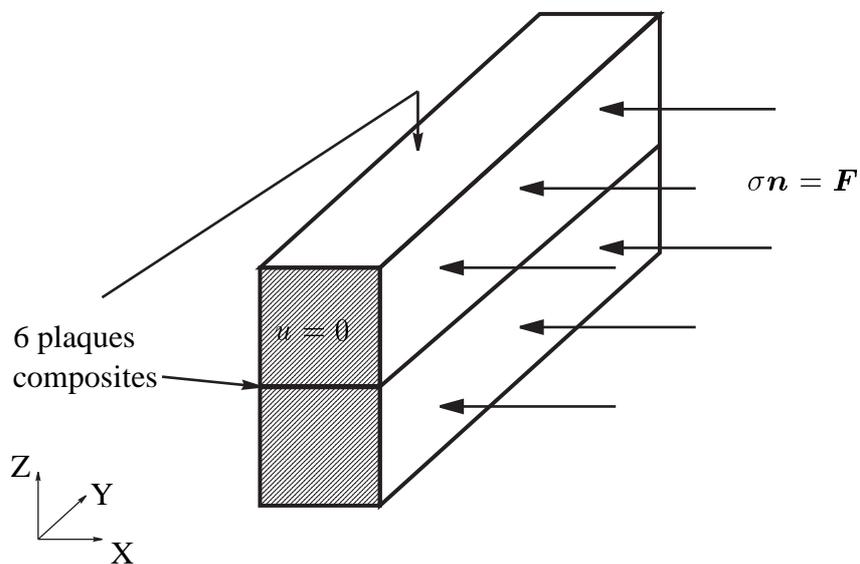


Figure 3.5 — Représentation schématique du milieu tridimensionnel renforcé par un panneau interne et cinq panneaux externes

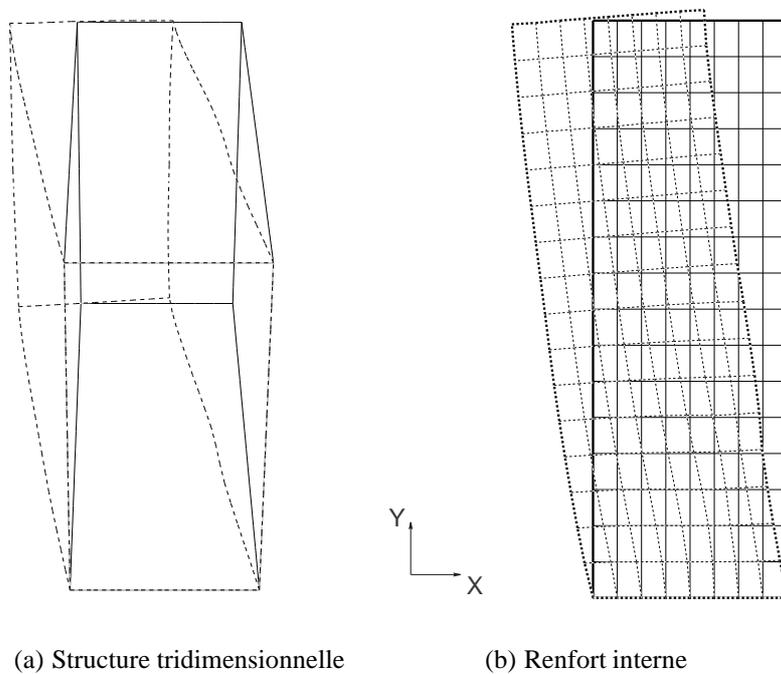


Figure 3.6 — Déformée du milieu tridimensionnel entièrement renforcé pour la répartition de fibres optimale

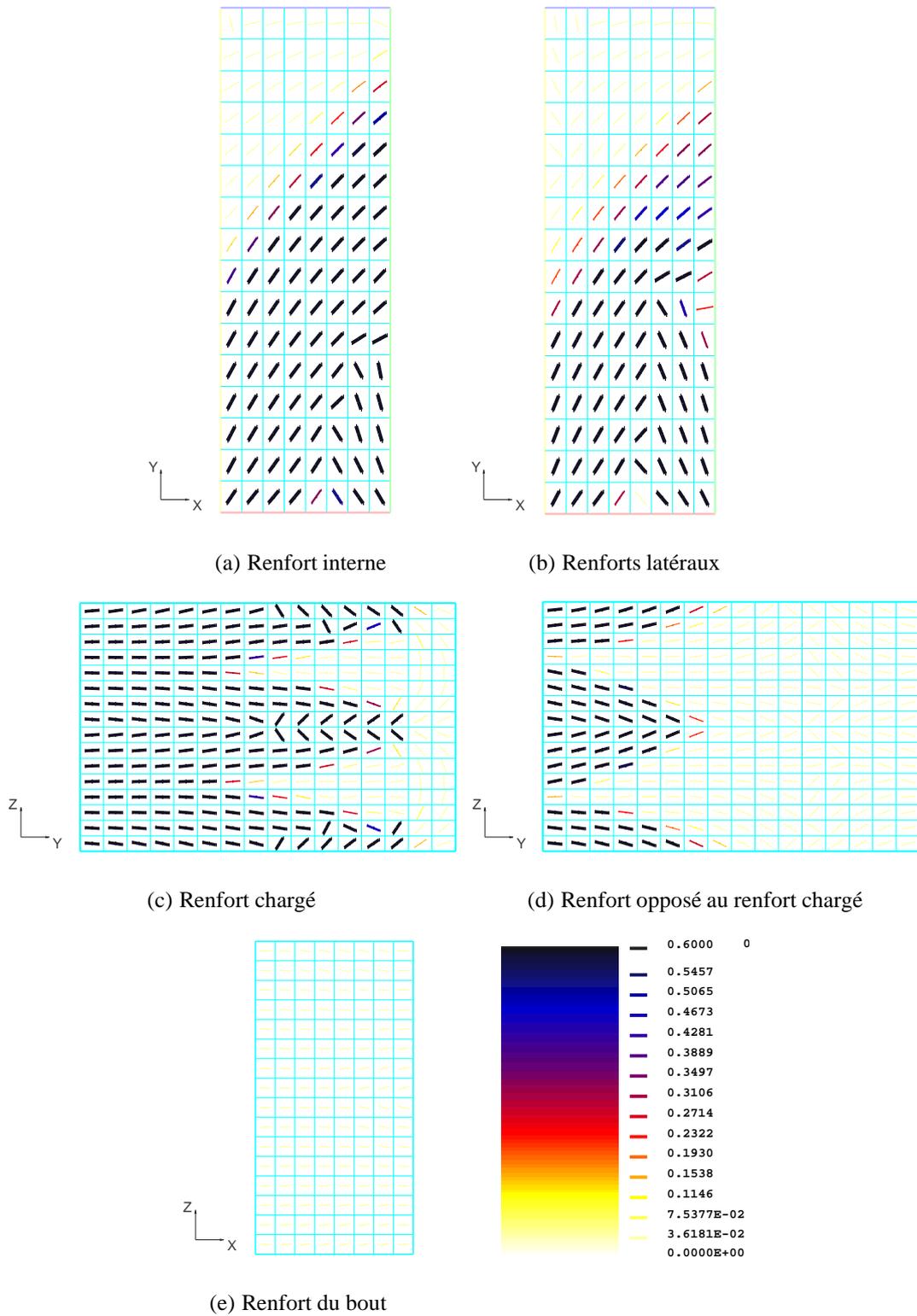


Figure 3.7 — Répartition de fibres optimale dans les différents renforts du milieu tridimensionnel entièrement renforcé

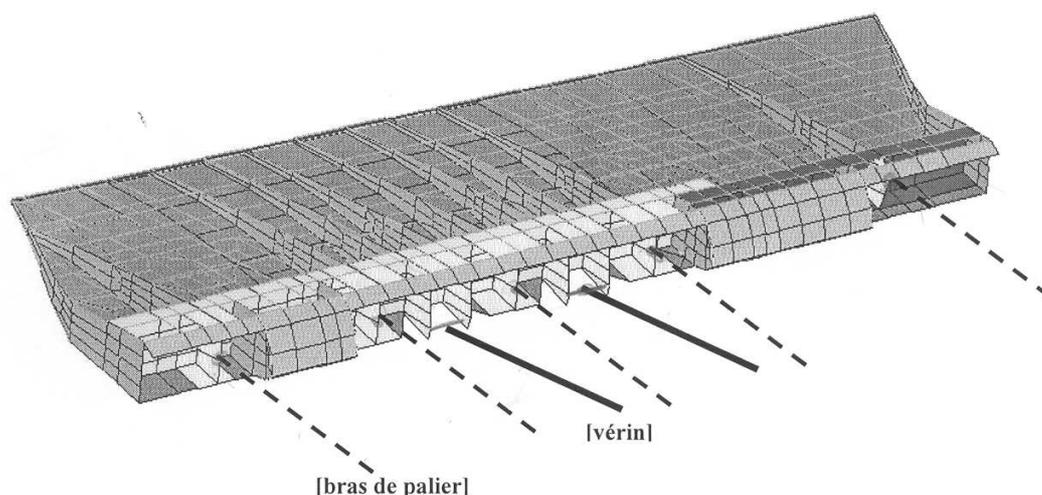


Figure 3.8 — Modèle éléments finis d'un aileron de gouverne d'Airbus (graphique autorisé à reproduction par Airbus)

3.4.3 Exemple d'un volet de gouverne d'Airbus

Après ces exemples académiques, nous considérons le cas de l'optimisation de l'aileron de gouverne d'Airbus dont un modèle éléments finis est présenté dans la figure 3.8 (autorisation Airbus).

Ce volet de gouverne est un assemblage de plaques en matériau composite. Il est constituée de deux panneaux composites, l'extrados et l'intrados, et de nombreux panneaux composites internes. Au bord de fuite, une liaison encastrement est réalisée par rivetage et au bord d'attaque un système complexe de conditions aux limites est réalisé par un ensemble de longerons en matériaux métalliques.

Dans la pratique, les plaques composites sont des stratifiés multicouches avec une zone interne en nid d'abeille. Dans l'optique de définir les topologies de solutions techniques dans la phase de préconception optimales au sens de la maximisation de la rigidité globale de la structure au moindre poids, nous allons à nouveau considérer des plaques monocouches à fibres longues curvilignes de proportion variable. Ce choix permet en effet de conclure sur plusieurs aspects techniques. Tout d'abord, aux endroits des plaques où la proportion optimale de fibres est très faible, voire nulle, il peut être considéré de créer des trous au sein de ces plaques. Ensuite, les zones les plus fortement sollicitées apparaissent clairement dans la répartition optimale des fibres, et l'orientation optimale de la rigidité locale du matériau composite constituant la pièce à concevoir est clairement définie par l'orientation des fibres optimale obtenue. Le passage de cette répartition optimale des fibres en terme d'orientation et de proportion des fibres au design optimal du matériau composite qui constituera la pièce à concevoir devient alors un problème de conception qui doit tenir compte des nombreux autres critères et paramètres que l'algorithme d'optimisation ne prend pas en compte.

On pourrait penser aussi faire une étude utilisant des paramètres d'optimisation distribués de type épaisseurs relatives des plis et épaisseur totale variable pour coller un peu plus au

type de réalisation réelle de ces panneaux. Néanmoins, le type d'information sur la topologie de la structure à considérer comme solution technique potentielle que l'on pourrait obtenir à partir de ce paramétrage restera limité par le petit nombre de critères et de paramètres qui sont pris en compte dans cette optimisation. De plus les zones les plus sollicitées (avec les orientations optimales du matériau composite considéré) apparaîtraient de manière similaire et les informations tirées de ce type de calcul seraient du même type que celle obtenue en considérant l'orientation et la proportion des fibres comme paramètres.

Dans la structure considérée, une sous-structure a attiré l'attention des ingénieurs d'Airbus en terme de conception optimale : les renforts internes de ces volets de gouverne. L'objectif des exemples numériques suivants est de déterminer la répartition optimale de fibres de proportion variable au sein d'une nervure interne. La problématique de modélisation est alors la suivante : quelle sous-structure de l'aileron incluant la nervure étudiée est représentative du chargement appliqué à cette nervure ? Ce chargement dépend bien évidemment du chargement extérieur en efforts et en déplacements imposé appliqué au volet de gouverne, mais aussi de la déformée de la structure complète aux frontières de la sous-structure à définir.

Des nombreux cas de charges applicables au volet de gouverne, nous considérons le plus simple lié au chargement aérodynamique qui sera modélisé par une répartition d'un champ de pression sur la face supérieure du volet, l'extrados. Pour ne tenir compte que des portions de volet en matériau composite, nous supposons que les renforts internes sont liés à des longerons (qui sont eux-mêmes reliés à l'aile) indéformables. Ces longerons constituent alors le bâti.

Le modèle le plus simple que l'on peut considérer consiste alors en une modélisation bidimensionnelle du renfort interne, sous l'hypothèse que le chargement de pression sur le volet de gouverne induise une déformée plane de ce renfort. Cette modélisation aboutit alors à un problème de référence bidimensionnel, et nous nous plaçons sous l'hypothèse des contraintes planes. Ce type d'approche déjà présentée dans [62], est tout d'abord utilisée en considérant une géométrie réaliste d'une nervure interne. Pour prendre en compte les effets structuraux du volet de gouverne, il est ensuite considéré une sous-structure du volet de gouverne qui tient compte d'une partie d'extrados (face supérieure chargée aérodynamiquement) et d'une partie d'intrados. Cette étude mettra en évidence l'influence des effets structuraux sur le design optimal et une topologie de solution technique de renfort interne intéressante pour Airbus.

Cas d'un modèle membranaire bidimensionnel

On se place dans le cadre de l'élasticité bidimensionnelle sous l'hypothèse des contraintes planes. La loi de comportement homogénéisée de la nervure utilisée est la partie plane de la loi de comportement présentée dans la section 3.3.1. Nous utilisons les valeurs numériques associées à des fibres de kevlar et à une matrice epoxyde qui sont définies dans la même section. La description schématique de la nervure et des conditions aux limites qui lui sont appliquées sont représentées dans la figure 3.9. Le chargement de pression sur le bord supérieur

est linéairement décroissant et est deux fois plus important au bord d'attaque qu'au bord de fuite. Les déplacements de 6 points internes du maillage sont imposés nuls (ces points sont schématiquement indiqués par les croix).

Le paramètre k du terme de coût est choisi égal à $0.01SI$. La proportion de fibres est autorisée à varier entre 0 et 0.6. L'orientation initiale des fibres est choisie suivant la direction X . La proportion initiale de fibres est choisie égale à 0.32, ce qui correspond à un coût initial et final (c'est-à-dire dans l'état optimisé) identiques.

La déformée optimale de la nervure est présentée dans la figure 3.10 et la répartition optimale de fibres dans la figure 3.11. Pour un coût total identique dans l'état initial et dans l'état optimal, le critère global diminue de 48% et la compliance de 58%. Dans le même temps, le déplacement maximal qui est localisé au même point de la structure pour l'état initial et l'état optimal, diminue de 52%. L'utilisation d'un critère basé sur la rigidité globale de la structure aboutit donc dans ce cas à une diminution du déplacement maximal du même ordre de grandeur que celle de la compliance. La répartition optimale de fibres donne plusieurs indices sur la topologie de la nervure à concevoir :

1. Il est nécessaire d'avoir un renforcement longitudinal le long de l'extrados et de l'intrados.
2. La partie d'attache est fortement sollicitée, et notamment en cisaillement à mi-distance de l'extrados et de l'intrados.
3. Dans une optique de diminution du poids, il serait intéressant de considérer une nervure interne avec un trou dans la zone non-fibrée car cette zone ne participe pas à la rigidité globale de la nervure.

Cas d'une sous-structure à trois nervures

Pour tenir compte des effets structuraux sur le design optimal de la nervure interne, nous considérons une sous-structure constituée de trois nervures. La description schématique de cette sous-structure du volet de gouverne et des conditions aux limites qui lui sont appliquées est présentée dans la figure 3.12. Cet assemblage de plaques composites est constitué de 5 plaques composites (3 nervures, l'extrados et l'intrados). Au bord de fuite, un milieu tridimensionnel rigide modélise la liaison encastrement assurée par rivetage sur la structure réelle entre l'extrados, l'intrados et les nervures aux endroits où elles sont présentes. Le chargement de pression sur l'extrados (face supérieure) est constant suivant la direction Y et linéairement décroissant suivant la direction X . La valeur de la pression est prise deux fois plus grande sur le bord d'attaque que sur le bord de fuite. Les 3 nervures sont supposées encastrees sur un bâti rigide en 6 points par nervure où les déplacements sont imposés nuls (ces points sont représentés par des croix dans le schéma).

La loi de comportement homogénéisée dans les renforts est celle présentée dans la section 3.3.1 dans le cadre de la modélisation par des membranes avec effort normal. Nous considérons des fibres de kevlar et une matrice epoxyde dont les paramètres matériau sont définis dans la même section.

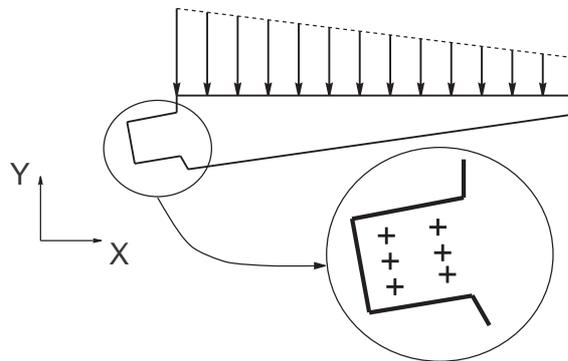


Figure 3.9 — Représentation schématique d'une nervure interne d'aileron modélisé dans le cadre de l'élasticité bidimensionnelle

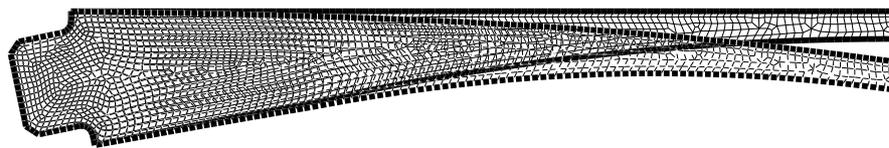


Figure 3.10 — Déformée de la nervure pour la répartition de fibres optimale (Modèle 2D)

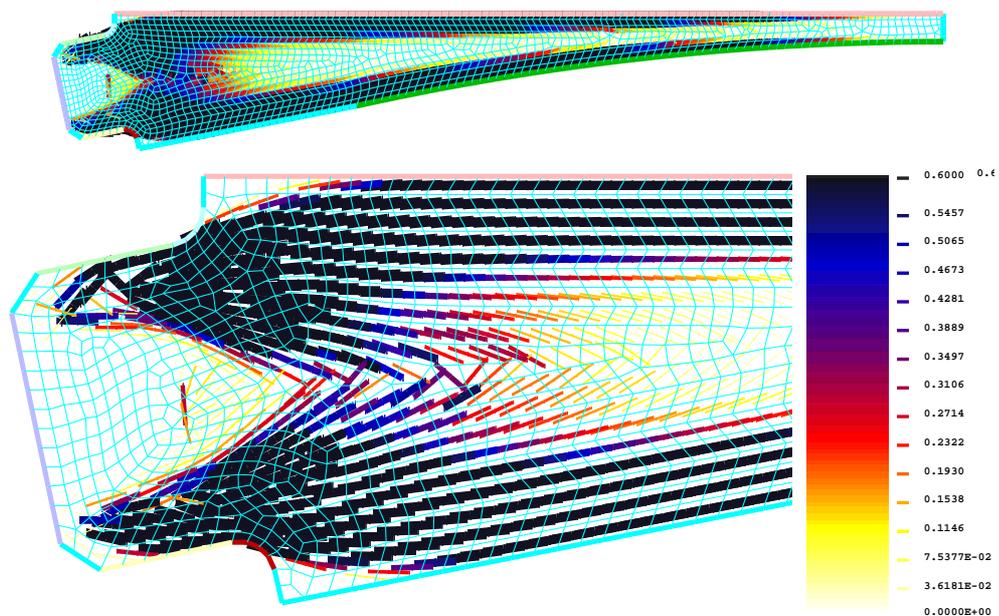


Figure 3.11 — Répartition de fibres optimale pour le modèle bidimensionnel de la nervure (l'échelle correspond à la proportion de fibres)

Le paramètre k du terme de coût est choisi égal à $0.02SI$. La proportion de fibres est autorisée à varier entre 0 et 0.6. Tous les renforts sont supposés avoir la même épaisseur $h = 0.01m$. Le milieu tridimensionnel est constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope de module d'Young $E = 10 MPa$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. L'orientation initiale des fibres est choisie suivant la direction X dans tous les renforts. La proportion initiale de fibres est choisie constante dans tous les renforts et égale à 55%, ce qui correspond à l'égalité entre le coût initial et le coût final (c'est-à-dire pour la répartition optimale des fibres).

Les déformées optimales de cette sous-structure du volet de gouverne et du renfort interne sont présentées dans la figure 3.13. Pour un coût total identique à l'état initial et à l'état optimal, le critère global diminue de 19% et la compliance de 20%. Cette diminution de compliance est plus précisément le résultat de la diminution de 15% du double de l'énergie complémentaire associée aux membranes et de 45% de celle associée aux milieux tridimensionnels (remplissage et longeron du bord de fuite). Dans le même temps, le déplacement maximal tridimensionnel qui est localisé au même point de la structure pour l'état initial et l'état final, diminue de 17%. L'utilisation d'un critère basé sur la rigidité globale de la structure aboutit donc dans ce cas à une diminution du déplacement tridimensionnel maximal du même ordre de grandeur que celle de la compliance.

La répartition optimale de fibres dans le renfort interne est présentée dans la figure 3.14. Elle montre clairement la nécessité de renfort au niveau du bord encasté. L'orientation à $\pm 45^\circ$ des fibres à mi-distance de l'extrados et de l'intrados fait ressortir la sollicitation en cisaillement dans cette zone. La répartition longitudinale des fibres le long de l'extrados et de l'intrados est encore présente et fait ressortir la nécessité de renforcement longitudinal dans ces zones. La zone non-fibrée, qui s'interprète dans le cadre de la conception de la nervure comme la possibilité de la création d'un trou, est cette fois-ci moins étendue que dans le cas du modèle bidimensionnel, et plus proche du bord de fuite. Les fibres en forte proportion et orientées à 45° font ressortir la nécessité de renfort dans cette zone du bord de fuite liée à la présence du longeron tridimensionnel qui modélise la liaison encastrement présente dans le volet de gouverne réel. La répartition optimale des fibres dans les renforts latéraux présentée dans la figure 3.15 est très proche de celle de renfort interne. On perçoit juste un renforcement supplémentaire dans la zone centrale où les fibres sont orientées à 45° . Il est dû aux efforts normaux dans ces renforts latéraux qui ne sont pas présents dans le renfort interne de par la symétrie du problème (géométrie et chargement). Les répartitions de fibres dans l'extrados et l'intrados sont présentées dans les figures 3.16 et 3.17. Elles sont très voisines et possèdent deux fortes caractéristiques :

- les fibres sont orientées de manière rectiligne dans le sens bord d'attaque/bord de fuite.
- La proportion de fibres est maximale dans l'ensemble de ces deux renforts.

Ces résultats montrent que l'extrados et l'intrados sont des panneaux composites très sollicités dans leur ensemble, contrairement aux renforts internes pour lesquels l'introduction de trous est concevable. La raison de ceci est la prépondérance de l'effort normal dans l'état de contraintes local dans l'ensemble de l'extrados et de l'intrados, alors que l'état de contraintes dans les nervures est principalement plan.

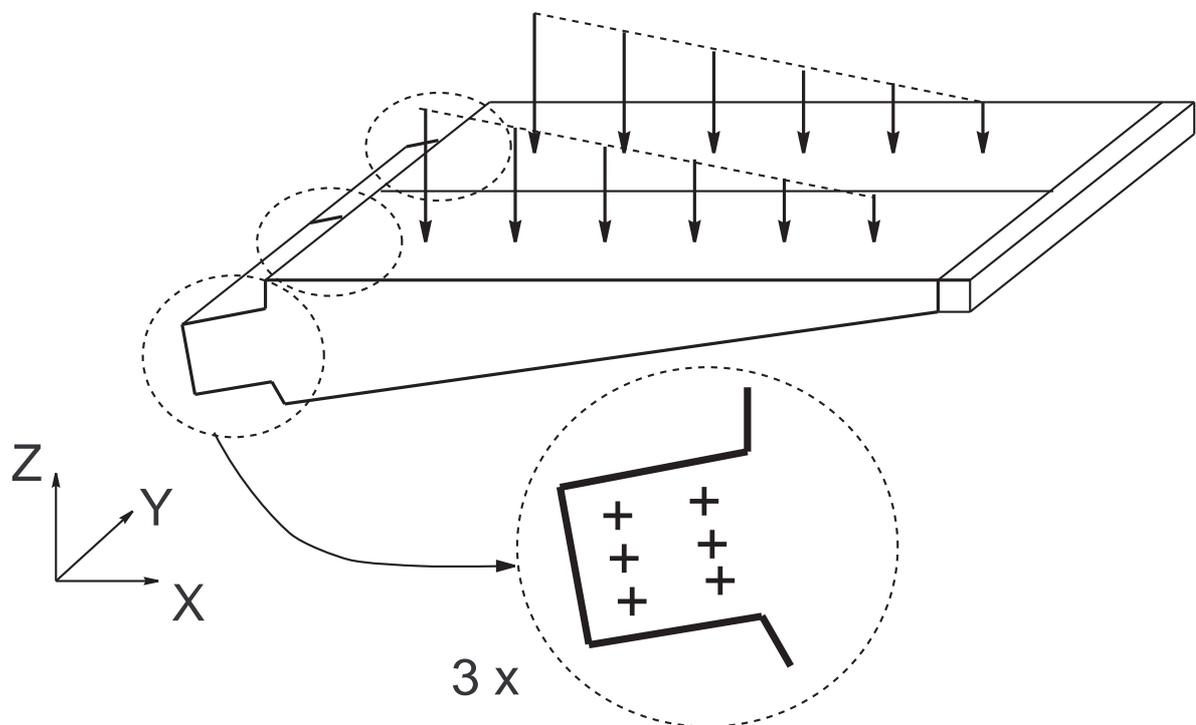
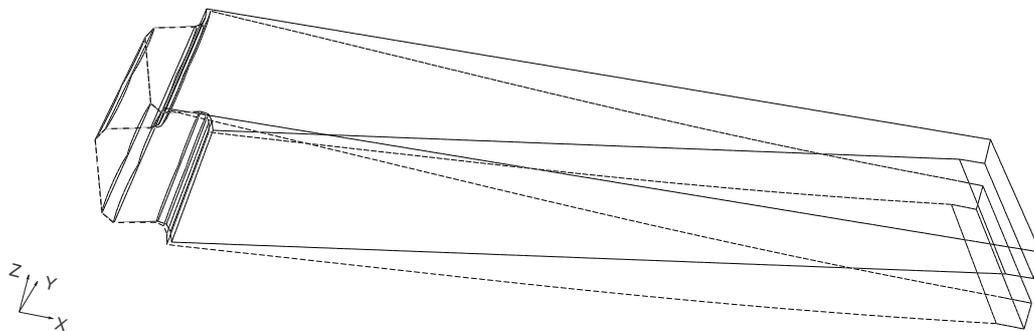
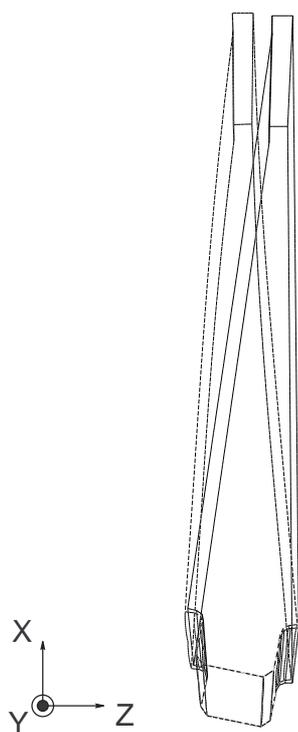


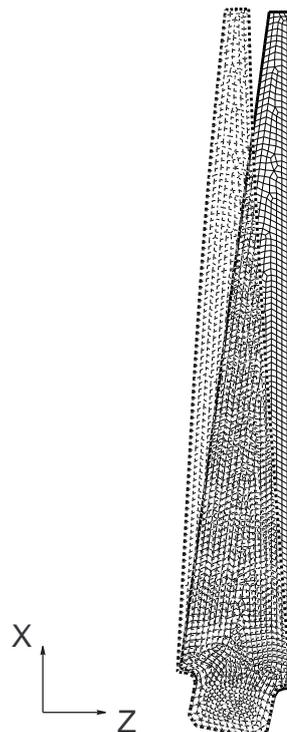
Figure 3.12 — Représentation schématique d'une sous-structure d'aileron tridimensionnelle avec un renfort interne (nervure) et 4 renforts externes (2 nervures latérales, extrados, intrados)



(a) Déformée de la sous-structure tridimensionnelle



(b) Autre vue de la déformée de la sous-structure tridimensionnelle



(c) Déformée de la nervure interne

Figure 3.13 — Déformée de la sous-structure tridimensionnelle d'aileron pour la répartition de fibres optimale

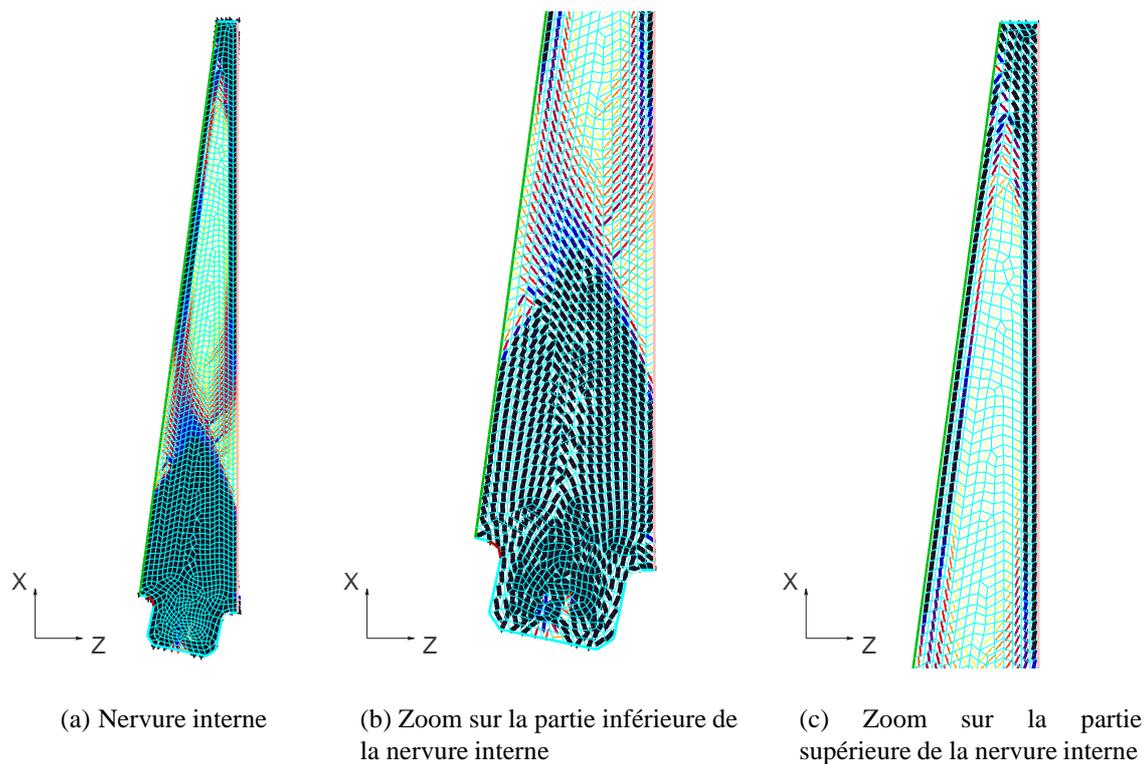


Figure 3.14 — Répartition de fibres optimale dans le renfort interne de la sous-structure d'aile

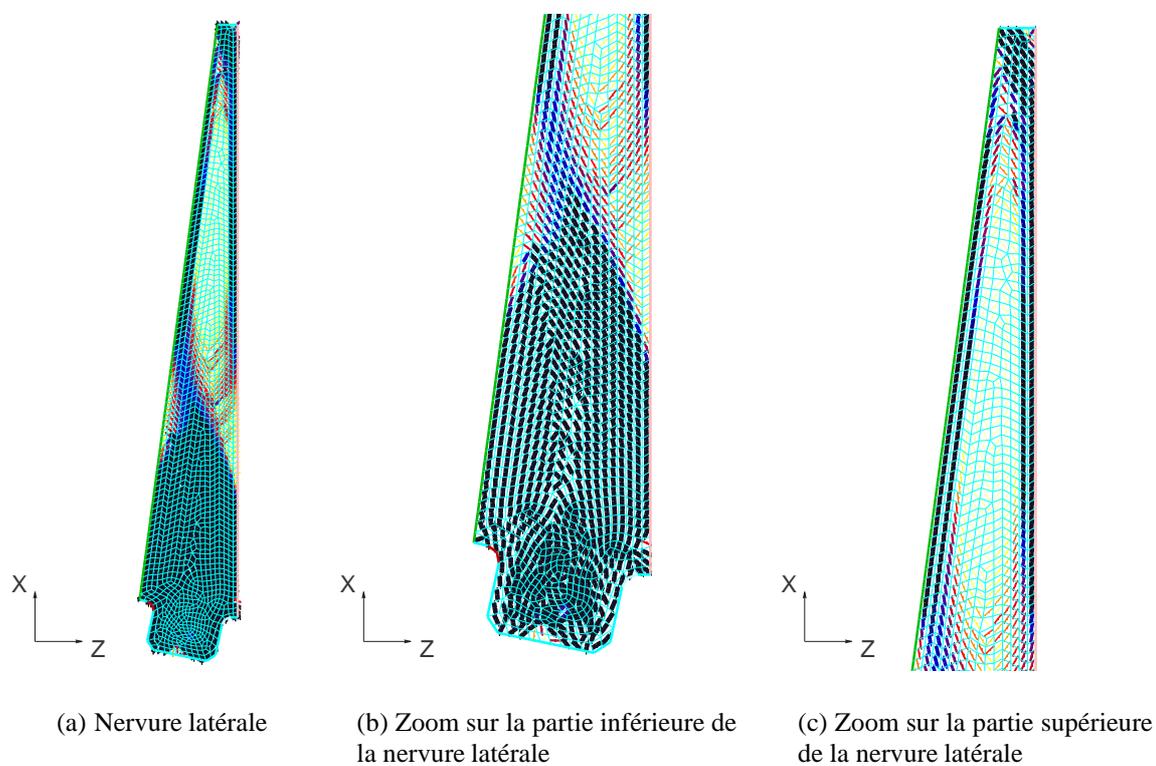


Figure 3.15 — Répartition de fibres optimale dans le renfort latéral de la sous-structure d'aile



Figure 3.16 — Répartition de fibres optimale dans l'extrados (renfort chargé)

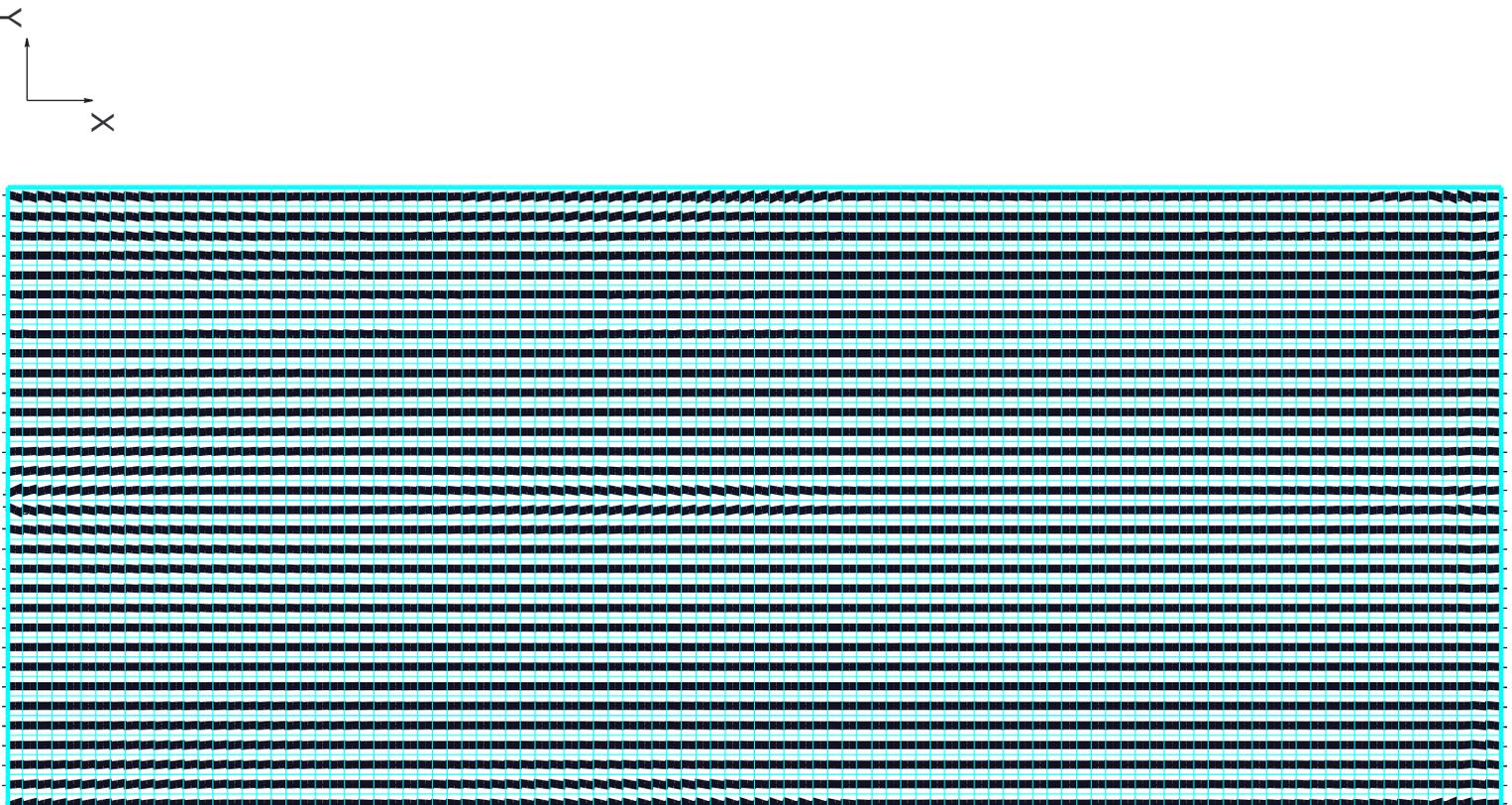


Figure 3.17 — Répartition de fibres optimale dans l'intrados (renfort inférieur)

3.5 Optimisation de la position des renforts

3.5.1 Complémentarité avec l'optimisation à paramètres distribués

Dans la section précédente, une sous-structure d'un aileron de gouverne d'Airbus a été modélisée par un milieu tridimensionnel élastique de faible rigidité renforcé par des plaques internes et externes, et optimisée vis-à-vis du comportement local des panneaux composites à fibres longues en utilisant des paramètres d'optimisation caractérisant des fibres longues curvilignes de proportion variable. Cela a permis de déterminer des topologies de conception optimales pour les renforts internes de cet aileron.

Si l'on considère l'aileron de gouverne dans son ensemble, cette démarche est toujours applicable mais d'autres problématiques de conception apparaissent. Notamment, le nombre ou la position de ces renforts internes vis-à-vis des zones d'attache, et la position même de ces zones d'attache représentent un problème d'optimisation géométrique crucial en terme de rigidité et de poids.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons au problème de l'optimisation de la position des renforts internes et des zones d'attache. En supposant que les lois de comportement du milieu 3D et des renforts sont connues fixées, le modèle d'assemblage de plaques développé au chapitre 2 s'avère être un outil adapté à ce type de problème.

3.5.2 Algorithme d'optimisation

Nous nous intéressons à l'optimisation d'une structure en fonction de paramètres géométriques scalaires, notés x_i , supposés bornés : $x_i \in [x_i^-; x_i^+]$. Le terme de coût est supposé être indépendant des paramètres géométriques. Le critère $G(x_i)$ à minimiser se résume donc à la compliance. On suppose que les contraintes sur les paramètres x_i sont linéaires. Le problème d'optimisation s'écrit alors :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS & (\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T) \\ g_j : a_{ji}x_i - b_j \geq 0 & (j = 1, \dots, r) \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème nous utiliserons un algorithme de programmation mathématique classique : la méthode du gradient projeté (voir par exemple [39][36]). Cette méthode, cas particulier des algorithmes dits "de descente", consiste à générer une suite $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ telle que $G(\mathbf{x}^{(k+1)}) < G(\mathbf{x}^{(k)})$ en définissant $\mathbf{x}^{(k+1)}$ sous la forme :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d} \quad (3.5)$$

où \mathbf{d} est une direction de descente admissible. Pour être une direction de descente, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $G(\mathbf{x}^{(k+1)}) < G(\mathbf{x}^{(k)})$, la direction \mathbf{d} doit satisfaire la

condition :

$$\nabla G(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} < 0$$

Pour être admissible, c'est-à-dire que le déplacement suivant cette direction ne viole pas les p contraintes actives dès que $\alpha > 0$, la direction \mathbf{d} doit satisfaire les conditions :

$$\nabla g_j(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} \geq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, p$$

Introduisons la matrice N dont les colonnes sont les vecteurs $\nabla g_j(\mathbf{x}^{(k)})$ des contraintes actives, c'est-à-dire des contraintes telles que $g_j(\mathbf{x}^{(k)})=0$. On suppose que ces vecteurs sont linéairement indépendants.

La démarche suivie par l'algorithme consiste, à chaque itération, à projeter le déplacement sur la frontière du domaine définie par le jeu des contraintes actives en utilisant la direction de plus grande pente possible. A l'itération k , $\mathbf{x}^{(k+1)}$ est cherché sous la forme (3.5). On cherche donc une direction de descente qui vérifie $N^T \mathbf{d} = 0$, c'est-à-dire qui vérifie $\nabla g_j(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} = 0$ pour toutes les contraintes actives. Pour l'obtenir de plus forte pente possible, on peut alors la choisir comme solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{d}} \nabla G(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} \\ N^T \mathbf{d} = 0 \\ \mathbf{d}^T \mathbf{d} = 1 \end{cases}$$

La solution de ce problème est $\mathbf{d} = \frac{\bar{\mathbf{y}}}{\|\bar{\mathbf{y}}\|}$ où $\bar{\mathbf{y}}$ s'écrit :

$$\bar{\mathbf{y}} = -P \nabla G(\mathbf{x}^{(k)}) = -(1_{n*n} - N[N^T N]^{-1} N^T) \nabla G(\mathbf{x}^{(k)})$$

La convergence de l'algorithme est détectée lorsque les conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn Tucker sont vérifiées. Ces conditions s'écrivent sous la forme : toutes les composantes du vecteur $\boldsymbol{\lambda} = [N^T N]^{-1} N^T \nabla G(\mathbf{x}^{(k)})$ sont positives ou nulles. Une condition nécessaire à la vérification de ces conditions est que la direction de recherche admissible $-P \nabla G(\mathbf{x}^{(k)})$ soit nulle.

L'algorithme du gradient projeté s'écrit :

1. Choisir $\mathbf{x}^{(0)}$
2. Etape k :
 Déterminer les contraintes actives $g_j^{(k)}$ ($j = 1, \dots, p$) associées à $\mathbf{x}^{(k)}$.
 Déterminer N .
3. Déterminer $P = 1_{n*n} - N[N^T N]^{-1} N^T$
 Déterminer $\mathbf{s}^{(k)} = -P \nabla G(\mathbf{x}^{(k)})$
4. Si $\mathbf{s}^{(k)} \neq 0$:
 Déterminer α_{max} , valeur de α qui active une nouvelle contrainte.
 Déterminer $\alpha^{(k)}$ qui vérifie : $\min_{\alpha \in [0; \alpha_{max}]} G(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{s}^{(k)})$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{s}^{(k)}$$

$k \leftarrow k + 1$, retourner en 2.

Si $\mathbf{s}^{(k)} = 0$:

Déterminer $\boldsymbol{\lambda} = [N^T N]^{-1} N^T \nabla G(\mathbf{x}^{(k)})$

Si $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, \dots, p] \rightarrow$ les conditions de Kuhn Tucker sont vérifiées. FIN.

Sinon : soit λ_i la composante la plus négative de $\boldsymbol{\lambda}$.

Enlever la i^{eme} colonne de N .

Retourner en 3.

Pour obtenir la valeur α_{max} à l'étape 4, on détermine les valeurs α_j^{max} qui activent les différentes contraintes non encore actives, ce qui s'écrit :

$$0 \leq \alpha_j \leq \alpha_j^{max} = \frac{a_{ji}x_i^{(k)} - b_j}{-a_{ji}s_i^{(k)}} \quad \text{si } a_{ji}s_i^{(k)} < 0$$

si $a_{ji}s_i^{(k)} > 0$, il n'y a pas de condition sur α associée à la contrainte j . α_{max} est alors défini par :

$$\alpha_{max} = \min(\alpha_j^{max})$$

Enfin, à l'étape 4, dans le cas où $\mathbf{s}^{(k)} = 0$ et où il existe au moins une composante du vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ strictement négative, il est possible de montrer que la nouvelle direction $-P\nabla G(\mathbf{x}^{(k)})$, calculée avec la nouvelle matrice N obtenue par la suppression de la colonne associée à la valeur de λ_i la plus négative, est non nulle et est une direction de descente admissible.

3.6 Exemples numériques

3.6.1 Problématiques de conception

Dans la phase de conception de l'aile de gouverne d'Airbus choisi comme structure industrielle test, différentes problématiques de conception relatives à la position de renforts internes se posent. Elles sont liées aux types de conditions aux limites en déplacements imposés.

Cet aileron, dont un modèle élément fini est présenté dans la figure 3.8 (autorisation Airbus), est constitué de deux panneaux composites, l'extrados et l'intrados, et de nombreux panneaux composites internes. Au bord de fuite, une liaison encastrement est réalisée par rivetage. Au bord d'attaque, les renforts internes sont fixés sur des longerons en matériaux métalliques sur lesquels sont attachés deux vérins à deux endroits différents. Dans le cadre de la modélisation de l'aile, ces zones d'attache peuvent être vues comme des zones sur lesquelles sont imposés des déplacements connus. De plus, cinq zones d'attache de bras de palier impliquent cinq zones à déplacements imposés nuls sur les longerons.

Une première problématique de conception est définie en supposant que les positions des zones d'attache, sur lesquelles sont imposées les conditions aux limites en déplacements,

sont fixées par des considérations indépendantes à la conception de l'aileron de gouverne. Les positions optimales des renforts sont alors à déterminer à zones d'attache fixées.

Une deuxième problématique est définie en supposant cette fois-ci que les positions des zones d'attache peuvent aussi être modifiées, en plus de la position des renforts, lors de la conception de l'aileron de gouverne. Les positions optimales des renforts ainsi que des zones d'attache sont alors à déterminer.

Dans une troisième problématique, on cherche à déterminer l'influence sur les positions optimales des renforts internes des longerons métalliques sur lesquels sont fixés ces renforts.

Il est bien évident que les deux premières problématiques peuvent être à considérer simultanément, et qu'elles sont fortement liées à la troisième. Dans une première approche du problème, nous allons considérer successivement ces trois problématiques sur un exemple académique à deux renforts internes pour clairement mettre en évidence leur influence sur la conception optimale en terme de positions des renforts internes.

3.6.2 Description de la structure académique test

Pour modéliser un assemblage de plaques, on utilise à nouveau le modèle d'un milieu tridimensionnel de faible rigidité renforcé par des panneaux internes et externes décrit au chapitre 2. En utilisant cette modélisation, la structure académique test est présentée dans la figure 3.18. Elle est constituée d'un milieu tridimensionnel renforcé par 5 panneaux externes et 2 panneaux internes. Sur la face externe non renforcée, des conditions aux limites en déplacements de deux types seront appliquées (voir figure 3.19) :

- déplacements imposés à zéro sur toute la face (encastrement)
- déplacements imposés à zéro sur deux zones étroites de la face (zones d'attache)

Sur la face supérieure est appliquée un chargement surfacique orthogonal, soit constant, soit linéairement décroissant (voir figure 3.20).

Quatre cas sont donc envisageables :

- cas de l'encastrement avec chargement constant,
- cas de l'encastrement avec chargement variable,
- cas de zones d'attache avec chargement constant,
- cas de zones d'attache avec chargement variable.

3.6.3 Paramètres et contraintes d'optimisation

On s'intéresse à l'optimisation de la position des deux renforts internes de la structure académique test précédemment décrite. Les deux paramètres géométriques x_1 et x_2 choisis sont les distances de renforts internes à un des deux renforts latéraux (voir figure 3.21).

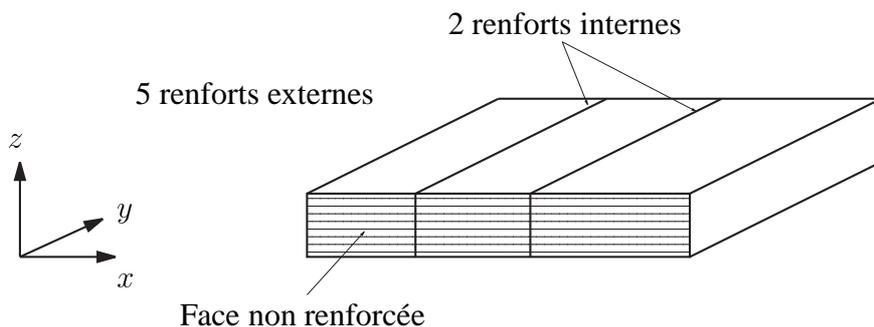


Figure 3.18 — Représentation schématique de la structure académique test

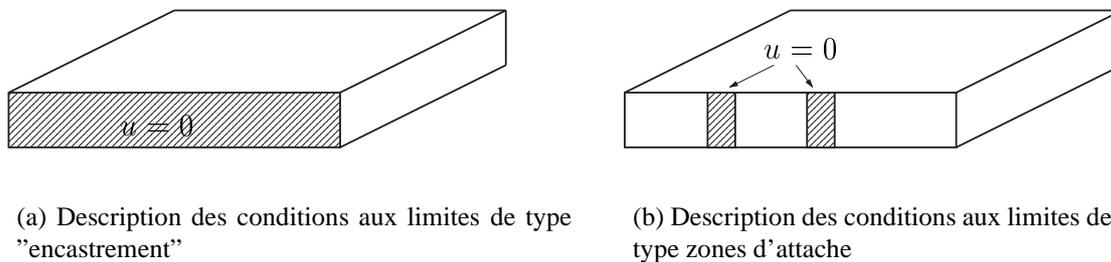


Figure 3.19 — Conditions aux limites en déplacements

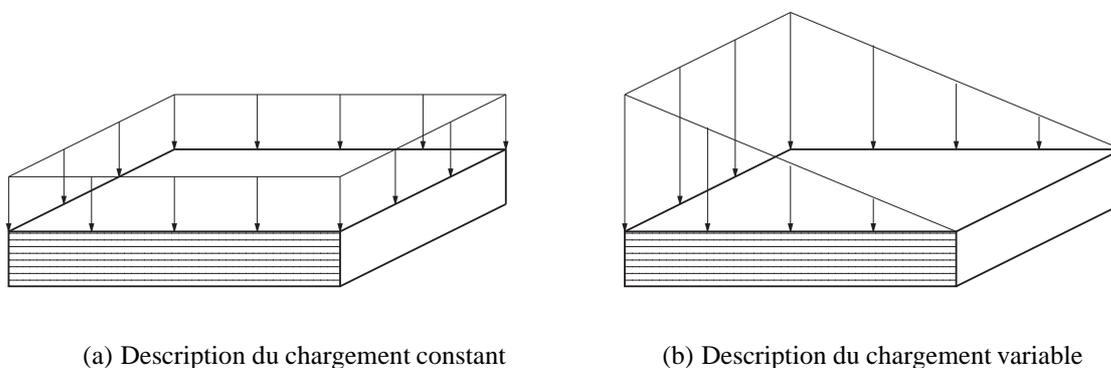


Figure 3.20 — Conditions aux limites en efforts

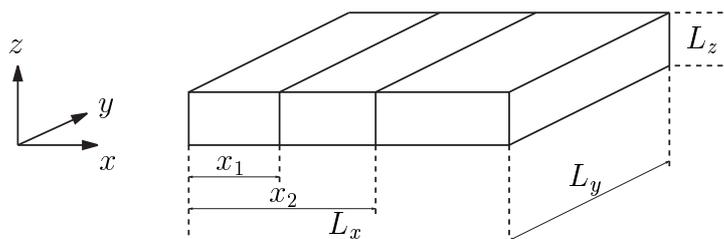


Figure 3.21 — Définition des paramètres d'optimisation caractérisant la position des renforts internes

Les contraintes d'optimisation associées à ces renforts sont choisies sous la forme :

$$\begin{cases} x_1^{min} \leq x_1 \leq x_1^{max} \\ x_2^{min} \leq x_2 \leq x_2^{max} \end{cases}$$

On peut par exemple choisir

$$x_1^{min} = x_2^{min} = 0 \quad x_1^{max} = x_2^{max} = L_x$$

ou bien

$$x_1^{min} = 0 \quad x_1^{max} = x_2^{min} = \frac{L_x}{2} \quad x_2^{max} = L_x$$

ou tout autre combinaison telle que

$$0 \leq x_1^{min} < x_1^{max} \leq L_x \quad 0 \leq x_2^{min} < x_2^{max} \leq L_x$$

3.6.4 Mise en oeuvre numérique

Tous les exemples numériques présentés dans la suite de cette section utilisent le modèle de renforts membranaires et sa mise en oeuvre numérique décrits dans la section 2.5. Le maillage utilisé est régulier et compte $N_x = 24$ éléments suivant la direction x , $N_y = 16$ suivant la direction y et $N_z = 8$ suivant la direction z . Ce maillage est identique pour tout jeu de valeurs de positions des renforts. Cela implique que les variations des positions des renforts s'effectuent de manière discontinue avec un *pas* égal à $\frac{L_x}{N_x}$. Dans la suite, on parlera de la position des renforts en terme de nombre de pas. Ces positions seront notées N_1 et N_2 .

Le calcul du gradient du critère est effectué par différences finies centrées. Il nécessite donc 4 calculs par éléments finis pour déterminer $G(N_1 - 1, N_2)$, $G(N_1 + 1, N_2)$, $G(N_1, N_2 - 1)$, $G(N_1, N_2 + 1)$ (si $N_1 = N_2$, seuls 2 calculs par éléments finis sont nécessaires) et vaut :

$$\nabla G(N_1, N_2) = \left(\frac{G(N_1 + 1, N_2) - G(N_1 - 1, N_2)}{2pas}, \frac{G(N_1, N_2 + 1) - G(N_1, N_2 - 1)}{2pas} \right)^T$$

Le calcul par éléments finis a été implémenté uniquement dans les cas où $1 \leq N_1 \leq N_x - 1$ et $1 \leq N_2 \leq N_x - 1$. Le calcul du gradient par différences finies centrées impose donc que :

$$2 \leq N_1 \leq N_x - 2 \quad 2 \leq N_2 \leq N_x - 2$$

Pour pouvoir calculer le gradient du critère pour $0 \leq N_1 \leq N_x$ et $0 \leq N_2 \leq N_x$, il faudrait implémenter le calcul par éléments finis dans les cas $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N_1 = N_x$, $N_2 = N_x$ et utiliser un calcul du gradient par différences finies non centrées. Il s'est avéré que ces développements numériques ne sont pas être nécessaires, les solutions optimales obtenues dans tous les exemples traités ne saturant aucune des contraintes. L'algorithme du gradient projeté est toutefois nécessaire, car les chemins suivis pour obtenir ces solutions optimales

saturent quelques fois certaines des contraintes.

La recherche directionnelle est effectuée pas à pas. En connaissant la direction de descente admissible $s^{(k)}$, on isole la coordonnée de ce vecteur maximale en valeur absolue, par exemple $s_1^{(k)}$. On note sign la fonction signe ($\text{sign}(x) = +1$ si $x \geq 0$, $\text{sign}(x) = -1$ si $x < 0$) et INT la fonction partie entière. On définit la fonction "entier le plus proche" NINT par :

$$\text{NINT}(x) = \begin{cases} \text{INT}(x + 0.5) & \text{si } x \geq 0 \\ \text{INT}(x - 0.5) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Le critère est alors calculé pour le jeu de paramètres (N'_1, N'_2) définis par :

$$\begin{cases} N'_1 = N_1 + p \text{sign}(s_1^{(k)}) \\ N'_2 = N_2 + \text{NINT} \left(p \frac{s_2^{(k)}}{|s_1^{(k)}|} \right) \end{cases}$$

Si $G(p + 1) < G(p)$, on itère. Si $G(p + 1) > G(p)$, la recherche directionnelle est terminée et le jeu de valeurs solution de la minimisation directionnelle est $(N'_1(p), N'_2(p))$.

Tous les exemples présentés dans la suite utilisent le jeu de contraintes d'inégalité suivant :

$$\begin{cases} N_1 \geq 2 \\ N_1 \leq N_x - 2 \\ N_2 \geq 2 \\ N_2 \leq N_x - 2 \end{cases}$$

3.6.5 Optimisation de la position des renforts dans le cas de zones d'attache fixées

Dans cette section, on s'intéresse à la première problématique de conception : déterminer les positions optimales des renforts avec des positions de zones d'attache fixées. Les deux zones d'attache sont de longueur 2 (suivant la direction x), et leur centre se trouve en positions 6 et 18, ce qui correspond au quart et aux trois quarts de la longueur totale (voir figure 3.22).

Pour le chargement constant, différentes positions initiales sont considérées. Les résultats de l'optimisation sont présentés dans le tableau 3.1, avec un critère normé à 1 pour la position optimale obtenue dans la première colonne. Les résultats montrent qu'il existe plusieurs minimums locaux pour lesquels les positions des deux renforts sont alignées sur les positions des zones d'attache. Un minimum est obtenu aux positions 7 et 17 lorsque la position initiale répartit les deux renforts dans les deux moitiés de la structure (voir figure 3.23(a)). Un autre minimum local est obtenu lorsque la position initiale place les deux renforts dans la même moitié de la structure. La position optimale obtenue aligne alors les deux renforts avec la zone d'attache de cette moitié de structure. On observe que la valeur du critère est plus faible

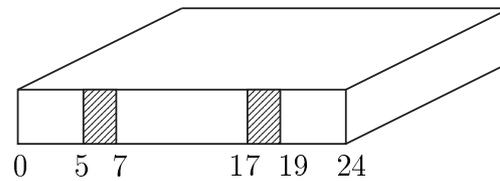
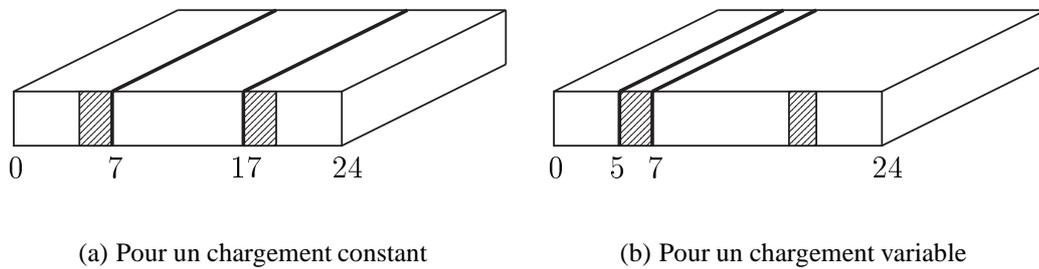


Figure 3.22 — Positions des zones d'attache supposées fixées



(a) Pour un chargement constant

(b) Pour un chargement variable

Figure 3.23 — Positions optimales des renforts dans le cas de zones d'attache fixées

Tableau 3.1 — Positions optimales obtenues en fonction de la position initiale pour un chargement constant

Position initiale (N_1, N_2)	(3, 21)	(3, 11)	(6, 11)	(3, 10)	(6, 10)	(3, 4)
Position optimale	(7, 17)	(7, 17)	(7, 17)	(7, 5)	(7, 5)	(5, 7)
Critère optimal	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.01

Tableau 3.2 — Positions optimales obtenues en fonction de la position initiale pour un chargement variable

Position initiale (N_1, N_2)	(4, 5)	(3, 13)	(9, 13)	(10, 14)	(3, 21)	(15, 21)	(20, 21)
Position optimale	(5, 7)	(5, 7)	(5, 7)	(5, 17)	(5, 17)	(17, 17)	(17, 17)
Critère optimal	1.00	1.00	1.00	1.03	1.03	1.15	1.15

dans le cas où chaque renfort est aligné avec une zone d'attache que dans le cas où les deux renforts sont alignés sur la même zone d'attache.

Pour le chargement variable, les résultats de l'optimisation sont présentés dans le tableau 3.2, avec un critère normé à 1 pour la position optimale obtenue dans la première colonne. On observe que différents minimums locaux sont obtenus en fonction de la proximité des positions initiales avec les zones d'attache. On obtient le minimum global (positions 5 et 7, voir figure 3.23(b)) pour les deux renforts alignés avec la zone d'attache située du côté le plus chargé de la structure, un minimum local (positions 5 et 17) pour un renfort aligné avec chacune des zones d'attache et un autre minimum local (positions 17 et 17) pour les deux renforts alignés avec la zone d'attache située du côté le moins chargé de la structure.

En conclusion, le problème d'optimisation de la position des renforts à zones d'attache fixées conduit à l'existence de minimums locaux pour lesquels les renforts sont alignés avec les différentes zones d'attache. Plus le nombre de renforts et de zones d'attache sera élevé, plus le nombre de minimums locaux sera grand.

3.6.6 Optimisation de la position des renforts dans le cas de zones d'attache variables

On s'intéresse maintenant à la deuxième problématique de conception : déterminer les positions optimales des renforts internes et des zones d'attache. On considère toujours 2 zones d'attache de longueur 2 (suivant la direction x). Compte tenu des résultats de la section précédente, on se place dans le cas où les positions des zones d'attache sont liées aux positions des renforts internes. On se limite donc toujours à deux paramètres d'optimisation qui sont les positions des couples renfort interne/zone d'attache, chaque renfort étant supposé situé au centre de la zone d'attache associée.

Pour les chargements constant et variable, les positions optimales obtenues sont indépendantes de la position initiale choisie. Dans le cas du chargement constant, le minimum est obtenu pour les positions (6, 18) (voir figure 3.24(a)), ce qui correspond au $\frac{1}{4}$ et aux $\frac{3}{4}$ de la longueur L_x . Dans le cas du chargement variable, un décalage vers le côté le plus chargé de la structure se produit : le minimum est obtenu pour les positions (4, 14) (voir figure 3.24(b)). En effectuant une minimisation à zones d'attache fixées dans cette position (4, 14), différents minimums locaux existent. Ils correspondent à un alignement des renforts internes sur les zones d'attache, le minimum global correspondant à un renfort aligné sur chaque zone d'attache.

Le paramétrage qui associe la position d'une zone d'attache avec un renfort interne permet donc de lever les problèmes liés à l'existence de minimums locaux, ce qui peut s'avérer très utile si le nombre de renforts et de zones d'attache augmente.

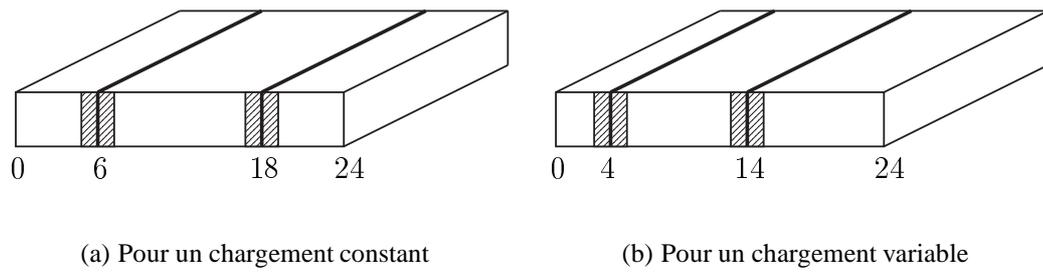


Figure 3.24 — Positions optimales des renforts dans le cas de zones d'attache variables

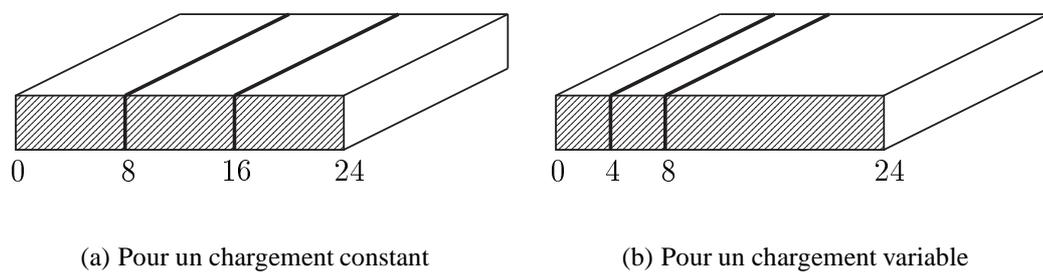


Figure 3.25 — Positions optimales des renforts dans le cas de l'encastrement

3.6.7 Optimisation de la position des renforts dans le cas de l'encastrement

On considère maintenant la troisième problématique de conception : évaluer l'influence sur la position optimale des renforts internes des longerons métalliques sur lesquels sont fixés ces renforts. Le cas limite associé à cette problématique est celui de longerons infiniment rigides et donc indéformables. Ce cas peut être modélisé en considérant que la zone non renforcée est complètement liée à un longeron et en y imposant un déplacement nul (ce qui correspond à la condition aux limites de type "encastrement", voir figure 3.19(a)).

Pour les chargements constant et variable, les positions optimales obtenues sont indépendantes de la position initiale choisie. Dans le cas du chargement constant, le minimum est obtenu pour les positions (8, 16) (voir figure 3.25(a)), ce qui correspond au $\frac{1}{3}$ et aux $\frac{2}{3}$ de la longueur L_x . Par rapport au cas étudié dans la section précédente, on observe un resserrement des renforts internes. Dans le cas du chargement variable, le minimum est obtenu pour les positions (4, 8) (voir figure 3.25(b)). Par rapport au cas étudié dans la section précédente, on observe un déplacement du deuxième renfort vers la zone située du côté le plus chargé de la structure.

Ces deux évolutions des positions optimales sont liées à l'accroissement de la rigidité structurale apportée par la condition aux limites de déplacements imposés nuls sur toute la face non renforcée.

3.6.8 Discussion

En considérant des positions de renforts découplées de celles des zones d'attache, les résultats de la section 3.6.5 laissent apparaître la possible existence de multiples minimums locaux et la tendance à l'alignement des zones d'attache et des renforts internes. En associant la position des zones d'attache à celle de renforts internes, les résultats de la section 3.6.6 laissent apparaître la possible diminution du nombre de minimums locaux. De plus, les résultats de la section 3.6.7 montrent que l'influence de la rigidité des longerons ne peut être négligée.

L'algorithme du gradient projeté ne permettant pas simplement ou systématiquement de trouver le minimum global dans le cas où de multiples minimums locaux existent, il est utile de recourir à des formulations de problèmes d'optimisation qui minimisent le nombre de minimums locaux. Dans le cadre de l'optimisation de la position des renforts internes et des zones d'attache de l'aileron de gouverne d'Airbus, une structure potentiellement proche de la structure optimale peut donc être recherchée de manière numériquement efficace à l'aide de l'algorithme du gradient projeté, en utilisant un modèle qui prend en compte la rigidité des longerons et qui associe la position de chaque zone d'attache à celle d'un renfort interne.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi différentes règles de conception liées aux renforts internes d'un volet de gouverne d'Airbus qui sont optimales au sens de la maximisation de la rigidité globale au moindre coût.

Tout d'abord, l'algorithme d'optimisation à paramètres distribués décrit au chapitre 1 a été appliqué sur cet exemple à caractère industriel, le volet de gouverne d'Airbus, à l'aide du modèle d'assemblage de plaques composites développé au chapitre 2. En considérant une sous-structure représentative du chargement appliqué à un renfort interne, la répartition optimale des fibres et de la matrice du matériau composite utilisé a été déterminée en utilisant des panneaux composites monocouches à fibres longues curvilignes de proportion variable. Ces résultats nous ont permis de définir des règles de conception optimales au sens de la maximisation de la rigidité globale au moindre coût en terme de répartition de fibres qui sont transposables à d'autres familles de panneaux composites, par exemple multicouches ou à fibres rectilignes.

Ensuite, la problématique du positionnement optimal des renforts internes du volet de gouverne a été étudié à l'aide l'algorithme du gradient projeté en utilisant à nouveau le modèle d'assemblage de plaques composites développé au chapitre 2. On a mis en évidence, sur un exemple académique, un choix de paramètres d'optimisation qui permet de lever les difficultés liées à l'existence possible de nombreux minimums locaux. Cette démarche d'optimisation reste à être appliquée sur l'exemple du volet de gouverne d'Airbus pour déterminer des règles de conception optimales au sens de la maximisation de la rigidité globale en terme de positionnement des renforts.

Chapitre 4

Optimisation structurale basée sur la compliance en élasticité non-linéaire

Le problème de la maximisation de la rigidité globale d'une structure élastique a été formulé comme la minimisation de la somme de la compliance et d'un terme de coût. En considérant des paramètres d'optimisation distribués, un algorithme d'optimisation a été défini dans le chapitre 1 et utilisé dans le chapitre précédent pour résoudre ce problème d'optimisation dans le cas de structures de type assemblage de plaques composites dans le cadre de l'élasticité linéaire. Une caractéristique importante de cet algorithme est le caractère local de la minimisation par rapport aux paramètres distribués qui permet d'obtenir un outil numérique performant.

L'objectif de ce chapitre est de montrer sous quelles hypothèses cet algorithme d'optimisation peut être généralisé pour résoudre le même problème d'optimisation dans le cas de lois de comportement élastiques non-linéaires tout en gardant le caractère local de la minimisation par rapport aux paramètres distribués. L'algorithme ainsi défini sera ensuite utilisé dans le chapitre suivant pour traiter des cas de comportements dissymétriques en traction-compression observés avec des matériaux composites à fibres longues et avec des matériaux micro-fissurés.

Dans la première partie de ce chapitre, on écrit le problème élastique non-linéaire de référence sous l'hypothèse des petites perturbations (petits déplacements et petites déformations). Ensuite on définit dans le cadre de l'optimisation à paramètres distribués la notion de loi de comportement dérivant de potentiels thermodynamiques duaux proportionnels. Avec ce type de lois de comportement élastiques non-linéaires, on montre que l'algorithme d'optimisation peut être généralisé pour résoudre le problème de la minimisation de la somme de la compliance et d'un terme de coût. Enfin, une caractérisation originale de tels potentiels est présentée. Elle permet, étant donnée la forme d'un potentiel thermodynamique quelconque, de déterminer de manière systématique et simple si il est proportionnel à son potentiel dual sans que l'expression explicite de ce dernier ne soit nécessaire, et donc si l'algorithme d'optimisation peut être utilisé avec la loi de comportement associée.

Sommaire

4.1 Problème élastique non-linéaire de référence	99
4.1.1 Equations du problème	99
4.1.2 Formulation variationnelle	100
4.1.3 Condition d'existence et d'unicité de solution	101
4.2 Optimisation de la compliance dans le cas de potentiels duaux proportionnels	101
4.2.1 Définition du problème d'optimisation	101
4.2.2 Définition et propriété des potentiels duaux proportionnels	102
4.2.3 Ecriture d'une forme équivalente du problème d'optimisation	103
4.2.4 Algorithme d'optimisation dans le cas de potentiels duaux proportionnels	103
4.2.5 Sur la non-applicabilité de l'algorithme pour des lois de comportement élastiques dérivant de potentiels duaux non-proportionnels	104
4.3 Caractérisation des potentiels duaux proportionnels	105
4.3.1 Rappel de la définition	105
4.3.2 Condition nécessaire et suffisante de proportionnalité (théorème de proportionnalité)	105
4.3.3 Sur l'utilisation du théorème de proportionnalité	106
4.3.4 Propriétés des potentiels duaux proportionnels	107
4.3.5 Exemples de l'élasticité linéaire et de la loi de comportement élastique non-linéaire de type puissance	108

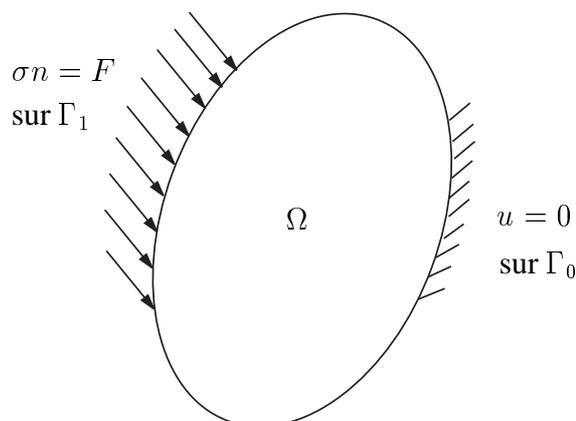


Figure 4.1 — Description d'un milieu tridimensionnel élastique

4.1 Problème élastique non-linéaire de référence

4.1.1 Equations du problème

Soit un milieu tridimensionnel élastique Ω . On se place dans l'hypothèse des petites perturbations, c'est-à-dire dans l'hypothèse des petits déplacements et des petites déformations. La masse volumique ρ est donc supposée constante et égale à ρ_0 . La frontière extérieure de Ω est divisée en deux parties Γ_0 et Γ_1 . Des déplacements nuls sont imposés sur Γ_0 , une densité surfacique d'effort \mathbf{F} est imposée sur Γ_1 et une densité volumique d'effort \mathbf{f} est imposée dans Ω (voir figure 4.1). Une solution du problème est notée (\mathbf{u}, σ) . On note $\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$. Les équations du problème s'écrivent :

Conditions aux limites en déplacements :

$$\mathbf{u} \in V \tag{4.1}$$

$$V = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3); \mathbf{v} \in (H^1(S))^3, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \}$$

Equations d'équilibre (Principe des Puissances Virtuelles) :

$$\sigma \in \Sigma_{ad} \tag{4.2}$$

$$\Sigma_{ad} = \{ \tau_{ij} \ (i, j = 1, 2, 3), \tau_{ij} = \tau_{ji}, \tau \text{ vérifie (4.2')} \}$$

$$\int_{\Omega} \tau : \epsilon(\mathbf{v}) \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, dS \quad \forall \mathbf{v} \in V \tag{4.2'}$$

Loi de comportement : On considère un potentiel thermodynamique convexe $\rho_0\psi(\sigma)$ et son potentiel dual $\rho_0\varphi(\epsilon)$ défini à l'aide de la transformée de Legendre :

$$\rho_0\varphi(\epsilon) = \sup_{\sigma} (\sigma : \epsilon - \rho_0\psi(\sigma))$$

Compte tenu des propriétés de la transformée de Legendre, le potentiel $\rho_0\varphi(\epsilon)$ est aussi convexe.

Les déformations ϵ et les contraintes σ dérivent des potentiels thermodynamiques duaux $\rho_0\psi(\sigma)$ et $\rho_0\varphi(\epsilon)$:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} \\ \sigma &= \rho_0 \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon} \end{aligned}$$

La transformée de Legendre implique les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_0\varphi(\epsilon) + \rho_0\psi(\sigma) - \sigma : \epsilon &\geq 0 \quad \forall \sigma, \epsilon \\ \rho_0\varphi(\epsilon) + \rho_0\psi(\sigma) - \sigma : \epsilon &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \text{ et } \epsilon \text{ vérifient la loi de comportement} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dans la suite on notera $L(v) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot v dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot v dS$. Le problème élastique non-linéaire de référence (P) utilisé dans ce chapitre est défini par le système d'équations (4.1)(4.2)(4.3).

4.1.2 Formulation variationnelle

Le problème d'élasticité non-linéaire (P) se met classiquement sous forme variationnelle. Nous énonçons ci-dessous les formulations variationnelles en déplacements, en contraintes et le théorème de la double inégalité (théorèmes de l'énergie).

Théorème 8. Formulation variationnelle en déplacements

Si \mathbf{u} est solution de (P) alors :

$$\mathbf{u} \in V, \quad \int_{\Omega} \rho_0 \frac{\partial \varphi(\epsilon(\mathbf{u}))}{\partial \epsilon} : \epsilon(\mathbf{v}) dV = L(v) \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

Théorème 9. Formulation variationnelle en contraintes

Si σ est solution de (P) alors :

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \int_{\Omega} \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} : (\tau - \sigma) dV = 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}$$

Théorème 10. Théorème de la double inégalité

Si (\mathbf{u}, σ) est solution de (P) alors :

$$(\mathbf{u}, \sigma) \in V \times \Sigma_{ad}$$

$$\begin{aligned} - \left(\int_{\Omega} \rho_0 \varphi(\epsilon(\mathbf{v})) dV - L(\mathbf{v}) \right) &\leq - \left(\int_{\Omega} \rho_0 \varphi(\epsilon(\mathbf{u})) dV - L(\mathbf{u}) \right) \\ &= \int_{\Omega} \rho_0 \psi(\sigma) dV \leq \int_{\Omega} \rho_0 \psi(\tau) dV \\ &\quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall \tau \in \Sigma_{ad} \quad (4.4) \end{aligned}$$

L'inégalité de gauche est le théorème de l'énergie potentielle et l'inégalité de droite le théorème de l'énergie complémentaire.

4.1.3 Condition d'existence et d'unicité de solution

On se placera dans la suite dans le cas de potentiels thermodynamiques continûment différentiables. On a alors le théorème d'existence suivant :

Théorème 11. Condition d'existence et d'unicité de solution

Si :

1. $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ est continue,
2. $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ est convexe,
3. $\exists \beta > 0 \quad / \quad \rho_0 \varphi(\epsilon) \geq \beta \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad \forall \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$

alors il existe une solution au problème

$$\min_{\mathbf{v} \in V} \left(\int_{\Omega} \rho_0 \varphi(\epsilon(\mathbf{v})) dV - L(\mathbf{v}) \right)$$

Si, de plus, $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ est strictement convexe, alors cette solution est unique.

4.2 Optimisation de la compliance dans le cas de potentiels duaux proportionnels

4.2.1 Définition du problème d'optimisation

Le problème d'optimisation considéré est identique à celui présenté dans les sections 1.2 et 3.1. Nous en faisons donc ici une présentation succincte.

On cherche à maximiser la rigidité globale d'une structure élastique pour un chargement extérieur donné. Etant donné un jeu de paramètres d'optimisation distribués (θ_i, α_i) (θ_i étant des paramètres de type orientation et α_i des paramètres de type proportion de constituant,

voir section 1.2), cet objectif peut être atteint par la minimisation d'un critère G défini comme la somme de la compli-
ance et d'un terme de coût :

$$\begin{aligned} G(\theta_i, \alpha_i) &= Compl(\theta_i, \alpha_i) + COUT(\alpha_i) \\ Compl(\theta_i, \alpha_i) &= L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, dS \\ COUT(\alpha_i) &= \int_{\Omega} cout(\alpha_i) \, dV \end{aligned}$$

le coût n'étant fonction que des paramètres de type proportion de constituant α_i .

Le problème d'optimisation considéré est alors :

$$\min_{(\theta_i, \alpha_i)} G(\theta_i, \alpha_i) = \min_{(\theta_i, \alpha_i)} \left[\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, dS + \int_{\Omega} cout(\alpha_i) \, dV \right] \quad (4.5)$$

\mathbf{u} étant solution du problème d'élasticité non-linéaire (P).

4.2.2 Définition et propriété des potentiels duaux proportionnels

Définition :

Deux potentiels thermodynamiques duaux par la transformée de Legendre sont proportionnels si leur rapport est constant quelque soit la valeur des paramètres d'optimisation pour tout couple (σ, ϵ) qui vérifie la loi de comportement (4.3).

Cela s'écrit mathématiquement :

$$\exists a \in \mathbb{R} / \rho_0 \varphi(\epsilon) = a \rho_0 \psi(\sigma), \quad \forall(\theta_i, \alpha_i), \forall(\sigma, \epsilon) \text{ qui vérifie (4.3)} \quad (4.6)$$

Propriété :

La solution (\mathbf{u}, σ) du problème élastique (P) associé à une valeur du champ de paramètres d'optimisation (θ_i, α_i) vérifie la loi de comportement en tout point du domaine Ω . a étant indépendant de la valeur des paramètres d'optimisation, a est constant sur Ω . L'intégration de (4.6) sur Ω avec le champ $(\sigma, \epsilon(\mathbf{u}))$ implique :

$$\int_{\Omega} \rho_0 \varphi(\epsilon(\mathbf{u})) \, dV = a \int_{\Omega} \rho_0 \psi(\sigma) \, dV$$

L'égalité centrale du théorème de la double inégalité (théorème 10) s'écrit alors, pour un couple (\mathbf{u}, σ) solution du problème élastique (P) sous la forme

$$L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, dS = (1 + a) \int_{\Omega} \rho_0 \psi(\sigma) \, dV \quad (4.7)$$

Une caractérisation des potentiels thermodynamiques duaux proportionnels est présentée dans la section 4.3.

Remarque. Dans le cas particulier de l'élasticité linéaire, $\rho_0\psi(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma : A : \sigma$ (A étant le tenseur de souplesse), $a = 1$ et l'équation (4.7) s'écrit :

$$L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, dS = \int_{\Omega} \sigma : A : \sigma \, dV$$

ce qui correspond à l'égalité entre la compliance et le double de l'énergie complémentaire. D'autres exemples de potentiels thermodynamiques duaux proportionnels seront donnés dans la suite.

4.2.3 Ecriture d'une forme équivalente du problème d'optimisation

Le théorème de l'énergie complémentaire (voir théorème 10) implique que le champ de contraintes solution du problème élastique (P) vérifie :

$$\int_{\Omega} \rho_0\psi(\sigma) \, dV = \min_{\tau \in \Sigma_{ad}} \int_{\Omega} \rho_0\psi(\tau) \, dV$$

En considérant le cas de potentiels thermodynamiques duaux proportionnels, compte tenu de (4.7), le problème d'optimisation (4.5) s'écrit sous la forme équivalente :

$$\min_{(\theta_i, \alpha_i)} \min_{\tau \in \Sigma_{ad}} \left[(1 + a) \int_{\Omega} \rho_0\psi(\tau) \, dV + \int_{\Omega} \text{cout}(\alpha_i) \, dV \right]$$

4.2.4 Algorithme d'optimisation dans le cas de potentiels duaux proportionnels

En utilisant la propriété (4.7), on généralise l'algorithme d'optimisation présenté dans la section 1.2.4 pour les lois de comportement élastiques linéaires [5] aux cas de lois de comportement élastiques non-linéaires dérivant de potentiels thermodynamiques duaux proportionnels.

La présentation de l'algorithme suivante suppose qu'il existe une solution au problème élastique non-linéaire associé à un jeu de valeurs des paramètres d'optimisation.

1. Phase d'initialisation :

On choisit un champ de paramètres d'optimisation $(\theta_i^{(0)}, \alpha_i^{(0)})$ sur le domaine d'optimisation Ω . La résolution du problème d'élasticité non-linéaire (P) associé permet la définition du champ de contraintes $\sigma^{(0)}$.

2. Minimisation locale à contraintes fixées :

On effectue la minimisation locale, c'est-à-dire en chaque point du domaine Ω de

l'intégrand du critère à contraintes $\sigma^{(n)}$ fixées, ce qui s'écrit :

$$\min_{(\theta_i, \alpha_i)} [(1+a)\rho_0\psi(\sigma^{(n)}, \theta_i, \alpha_i) + \text{cout}(\alpha_i)]$$

pour obtenir le champ de paramètres $(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)})$ qui, compte tenu du fait que a est constant dans Ω , vérifie la propriété

$$\begin{aligned} (1+a) \int_{\Omega} \rho_0\psi(\sigma^{(n)}, \theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) dV + \int_{\Omega} \text{cout}(\alpha_i^{(n+1)}) dV \\ \leq (1+a) \int_{\Omega} \rho_0\psi(\sigma^{(n)}, \theta_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)}) dV + \int_{\Omega} \text{cout}(\alpha_i^{(n)}) dV \end{aligned}$$

3. Minimisation globale à paramètres d'optimisation fixés :

On résout le problème d'élasticité non-linéaire (P) associé au champ de paramètres $(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)})$ pour obtenir le champ de contraintes $\sigma^{(n+1)}$. Le théorème de l'énergie complémentaire (théorème 10), avec comme choix de champ de contraintes statiquement admissible $\sigma^{(n)}$, après multiplication par $(1+a)$ puis ajout du terme de coût associé aux paramètres $\alpha_i^{(n+1)}$ aux deux membres de l'inégalité implique que

$$\begin{aligned} (1+a) \int_{\Omega} \rho_0\psi(\sigma^{(n+1)}, \theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) dV + \int_{\Omega} \text{cout}(\alpha_i^{(n+1)}) dV \\ \leq (1+a) \int_{\Omega} \rho_0\psi(\sigma^{(n)}, \theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) dV + \int_{\Omega} \text{cout}(\alpha_i^{(n+1)}) dV \end{aligned}$$

En considérant la propriété (4.7), les étapes 2 et 3 impliquent la propriété sur le critère global G :

$$G(\theta_i^{(n+1)}, \alpha_i^{(n+1)}) \leq G(\theta_i^{(n)}, \alpha_i^{(n)})$$

On itère alors les étapes 2 et 3. Le critère étant une grandeur positive qui diminue à chaque itération, il converge nécessairement vers une limite.

4.2.5 Sur la non-applicabilité de l'algorithme pour des lois de comportement élastiques dérivant de potentiels duaux non-proportionnels

Si on considère un potentiel thermodynamique qui n'est pas proportionnel à son potentiel dual par transformée de Legendre, la propriété (4.7) ne peut plus être démontrée. Dans ce cas, les minimisations effectuées au étapes 2 et 3 de l'algorithme ne permettent plus de conclure sur une diminution du critère G . L'algorithme n'est donc plus applicable.

4.3 Caractérisation des potentiels duaux proportionnels

Dans la section précédente, l'algorithme d'optimisation a été étendu à des lois de comportement élastiques dérivant de potentiels thermodynamiques duaux proportionnels. Nous allons maintenant présenter une méthode de caractérisation de tels potentiels qui sera utilisée dans le chapitre suivant pour traiter plus spécifiquement le cas de lois de comportement dissymétriques en traction-compression.

4.3.1 Rappel de la définition

Deux potentiels thermodynamiques duaux par la transformée de Legendre sont proportionnels si leur rapport est constant quelque soit la valeur des paramètres d'optimisation pour tout couple (σ, ϵ) qui vérifie la loi de comportement.

Cela s'écrit mathématiquement :

$$\exists a \in \mathbb{R} / \rho_0 \varphi(\epsilon) = a \rho_0 \psi(\sigma), \quad \forall (\theta_i, \alpha_i), \forall (\sigma, \epsilon) \text{ qui vérifie la loi de comportement}$$

4.3.2 Condition nécessaire et suffisante de proportionnalité (théorème de proportionnalité)

Théorème 12. Théorème de proportionnalité de potentiels thermodynamiques duaux

Si les contraintes σ et déformations ϵ dérivent de deux potentiels $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ et $\rho_0 \psi(\sigma)$ duaux au sens de la transformée de Legendre et vérifient la loi de comportement :

$$\sigma = \rho_0 \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon} \quad (4.8)$$

$$\epsilon = \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (4.9)$$

$$\rho_0 \varphi(\epsilon) + \rho_0 \psi(\sigma) = \sigma : \epsilon \quad (4.10)$$

alors

$$\begin{aligned} \rho_0 \varphi(\epsilon) = a \rho_0 \psi(\sigma) &\Leftrightarrow (1 + a) \rho_0 \psi(\sigma) = \sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{a}\right) \rho_0 \varphi(\epsilon) = \epsilon : \rho_0 \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Le cas particulier de l'égalité des potentiels duaux ($a = 1$) s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho_0 \varphi(\epsilon) = \rho_0 \psi(\sigma) &\Leftrightarrow 2 \rho_0 \psi(\sigma) = \sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} \\ &\Leftrightarrow 2 \rho_0 \varphi(\epsilon) = \epsilon : \rho_0 \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Démonstration.

- Supposons que $\rho_0 \varphi(\epsilon) = a \rho_0 \psi(\sigma)$. Alors $\rho_0 \varphi(\epsilon) + \rho_0 \psi(\sigma) = (1 + a) \rho_0 \psi(\sigma)$.
L'équation (4.9) implique que $\sigma : \epsilon = \sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}$.
L'équation (4.10) s'écrit alors $(1 + a) \rho_0 \psi(\sigma) = \sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}$.
- Supposons que $(1 + a) \rho_0 \psi(\sigma) = \sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}$.
L'équation (4.9) implique que $\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = \sigma : \epsilon$, donc $(1 + a) \rho_0 \psi(\sigma) = \sigma : \epsilon$.
L'équation (4.10) s'écrit alors $\rho_0 \varphi(\epsilon) = a \rho_0 \psi(\sigma)$.

Il est donc prouvé que

$$\rho_0 \varphi(\epsilon) = a \rho_0 \psi(\sigma) \quad \Leftrightarrow \quad (1 + a) \rho_0 \psi(\sigma) = \sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}.$$

Par un raisonnement analogue, on prouve que

$$\rho_0 \varphi(\epsilon) = a \rho_0 \psi(\sigma) \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{a}\right) \rho_0 \varphi(\epsilon) = \epsilon : \rho_0 \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon}$$

□

4.3.3 Sur l'utilisation du théorème de proportionnalité

Le théorème de la section précédente permet, à partir de l'expression d'un potentiel thermodynamique de montrer facilement la proportionnalité de ce potentiel et de son potentiel dual par transformée de Legendre. Connaissant l'expression du potentiel $\rho_0 \psi(\sigma)$ ($\rho_0 \varphi(\epsilon)$), la quantité $\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}$ ($\epsilon : \rho_0 \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon}$) est calculée et comparée à $\rho_0 \psi(\sigma)$ ($\rho_0 \varphi(\epsilon)$). Si leur rapport est constant, c'est-à-dire indépendant des paramètres d'optimisation et des contraintes σ (et des déformations ϵ), alors on conclut à la proportionnalité des potentiels duaux. Si leur rapport n'est pas constant, on conclut à la non-proportionnalité des potentiels duaux.

Cette caractérisation simple a deux avantages majeurs. Tout d'abord, pour prouver la proportionnalité de potentiels thermodynamiques duaux, il n'est pas nécessaire de connaître l'expression explicite du potentiel dual. Si la proportionnalité est prouvée, le potentiel dual peut être déterminé, si nécessaire. Mais dans le cas de la non-proportionnalité, sa forme n'est pas recherchée, ce qui peut permettre un gain de temps substantiel, l'expression du potentiel dual étant difficile à déterminer de manière explicite dans la majorité des cas de lois de comportement élastiques non-linéaires.

Ensuite, la preuve de la proportionnalité des potentiels thermodynamiques duaux implique directement l'applicabilité de l'algorithme d'optimisation présenté dans la section 4.2.4 grâce à la propriété (4.7) de ces potentiels rappelée dans la section suivante. A contrario, la preuve de la non-proportionnalité des potentiels thermodynamiques duaux implique la non-applicabilité de l'algorithme, la propriété (4.7) n'existant plus (voir section 4.2.5).

4.3.4 Propriétés des potentiels duaux proportionnels

La propriété (4.7) des potentiels duaux proportionnels qui permet l'utilisation de l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 4.2.4 est rappelée ici :

Propriété 1. Pour (\mathbf{u}, σ) solution du problème d'élasticité non-linéaire (P) , on a

$$L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS = (1 + a) \int_{\Omega} \rho_0 \psi(\sigma) dV$$

Dans le cas de potentiels thermodynamiques duaux proportionnels continûment différentiables, il est possible de reformuler la caractérisation de leur convexité basée sur leur dérivée première. Cette reformulation sera utilisée dans la chapitre suivant pour prouver la convexité de certains potentiels thermodynamiques duaux proportionnels utilisés pour modéliser des comportements dissymétriques en traction-compression.

Rappelons tout d'abord la condition nécessaire et suffisante de convexité d'une fonction continûment différentiable de plusieurs variables à valeurs réelles basée sur la dérivée première de cette fonction (voir [44] par exemple). Soit f une fonction à valeurs réelles continûment différentiable sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , et soit C un ensemble convexe inclus dans Ω , alors

- f est convexe sur C si et seulement si

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) \quad \forall (x, y) \in C$$

- f est strictement convexe si et seulement si l'inégalité précédente est stricte pour tout x différent de y

Cette condition s'écrit en considérant une fonction ψ à variable tensorielle du deuxième ordre symétrique, à valeurs réelles et continûment différentiable :

- ψ est convexe si et seulement si

$$\psi(\tau) \geq \psi(\sigma) + \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} : (\tau - \sigma) \quad \forall \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \forall \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (4.13)$$

- ψ est strictement convexe si et seulement si l'inégalité précédente est stricte pour tout τ différent de σ

En considérant un potentiel thermodynamique ψ proportionnel à son potentiel dual, le théorème de proportionnalité implique la propriété :

$$\sigma : \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = (1 + a) \psi(\sigma)$$

La condition de convexité (4.13) s'écrit alors :

$$\psi(\tau) \geq \psi(\sigma) + \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma} : \tau - (1+a)\psi(\sigma) \quad \forall \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \forall \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

ou encore

$$\psi(\tau) + a\psi(\sigma) - \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma} : \tau \geq 0 \quad \forall \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \forall \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Propriété 2. Soit un potentiel thermodynamique ψ à variable tensorielle du deuxième ordre symétrique, à valeurs réelles, continûment différentiable et proportionnel à son potentiel dual, alors

- ψ est convexe si et seulement si

$$\psi(\tau) + a\psi(\sigma) - \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma} : \tau \geq 0 \quad \forall \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \forall \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (4.14)$$

- ψ est strictement convexe si et seulement si l'inégalité précédente est stricte pour tout τ différent de σ

Remarque. Dans le cas de potentiels duaux égaux, c'est-à-dire pour $a = 1$, la condition nécessaire et suffisante de convexité du potentiel continûment différentiable ψ s'écrit

$$\psi(\tau) + \psi(\sigma) - \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma} : \tau \geq 0 \quad \forall \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \forall \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (4.15)$$

4.3.5 Exemples de l'élasticité linéaire et de la loi de comportement élastique non-linéaire de type puissance

Exemple de l'élasticité linéaire

Nous allons tout d'abord expliciter la méthodologie développée dans ce chapitre dans le cas de l'élasticité linéaire, pour lequel l'algorithme d'optimisation se résume à l'algorithme classique décrit au chapitre 1.

Le potentiel thermodynamique est :

$$\rho_0\psi(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma : A : \sigma$$

où A est le tenseur de souplesse fonction des paramètres d'optimisation (θ_i, α_i) considérés.

La loi de comportement associée est :

$$\epsilon = \rho_0 \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma} = A : \sigma$$

Calculons $\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}$:

$$\begin{aligned} \sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} &= \rho_0 \sigma : A : \sigma \\ &= \rho_0 \psi(\sigma) \end{aligned}$$

Par application du théorème de proportionnalité (section 4.3.2), on conclue que le potentiel thermodynamique $\rho_0 \psi(\sigma)$ et le potentiel dual par transformée de Legendre $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ sont, quelque soient (σ, ϵ) qui vérifient la loi de comportement, tels que :

$$\rho_0 \varphi(\epsilon) = \rho_0 \psi(\sigma)$$

Donc

$$\exists a = 1 \in \mathbb{R} / \rho_0 \varphi(\epsilon) = a \rho_0 \psi(\sigma) \quad \forall (\theta_i, \alpha_i), \forall (\sigma, \epsilon) \text{ qui vérifient la loi de comportement}$$

En conclusion, l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 4.2.4 peut être utilisé avec une loi de comportement élastique linéaire, ce résultat étant bien évidemment déjà connu.

Exemple de la loi de comportement élastique non-linéaire de type puissance

Pedersen et Taylor [60] utilisent la loi de comportement de type puissance (en anglais "power law non-linear elasticity") dans le cadre de l'optimisation de la compliance (voir section 1.5.2). Dans cet article est démontrée la proportionnalité des potentiels thermodynamiques duaux par détermination de la forme explicite du potentiel dual.

Nous allons appliquer la méthodologie développée dans ce chapitre pour prouver l'utilisation possible de l'algorithme d'optimisation présenté dans la section 4.2.4 avec ce type de loi de comportement.

Considérons le potentiel thermodynamique exprimé en contraintes suivant :

$$\rho_0 \psi(\sigma) = \frac{1}{(n+1)E^n} \sigma_{eq}^{n+1} \quad \text{avec} \quad \sigma_{eq} = (\sigma : H : \sigma)^{1/2} \quad (4.16)$$

où H est un tenseur d'ordre 4 symétrique défini positif à coefficients adimensionnels. H et E sont fonctions des paramètres d'optimisation (θ_i, α_i) considérés et n est une constante.

La loi de comportement associée est :

$$\epsilon = \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = \rho_0 \frac{n+1}{(n+1)E^n} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma} \sigma_{eq}^n = \rho_0 \frac{1}{E^n} \frac{2H : \sigma}{2(\sigma : H : \sigma)^{1/2}} \sigma_{eq}^n$$

Ce qui s'écrit

$$\epsilon = \rho_0 \frac{\sigma_{eq}^{n-1}}{E^n} H : \sigma \quad (4.17)$$

Calculons $\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} :$

$$\begin{aligned} \sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} &= \rho_0 \frac{\sigma_{eq}^{n-1}}{E^n} \sigma : H : \sigma \\ &= \rho_0 \frac{1}{E^n} \sigma_{eq}^{n+1} \\ &= (1+n)\psi(\sigma) \end{aligned}$$

Par application du théorème de proportionnalité (section 4.3.2), on conclue que le potentiel thermodynamique $\rho_0 \psi(\sigma)$ et le potentiel dual par transformée de Legendre $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ sont, quel que soient (σ, ϵ) qui vérifient la loi de comportement, tels que :

$$\rho_0 \varphi(\epsilon) = n \rho_0 \psi(\sigma)$$

n est une constante indépendante des paramètres d'optimisation, donc

$$\exists a = n \in \mathbb{R} / \rho_0 \varphi(\epsilon) = a \rho_0 \psi(\sigma) \quad \forall (\theta_i, \alpha_i), \forall (\sigma, \epsilon) \text{ qui vérifient la loi de comportement}$$

En conclusion, l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 4.2.4 peut être utilisé avec la loi non-linéaire de type puissance (4.17).

Remarque. Pour cette loi de comportement, la proportionnalité des potentiels thermodynamiques duaux peut être prouvée en déterminant de façon explicite le potentiel $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ mais la démonstration s'avère être bien moins rapide et directe. Il sera présenté dans le chapitre suivant une loi de comportement dissymétrique en traction-compression qui conduit à des potentiels thermodynamiques duaux proportionnels pour lesquels la détermination de la forme explicite du potentiel dual n'a pas pu être déterminée.

Chapitre 5

Optimisation avec des lois de comportement dissymétriques en traction-compression

De nombreux matériaux possèdent un comportement dissymétrique en traction-compression. Cette dissymétrie est en général due à des phénomènes micro-mécaniques qui peuvent être de nature très différente mais elle possède une caractéristique générale invariable : la dissymétrie de comportement en traction-compression est liée à une diminution des caractéristiques mécaniques à l'échelle mésoscopique (rigidité, résistance) dans l'un des deux états, soit en traction, soit en compression. Cela implique qu'il existe un risque de surestimer fortement la résistance ou la rigidité d'une structure si on ne prend pas en compte la non-linéarité de comportement associée à la dissymétrie en traction-compression. Dans le contexte de l'optimisation de structures, les résultats optimaux obtenus sans la prise en compte de la dissymétrie peuvent être dramatiquement éloignés de ceux obtenus à partir du comportement réel de la structure.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à deux types de matériaux particuliers qui possèdent un comportement différent en traction et en compression avec diminution des caractéristiques mécaniques à l'échelle mésoscopique dans un état par rapport à l'autre. Le premier type de matériau est caractérisé par la présence de micro-fissures en son sein. L'apparition de telles micro-fissures peut être liée à l'endommagement du matériau. Ces micro-fissures sollicitées en traction dans une direction perpendiculaire à leur longueur s'ouvrent, ce qui implique une diminution de la rigidité à l'échelle mésoscopique, tandis que sollicitées en compression elles se referment et aucune modification de la rigidité à l'échelle mésoscopique par rapport au matériau non-endommagé n'apparaît. Le deuxième type de matériau considéré sont les matériaux composites à fibres longues de carbone ou de kevlar. Lorsque ces fibres sont sollicitées par un chargement de compression longitudinale, un comportement élastique non-linéaire différent du comportement élastique linéaire en traction est observé. Le comportement en compression est alors caractérisé par une perte de rigidité à l'échelle mésoscopique.

Dans le cadre de l'optimisation de structures complexes constituées de tels matériaux, la prise en compte à l'échelle microscopique des phénomènes micro-structuraux responsables de la dissymétrie de comportement s'avère être une tâche énorme qui aboutirait sans aucun doute à un outil numérique très lourd à utiliser. D'un autre côté, l'algorithme d'optimisation présenté au chapitre précédent dans le cadre de lois de comportement élastiques non-linéaires est performant numériquement car il effectue des minimisations locales par rapport aux paramètres d'optimisation. Une condition incontournable pour pouvoir utiliser cette méthode d'optimisation est de pouvoir définir le comportement élastique dissymétrique en traction-compression à l'échelle mésoscopique à travers la définition d'un potentiel thermodynamique.

Le but de ce chapitre est alors double : recenser les lois de comportement élastiques non-linéaires modélisant à l'échelle mésoscopique les comportements dissymétriques en traction-compression observés pour les matériaux composites à fibres longues et les matériaux micro-fissurés et prouver leur utilisation possible dans l'algorithme d'optimisation en prouvant la proportionnalité des potentiels thermodynamiques duaux considérés.

Pour recenser ces différents modèles, une étude bibliographique est menée tout au long de ce chapitre. En premier lieu, un modèle tridimensionnel mésoscopique de loi de comportement élastique anisotrope non-linéaire dissymétrique en traction-compression prenant en compte les mécanismes d'ouverture ou de fermeture de micro-fissures utilisé par R. Desmorat [28] dans le cadre d'une théorie de l'endommagement anisotrope induite est prouvée être utilisable avec l'algorithme d'optimisation présenté dans le chapitre précédent.

Dans un deuxième temps, cette loi de comportement élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression est généralisée sous la forme d'une loi de type puissance qui est toujours compatible avec l'algorithme d'optimisation.

Ensuite, dans le cadre des matériaux composites à fibres longues différents modèles phénoménologiques utilisant une définition uniaxiale de l'état de traction-compression et identifiés sur des essais mécaniques sont étudiés en considérant leur utilisation dans l'algorithme d'optimisation.

Puis le modèle tridimensionnel initial est adapté au cas des matériaux orthotropes bidimensionnels sous l'hypothèse des contraintes planes. Cela aboutit à une loi de comportement élastique non-linéaire par morceaux qui utilise une définition biaxiale de l'état de traction-compression et qui est compatible avec l'algorithme d'optimisation.

Enfin, un modèle de loi de comportement élastique linéaire par morceaux dissymétrique en traction-compression est mis en œuvre numériquement pour montrer les différences obtenues avec le cas élastique linéaire. Une étude originale de l'orientation optimale d'un tel matériau élastique non-linéaire qui permet de rendre la minimisation locale explicite est alors présentée.

Sommaire

5.1	Une loi de comportement tridimensionnelle anisotrope élastique dissymétrique en traction-compression	114
5.1.1	Décomposition de Kelvin d'un tenseur d'ordre 4	114
5.1.2	Définition du potentiel thermodynamique et de la loi de comportement associée	114
5.1.3	Applicabilité de l'algorithme d'optimisation	115
5.1.4	Sur l'existence d'une solution au problème élastique de référence	116
5.2	Loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire de type puissance dissymétrique en traction-compression	119
5.2.1	Loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire de type puissance	119
5.2.2	Loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire de type puissance dissymétrique en traction-compression	120
5.2.3	Applicabilité de l'algorithme d'optimisation	121
5.3	Comportements dissymétriques en traction-compression de matériaux composites à fibres longues	122
5.3.1	Revue des résultats expérimentaux. Limites de l'approche phénoménologique.	123
5.3.2	Une loi de comportement orthotrope élastique non-linéaire par morceaux avec une définition uniaxiale de l'état de traction-compression	125
5.3.3	Une loi de comportement orthotrope élastique linéaire par morceaux avec une définition uniaxiale de l'état de traction-compression	127
5.3.4	Une loi de comportement élastique non-linéaire par morceaux avec une définition biaxiale de l'état de traction-compression (utilisation de la décomposition de Kelvin)	131
5.3.5	Définition d'un nouveau modèle de comportement élastique linéaire par morceaux avec une définition biaxiale de l'état de traction-compression	136
5.4	Exemples numériques pour un matériau composite à fibres longues à loi de comportement orthotrope élastique linéaire par morceaux	140
5.4.1	Calcul de la loi de comportement homogénéisé	142
5.4.2	Mise en œuvre numérique du calcul par éléments finis	143
5.4.3	Mise en œuvre numérique de la minimisation locale	145
5.4.4	Exemple numérique	149
5.5	Conclusion	150

5.1 Une loi de comportement tridimensionnelle anisotrope élastique dissymétrique en traction-compression

Lorsque qu'un matériau initialement sain s'endommage par création de micro-fissures, son comportement peut être modélisé à l'échelle mésoscopique à endommagement constant par une loi de comportement élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression. Une telle loi de comportement a été introduite par R. Desmorat [28] dans le cadre de l'étude de l'anisotropie induite par l'endommagement d'un matériau initialement élastique linéaire.

L'objectif de cette section est de démontrer que l'algorithme d'optimisation présenté dans le chapitre précédent est applicable avec cette loi de comportement tridimensionnelle. Pour cela la méthode développée au chapitre précédent est appliquée, la forme explicite du potentiel thermodynamique dual par transformée de Legendre n'étant pas connue.

5.1.1 Décomposition de Kelvin d'un tenseur d'ordre 4

Considérons un matériau élastique linéaire anisotrope. Soit S le tenseur de souplesse symétrique du quatrième ordre de ce matériau. La décomposition de Kelvin de S introduit les six valeurs propres ou modules de Kelvin $s^I > 0$ et les six tenseurs propres symétriques du deuxième ordre associés S^I tels que :

$$S = \sum_{I=1}^6 s^I S^I \otimes S^I, \quad S^I : S^J = \delta_{IJ}$$

Dans cette dernière expression, nous utilisons les notations : $(S^I \otimes S^J)_{ijkl} = S^I_{ij} S^J_{kl}$ et $S^I : S^J = S^I_{ij} S^J_{ij}$.

Le tenseur du quatrième ordre A est alors défini par :

$$S = A : A \quad \text{i.e.} \quad A = S^{1/2} = \sum_{I=1}^6 \sqrt{s^I} S^I \otimes S^I$$

En considérant les symétries de S et donc de A , le potentiel thermodynamique $\rho_0 \psi(\sigma)$ se met sous la forme :

$$\rho_0 \psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma : S : \sigma = \frac{1}{2} (A : \sigma) : (A : \sigma)$$

5.1.2 Définition du potentiel thermodynamique et de la loi de comportement associée

Considérons deux tenseurs de souplesse du quatrième ordre S^A et S^B . Les décompositions de Kelvin de S^A et S^B permettent de définir les tenseurs $A = (S^A)^{1/2}$ et $B = (S^B)^{1/2}$. Un potentiel général qui modélise un comportement élastique non-linéaire

dissymétrique en traction-compression à l'échelle mésoscopique peut être défini sous la forme (R. Desmorat [28]) :

$$\rho_0 \psi(\sigma) = \frac{1}{2} \langle A : \sigma \rangle_+ : \langle A : \sigma \rangle_+ + \frac{1}{2} \langle B : \sigma \rangle_- : \langle B : \sigma \rangle_- \quad (5.1)$$

où $\langle \cdot \rangle_+$ et $\langle \cdot \rangle_-$ sont respectivement les parties positives et négatives définies sur les valeurs propres (dans le cas scalaire, $\langle x \rangle_+ = \sup(x, 0)$, $\langle x \rangle_- = \sup(-x, 0)$).

Le potentiel (5.1) est différentiable et sa dérivée est continue (Ladevèze [50]). La loi de comportement associée est :

$$\epsilon = \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = A : \langle A : \sigma \rangle_+ - B : \langle B : \sigma \rangle_- \quad (5.2)$$

Remarque. La particularisation de cette loi de comportement à des tenseurs S^A et S^B caractérisant des lois de comportement orthotropes en élasticité bidimensionnelle sous l'hypothèse des contraintes planes est présentée dans la section 5.3.4.

5.1.3 Applicabilité de l'algorithme d'optimisation

Considérons maintenant la proportionnalité du potentiel (5.1) et de son potentiel dual par transformée de Legendre. Pour démontrer cette propriété, et donc l'utilisation possible de l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 4.2.4 avec ce potentiel, nous utilisons la méthode développée au chapitre précédent. Il est intéressant de noter que la forme explicite du potentiel dual est inconnue à ce jour.

Calculons $\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}$. L'équation (5.2) implique :

$$\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = \sigma : (A : \langle A : \sigma \rangle_+ - B : \langle B : \sigma \rangle_-)$$

En considérant les symétries de A , B et de σ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sigma : (A : \langle A : \sigma \rangle_+) &= (A : \sigma) : \langle A : \sigma \rangle_+ \\ \sigma : (B : \langle A : \sigma \rangle_-) &= (B : \sigma) : \langle B : \sigma \rangle_- \end{aligned}$$

D'où

$$\sigma : \frac{\partial \rho_0 \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = (A : \sigma) : \langle A : \sigma \rangle_+ - (B : \sigma) : \langle B : \sigma \rangle_-$$

Or, pour tout tenseur T d'ordre 2 réel symétrique :

$$\begin{aligned} T : \langle T \rangle_+ &= \langle T \rangle_+ : \langle T \rangle_+ \\ T : \langle T \rangle_- &= - \langle T \rangle_- : \langle T \rangle_- \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} &= \langle A : \sigma \rangle_+ : \langle A : \sigma \rangle_+ + \langle B : \sigma \rangle_- : \langle B : \sigma \rangle_- \\ &= 2\rho_0 \psi(\sigma)\end{aligned}$$

Par application du théorème de proportionnalité (section 4.3.2), on conclue que le potentiel thermodynamique $\rho_0 \psi(\sigma)$ et le potentiel dual par transformée de Legendre $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ sont, quelque soient (σ, ϵ) qui vérifient la loi de comportement, tels que :

$$\rho_0 \varphi(\epsilon) = \rho_0 \psi(\sigma)$$

En dénotant toujours les paramètres d'optimisation par (θ_i, α_i) , on a donc

$$\exists a = 1 \in \mathbb{R} / \rho_0 \varphi(\epsilon) = a \rho_0 \psi(\sigma) \quad \forall (\theta_i, \alpha_i), \forall (\sigma, \epsilon) \text{ qui vérifient la loi de comportement}$$

En conclusion, l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 4.2.4 peut être utilisé avec la loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire anisotrope dissymétrique en traction-compression (5.2).

On peut énoncer ce résultat de proportionnalité par le

Théorème 13. *Quelque soient les tenseurs du quatrième ordre symétriques A et B , le potentiel thermodynamique :*

$$\rho_0 \psi(\sigma) = \frac{1}{2} \langle A : \sigma \rangle_+ : \langle A : \sigma \rangle_+ + \frac{1}{2} \langle B : \sigma \rangle_- : \langle B : \sigma \rangle_-$$

est égal à son potentiel thermodynamique dual par transformée de Legendre $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ pour tout couple (σ, ϵ) vérifiant la loi de comportement.

5.1.4 Sur l'existence d'une solution au problème élastique de référence

Pour pouvoir appliquer l'algorithme d'optimisation, une condition nécessaire est l'existence de solution au problème élastique de référence. Pour pouvoir appliquer le résultat d'existence de la section 4.1.3, il reste à démontrer la convexité et la coercivité du potentiel dual du potentiel (5.1), la continuité de la loi de comportement associée étant déjà assurée [50].

Convexité du potentiel thermodynamique

Pour démontrer la convexité du potentiel thermodynamique, nous allons utiliser la reformulation de la condition nécessaire et suffisante de convexité dans le cas des potentiels thermodynamiques duaux continûment différentiables et égaux décrite dans la section 4.3.4.

On introduit I_A et I_B tels que $\psi(\sigma) + \psi(\tau) - \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma} : \tau = I_A + I_B$, où I_A et I_B s'écrivent :

$$I_A = \frac{1}{2} \langle A : \sigma \rangle_+ : \langle A : \sigma \rangle_+ + \frac{1}{2} \langle A : \tau \rangle_+ : \langle A : \tau \rangle_+ - (A : \langle A : \sigma \rangle_+) : \tau$$

$$I_B = \frac{1}{2} \langle B : \sigma \rangle_- : \langle B : \sigma \rangle_- + \frac{1}{2} \langle B : \tau \rangle_- : \langle B : \tau \rangle_- - (B : \langle B : \sigma \rangle_-) : \tau$$

I_A et I_B se mettent sous la forme :

$$I_A = \frac{1}{2} (T_1^+ : T_1^+ + T_1^+ : T_2^+ - 2T_1 : T_2^+)$$

$$I_B = \frac{1}{2} (T_1^- : T_1^- + T_1^- : T_2^- + 2T_1 : T_2^-)$$

avec

$$\begin{array}{llll} T_1 = A : \tau & T_1^+ = \langle A : \tau \rangle_+ & T_1^- = \langle A : \tau \rangle_- & T_1 = T_1^+ - T_1^- \\ T_2 = A : \sigma & T_2^+ = \langle A : \sigma \rangle_+ & T_2^- = \langle A : \sigma \rangle_- & T_2 = T_2^+ - T_2^- \end{array}$$

I_A et I_B se mettent alors sous la forme suivante :

$$I_A = \frac{1}{2} [(T_1^+ - T_2^+) : (T_1^+ - T_2^+) + 2(T_1^- : T_2^+)]$$

$$I_B = \frac{1}{2} [(T_1^- - T_2^-) : (T_1^- - T_2^-) + 2(T_1^+ : T_2^-)]$$

Le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 2 avec lui même est toujours positif ou nul, donc :

$$(T_1^+ - T_2^+) : (T_1^+ - T_2^+) \geq 0$$

$$(T_1^- - T_2^-) : (T_1^- - T_2^-) \geq 0$$

Montrons que $T_1^- : T_2^+ \geq 0$ pour tout (T_1, T_2) .

Le produit doublement contracté de deux tenseurs est indépendant de la base dans laquelle il est calculé. Plaçons nous dans la base propre de T_1^- :

$$(T_1^-)_{11} = \lambda_1 \quad (T_1^-)_{22} = \lambda_2 \quad (T_1^-)_{33} = \lambda_3 \quad (T_1^-)_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Par définition, les valeurs propres de T_1^- sont positives ou nulles. En effectuant le produit $T_1^- : T_2^+$ dans la base propre de T_1^- , on obtient :

$$T_1^- : T_2^+ = \lambda_1 (T_2^+)_{11} + \lambda_2 (T_2^+)_{22} + \lambda_3 (T_2^+)_{33}$$

Or T_2^+ est semi-défini positif donc $(T_2^+)_{11} \geq 0$, $(T_2^+)_{22} \geq 0$ et $(T_2^+)_{33} \geq 0$ dans n'importe quelle base. Comme les valeurs propres de T_1^- sont positives ou nulles, on déduit que $T_1^- : T_2^+ \geq 0$. On montrera de manière analogue que $T_1^+ : T_2^- \geq 0$.

En conclusion, $I_A \geq 0$ et $I_B \geq 0$. Donc

$$\psi(\sigma) + \psi(\tau) - \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} : \tau \geq 0 \quad \forall (\sigma, \tau)$$

ce qui implique (section 4.3.4) que le potentiel (5.1) est convexe.

La transformée de Legendre d'une fonction convexe étant convexe, le potentiel $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ dual du potentiel $\rho_0 \psi(\sigma)$ défini dans l'équation (5.1) est convexe.

Coercivité du potentiel thermodynamique

Dans le cas du potentiel écrit en contraintes défini dans l'équation (5.1), la forme explicite du potentiel thermodynamique dual $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ n'est pas connue. Il ne m'a alors pas été possible de démontrer la coercivité de ce potentiel, c'est-à-dire la propriété :

$$\exists \beta > 0 \quad / \quad \rho_0 \varphi(\epsilon) \geq \beta \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad \forall \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad (5.3)$$

Pour se placer dans un cas où la forme du potentiel thermodynamique $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ est explicite, on modélise le comportement élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression à l'échelle mésoscopique par le potentiel thermodynamique suivant :

$$\varphi(\epsilon) = \frac{1}{2} (\langle A : \epsilon \rangle_+ : \langle A : \epsilon \rangle_+ + \langle B : \epsilon \rangle_- : \langle B : \epsilon \rangle_-) \quad (5.4)$$

où A et B sont les racines carrées (au sens de la décomposition de Kelvin) de deux tenseurs de rigidité associés à deux lois de comportement élastiques linéaires. Notons que ce potentiel n'est pas le potentiel dual du potentiel (5.1).

Les preuves de la convexité de ce potentiel et de la compatibilité avec l'algorithme d'optimisation de la loi de comportement associée s'effectuent de façon similaire à l'étude présentée pour le potentiel en contraintes (5.1). Mais même dans ce cas où la forme explicite du potentiel en déformations est connue, la propriété de coercivité (5.3) n'a pas pu être démontrée.

Le problème de l'existence d'une solution au problème élastique de référence avec les deux choix différents de potentiels en contraintes de type (5.1) ou en déformations de type (5.4) est donc toujours un problème ouvert.

5.2 Loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire de type puissance dissymétrique en traction-compression

La loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression présentée dans la section précédente permet la prise en compte à l'échelle mésoscopique des mécanismes microstructuraux associés à la présence de microfissures au sein du matériau et est compatible avec l'algorithme d'optimisation présenté au chapitre 4. Au chapitre 4 toujours, il a été montré que la loi de comportement élastique non-linéaire de type puissance est aussi compatible avec cet algorithme d'optimisation.

Nous allons maintenant généraliser la loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire de type puissance pour prendre en compte une dissymétrie de comportement en traction-compression par exemple associée à la présence de microfissures au sein du matériau. Cette nouvelle loi de comportement originale inclue les cas de comportement élastique linéaire, de comportement élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression présenté dans la section précédente et de comportement élastique non-linéaire de type puissance. Elle est de plus compatible avec l'algorithme d'optimisation de la compliance présenté au chapitre 4.

5.2.1 Loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire de type puissance

Considérons le potentiel thermodynamique dont dérive la loi de comportement élastique non-linéaire de type puissance [60] :

$$\rho_0 \psi(\sigma) = \frac{1}{(n+1)E^n} \sigma_{eq}^{n+1}$$

où E est un paramètre matériau fonction des paramètres d'optimisation et n est un paramètre matériau constant. Dans la section 4.3.5, la contrainte équivalente σ_{eq} est définie à l'aide d'un tenseur H du quatrième ordre symétrique défini positif à coefficients adimensionnels sous la forme :

$$\sigma_{eq} = (\sigma : H : \sigma)^{1/2}$$

La loi de comportement associée est :

$$\epsilon = \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = \rho_0 \frac{\sigma_{eq}^{n-1}}{E^n} H : \sigma$$

Pour $n = 1$, on retrouve la loi de comportement élastique linéaire avec un tenseur de souplesse défini par $\frac{1}{E} H$.

5.2.2 Loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire de type puissance dissymétrique en traction-compression

La dissymétrie en traction-compression est introduite par l'intermédiaire de la contrainte équivalente. Considérons deux tenseurs H^A et H^B du quatrième ordre à coefficients adimensionnels tels que $\frac{1}{E}H^A$ et $\frac{1}{E}H^B$ correspondent à des tenseurs de souplesse élastiques linéaires anisotropes. Les racines carrées de H^A et de H^B (au sens de la décomposition de Kelvin) sont notées A et B . Ces deux tenseurs sont aussi à coefficients adimensionnels.

La contrainte équivalente est alors définie sous la forme :

$$\sigma_{eq} = [\langle A : \sigma \rangle_+ : \langle A : \sigma \rangle_+ + \langle B : \sigma \rangle_- : \langle B : \sigma \rangle_-]^{1/2} \quad (5.5)$$

Le potentiel thermodynamique qui modélise un comportement élastique non-linéaire de type puissance dissymétrique en traction-compression s'écrit toujours sous la forme :

$$\rho_0 \psi(\sigma) = \frac{1}{(n+1)E^n} \sigma_{eq}^{n+1} \quad (5.6)$$

et la loi de comportement associée est (voir démonstration ci après) :

$$\epsilon = \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = \rho_0 \frac{\sigma_{eq}^{n-1}}{E^n} [A : \langle A : \sigma \rangle_+ - B : \langle B : \sigma \rangle_-] \quad (5.7)$$

Démonstration de l'équation (5.7). Calculons tout d'abord $\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma} &= \frac{1}{2} \frac{2(A : \langle A : \sigma \rangle_+ - B : \langle B : \sigma \rangle_-)}{(\langle A : \sigma \rangle_+ : \langle A : \sigma \rangle_+ + \langle B : \sigma \rangle_- : \langle B : \sigma \rangle_-)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\sigma_{eq}} (A : \langle A : \sigma \rangle_+ - B : \langle B : \sigma \rangle_-) \end{aligned}$$

La loi de comportement s'écrit alors :

$$\epsilon = \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = \rho_0 \frac{\sigma_{eq}^n}{E^n} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma} = \rho_0 \frac{\sigma_{eq}^{n-1}}{E^n} [A : \langle A : \sigma \rangle_+ - B : \langle B : \sigma \rangle_-]$$

□

Théorème 14. *Les cas de lois de comportement élastiques linéaires, élastiques non-linéaires de type puissance (section 4.3.5), et élastiques non-linéaires dissymétriques en traction-compression (section 5.1) sont inclus dans la loi de comportement (5.7).*

Démonstration.

- si $H^A = H^B$ alors $\sigma_{eq} = (\sigma : H^A : \sigma)^{1/2}$, et on retrouve la loi de comportement élastique non-linéaire de type puissance,

- si $n = 1$,

$$\rho_0 \psi(\sigma) = \frac{1}{2} \left(\left\langle \frac{1}{\sqrt{E}} A : \sigma \right\rangle_+ : \left\langle \frac{1}{\sqrt{E}} A : \sigma \right\rangle_+ + \left\langle \frac{1}{\sqrt{E}} B : \sigma \right\rangle_- : \left\langle \frac{1}{\sqrt{E}} B : \sigma \right\rangle_- \right)$$

où $\frac{1}{\sqrt{E}} A$ et $\frac{1}{\sqrt{E}} B$ sont les décompositions de Kelvin respectives de $\frac{1}{E} H^A$ et $\frac{1}{E} H^B$. On retrouve alors le cas de la loi de comportement élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression étudiée dans la section 5.1.

- si $n = 1$ et $H^A = H^B$, on retrouve une loi de comportement élastique linéaire. □

5.2.3 Applicabilité de l'algorithme d'optimisation

Considérons maintenant la proportionnalité du potentiel (5.6) utilisant la définition de la contrainte équivalente (5.5) et de son potentiel dual par transformée de Legendre. Pour démontrer cette propriété, et donc l'utilisation possible de l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 4.2.4 avec ce potentiel, nous utilisons la méthode développée au chapitre précédent. Il est intéressant de noter que la forme explicite du potentiel dual est inconnue à ce jour.

Calculons $\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}$. En considérant les symétries de A , B et σ , l'équation (5.7) implique :

$$\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = \rho_0 \frac{\sigma_{eq}^{n-1}}{E^n} [(A : \sigma) : \langle A : \sigma \rangle_+ - (B : \sigma) : \langle B : \sigma \rangle_-]$$

Or, pour tout tenseur T d'ordre 2 réel symétrique :

$$\begin{aligned} T : \langle T \rangle_+ &= \langle T \rangle_+ : \langle T \rangle_+ \\ T : \langle T \rangle_- &= -\langle T \rangle_- : \langle T \rangle_- \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sigma : \frac{\partial \rho_0 \psi(\sigma)}{\partial \sigma} &= \rho_0 \frac{\sigma_{eq}^{n-1}}{E^n} [\langle A : \sigma \rangle_+ : \langle A : \sigma \rangle_+ + \langle B : \sigma \rangle_- : \langle B : \sigma \rangle_-] \\ &= \rho_0 \frac{\sigma_{eq}^{n+1}}{E^n} \\ &= (1 + n) \rho_0 \psi(\sigma) \end{aligned}$$

Par application du théorème de proportionnalité (section 4.3.2), on conclue que le potentiel thermodynamique $\rho_0 \psi(\sigma)$ et le potentiel dual par transformée de Legendre $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ sont, quelque soient (σ, ϵ) qui vérifient la loi de comportement, tels que :

$$\rho_0 \varphi(\epsilon) = n \rho_0 \psi(\sigma)$$

En supposant que n est indépendant des paramètres d'optimisation (θ_i, α_i) , on a donc

$$\exists a = n \in \mathbb{R} / \rho_0 \varphi(\epsilon) = a \rho_0 \psi(\sigma) \quad \forall (\theta_i, \alpha_i), \forall (\sigma, \epsilon) \text{ qui vérifient la loi de comportement}$$

En conclusion, l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 4.2.4 peut être utilisé avec la loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire de type puissance dissymétrique en traction-compression (5.7) (sous réserve de l'existence d'une solution au problème élastique de référence).

On peut énoncer ce résultat de proportionnalité par le

Théorème 15. *Quelque soient les tenseurs du quatrième ordre symétriques A et B et les réels E et n , le potentiel thermodynamique :*

$$\rho_0 \psi(\sigma) = \frac{1}{(n+1)E^n} [\langle A : \sigma \rangle_+ : \langle A : \sigma \rangle_+ + \langle B : \sigma \rangle_- : \langle B : \sigma \rangle_-]^{\frac{n+1}{2}}$$

et son potentiel thermodynamique dual par transformée de Legendre $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ sont tels que :

$$\rho_0 \varphi(\epsilon) = n \rho_0 \psi(\sigma)$$

pour tout couple (σ, ϵ) vérifiant la loi de comportement.

5.3 Comportements dissymétriques en traction-compression de matériaux composites à fibres longues

Nous nous plaçons maintenant dans le cas de matériaux composites à fibres longues de carbone ou de kevlar et à matrice epoxyde. Des études expérimentales sur des plaques stratifiées ont mis en évidence le comportement dissymétrique en traction-compression dans le sens des fibres à l'échelle mésoscopique, le comportement étant élastique linéaire orthotrope en traction et élastique non-linéaire en compression [54][65][6]. D'un autre côté, des études expérimentales et théoriques (avec simulations numériques) à l'échelle microscopique [38][31] ont montré que la dissymétrie de comportement est vraisemblablement liée à des propriétés intrinsèques des fibres et que la diminution de la contrainte à rupture en compression est associée au phénomène de micro-flambage des fibres en compression.

Dans un premier temps nous faisons une revue de ces différents résultats expérimentaux et de leurs conclusions, qui permettent, sous certaines hypothèses, de définir des modèles phénoménologiques de type élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression à l'échelle mésoscopique par la définition d'un potentiel thermodynamique. Dans le cadre de cette approche, différents modèles sont ensuite étudiés vis à vis de leur compatibilité avec l'algorithme d'optimisation considéré au chapitre 4 (sections 5.3.2 et 5.3.3). Puis le modèle tridimensionnel élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression présenté dans la section 5.1 est particularisé au cas du choix des tenseurs S^A et S^B caractérisant des lois

de comportement élastiques linéaires orthotropes. Ce modèle, compatible avec l'algorithme d'optimisation mais qui reste à valider par confrontation aux résultats expérimentaux utilise une définition de l'état de traction-compression biaxiale et s'avère être élastique linéaire ou non-linéaire par morceaux. Ce modèle est alors modifié pour obtenir une loi de comportement élastique linéaire par morceaux originale qui utilise toujours une définition biaxiale de l'état de traction-compression et qui est encore compatible avec l'algorithme d'optimisation.

5.3.1 Revue des résultats expérimentaux. Limites de l'approche phénoménologique.

Il existe de nombreuses études expérimentales dédiées à la caractérisation du comportement de matériaux composites à fibres longues de carbone ou de kevlar. Le comportement de ce matériau sollicité en traction longitudinale, c'est-à-dire dans le sens des fibres, est classiquement élastique linéaire orthotrope. Par contre, les expériences menées pour caractériser le comportement de ce matériau sollicité en compression longitudinale ont fait l'objet de nombreux protocoles expérimentaux :

- Essais de compression directs,
- Essais de flexion 4 points [54][65][6] : cet essai permet de lever les problèmes de répétabilité dus aux chargements parasites induits dans un essai de compression pure,
- Essai de flexion-compression [38][31] : cet essai permet de jouer sur le pourcentage de flexion/compression pure lors d'un essai pour caractériser l'influence du mode de chargement.

Les observations principales effectuées par Le Dantec [54] et Vittecoq [65], ont permis de définir les caractéristiques d'un modèle phénoménologique à l'échelle mésoscopique caractérisant la dissymétrie en traction-compression. Le premier résultat important est la caractérisation lors d'un essai de flexion 4 points du comportement non-linéaire du composite unidirectionnel en compression. Sur la figure 5.1 extraite de [65] est présenté un résultat d'essai qui décrit l'évolution des déformations longitudinales dans un pli de matériau composite à fibres longues de carbone et à matrice epoxyde en fonction du chargement appliqué dans le sens des fibres. La courbe supérieure représente le résultat d'un essai où les fibres sont sollicitées en traction. On perçoit bien le caractère élastique linéaire du comportement longitudinal. La courbe inférieure représente le résultat d'un essai où les fibres sont sollicitées en compression. On perçoit ici nettement le caractère non-linéaire du comportement longitudinal en compression. Ces essais ont permis de mettre en évidence les propriétés suivantes :

- égalité des modules initiaux en traction et en compression,
- perte de rigidité progressive dès la mise en charge pour l'essai de compression,
- réversibilité totale du phénomène pour l'essai de compression ce qui implique qu'il ne se produit ni endommagement ni plasticité,
- la contrainte à rupture en compression est plus faible qu'en traction.

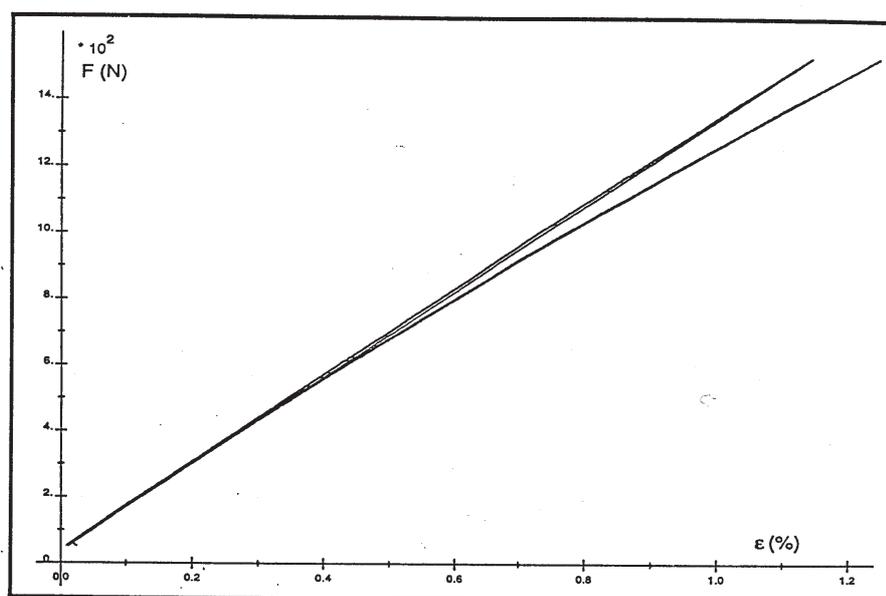


Fig. 33 : Evolution des déformations longitudinales sur T300-914 [0,90]_{6s}.

Figure 5.1 — Essai de traction-compression dans le sens des fibres d'un carbone epoxyde (document extrait de la thèse de Vittecoq [65])

Cette caractérisation du comportement dissymétrique en traction-compression de la couche composite à fibres longues permet de conclure que le comportement en compression à l'échelle du pli élémentaire peut être modélisé par une loi *élastique non-linéaire fragile*. La non-linéarité en compression est modélisée phénoménologiquement grâce à l'introduction de paramètres matériaux supplémentaires à identifier sur les résultats expérimentaux qui permettent de moduler la chute du module d'Young longitudinal lors de l'essai de compression.

Les résultats expérimentaux de Grandidier et al. [38] ont d'un autre côté mis en évidence le caractère linéaire du comportement en compression de matériaux composites à fibres de verre et à matrice epoxyde et le caractère non-linéaire du comportement en compression de matériaux composites à fibres de carbone et à matrice epoxyde. Il est alors suggéré que le comportement non-linéaire en compression avec les fibres de carbone peut être attribué à une propriété intrinsèque de la fibre de carbone. De plus, des études micro-mécaniques (Drapier et al. [31]) qui utilisent des techniques d'homogénéisation pour effectuer le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique ont permis de mettre en évidence le phénomène responsable de la diminution de la contrainte à rupture en compression : le micro-flambage des fibres. Ce phénomène fait intervenir des paramètres relatifs à l'échelle microscopique tels que le désalignement ou la non-rectitude des fibres, mais aussi des paramètres structuraux relatifs à l'échelle du stratifié tels que l'épaisseur des plis, l'orientation des plis voisins et le type de chargement (compression pure ou compression induite par flexion du pli).

Pour pouvoir utiliser l'algorithme d'optimisation du chapitre 4, la dissymétrie de comportement en traction-compression doit être modélisée au niveau du comportement du matériau

considéré. Dans la suite, nous ferons l'hypothèse que cette dissymétrie est intrinsèque au matériau, et donc que les coefficients supplémentaires introduits dans la loi de comportement sont aussi des paramètres matériau indépendants des paramètres structuraux à l'échelle du stratifié.

5.3.2 Une loi de comportement orthotrope élastique non-linéaire par morceaux avec une définition uniaxiale de l'état de traction-compression

On note δ la fonction Dirac. La fonction de Heavyside est notée H et est définie par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} H(x) = 1 & \text{si } x \geq 0 \\ H(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Définition du potentiel thermodynamique

Lors de la caractérisation expérimentale du comportement en traction et en compression longitudinale, les résultats expérimentaux sont obtenus pour un état de contraintes uniaxial où seule la contrainte σ_{11} est non-nulle, la direction 1 étant alignée avec la direction des fibres (d'un point de vue pratique la contrainte σ_{22} est très petite). Il ne permettent donc que d'identifier le module d'Young longitudinal en traction E_1 et en compression E_1^C .

Dans l'état de traction, la loi de comportement est élastique linéaire orthotrope, ce qui s'écrit dans le repère des fibres :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22} \\ \epsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} \\ \epsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}} \end{cases} \quad (5.8)$$

On suppose alors que le loi de comportement en compression est élastique non-linéaire orthotrope. Bien que non-identifiés dans les essais expérimentaux présentés dans la section précédente, le module d'Young transverse E_2 et le rapport ν_{12}/E_1 sont supposés identiques en traction et en compression :

$$E_2^C = E_2 \quad \frac{\nu_{12}^C}{E_1^C} = \frac{\nu_{12}}{E_1}$$

Pour quantifier la chute du module d'Young longitudinal en compression dans le sens des fibres, deux approches peuvent être considérées suivant que cette évolution du module d'Young longitudinal en compression est caractérisé par une loi en contraintes ou par une loi en déformation.

Nous nous plaçons ici dans le cas d'une approche en contraintes, la démarche de définition de la loi de comportement dans une approche en déformations étant similaire. On introduit un paramètre matériau $\beta > 0$, et on postule un module d'Young longitudinal en compression de la forme :

$$E_1^C = E_1(1 - \beta\sigma_{11}^2 H(-\sigma_{11}))$$

La loi de comportement élastique non-linéaire orthotrope en compression s'écrit alors :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1(1 - \beta\sigma_{11}^2 H(-\sigma_{11}))} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{22} \\ \epsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} \\ \epsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}} \end{cases} \quad (5.9)$$

La définition de l'état de traction-compression est alors uniaxiale dans le sens où seule la valeur de la contrainte σ_{11} est utilisée. On remarque que cette loi de comportement inclut celle définie en traction et est continue.

Le potentiel thermodynamique dont dérive la loi de comportement (5.9), défini pour $\sigma_{11} > -1/\sqrt{\beta}$, convexe et continûment différentiable, est défini par

$$\begin{aligned} \rho_0\psi(\sigma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{11}^2}{E_1} H(\sigma_{11}) - \frac{1}{\beta E_1} \log(1 - \beta\sigma_{11}^2 H(-\sigma_{11})) \right. \\ \left. + \frac{\sigma_{22}^2}{E_2} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \right) \quad (5.10) \end{aligned}$$

Démonstration. Les expressions de ϵ_{22} et ϵ_{12} sont immédiates. Différencions le potentiel par rapport à σ_{11} :

$$\rho_0 \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma_{11}} = \frac{1}{2} \left[2\frac{\sigma_{11}}{E_1} H(\sigma_{11}) + \frac{\sigma_{11}^2}{E_1} \delta(\sigma_{11}) - \frac{1}{\beta E_1} \frac{-2\beta\sigma_{11} H(-\sigma_{11}) + \beta\sigma_{11}^2 \delta(-\sigma_{11})}{1 - \beta\sigma_{11}^2 H(-\sigma_{11})} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{22} \right]$$

Or $x\delta(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma_{11}} &= \frac{\sigma_{11}}{E_1} H(\sigma_{11}) + \frac{\sigma_{11} H(-\sigma_{11})}{E_1(1 - \beta\sigma_{11}^2 H(-\sigma_{11}))} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{22} \\ &= \frac{\sigma_{11} H(\sigma_{11}) + \sigma_{11} H(-\sigma_{11}) - \beta\sigma_{11}^3 H(\sigma_{11}) H(-\sigma_{11})}{E_1(1 - \beta\sigma_{11}^2 H(-\sigma_{11}))} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{22} \end{aligned}$$

Or $xH(x) + xH(-x) = x$ et $xH(x)H(-x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc

$$\rho_0 \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma_{11}} = \frac{\sigma_{11}}{E_1(1 - \beta\sigma_{11}^2 H(-\sigma_{11}))} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{22}$$

La loi de comportement est continue. Le potentiel (5.10) est la somme de deux fonctions convexes pour $\sigma_{11} > -1/\sqrt{\beta}$, et est donc convexe. \square

Preuve de la non-applicabilité de l'algorithme d'optimisation

Calculons $\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}$:

$$\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = \left(\frac{\sigma_{11}^2}{E_1(1 - \alpha \sigma_{11}^2 H(-\sigma_{11}))} + \frac{\sigma_{22}^2}{E_2} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \right)$$

Le rapport $(\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}) / (\rho_0 \psi(\sigma))$ est fonction des contraintes et n'est donc pas constant. Le théorème de proportionnalité (section 4.3.2) implique alors que le potentiel $\rho_0 \psi(\sigma)$ et son potentiel dual ne sont pas proportionnels et donc que l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 4.2.4 ne peut pas être appliqué avec la loi de comportement (5.9).

5.3.3 Une loi de comportement orthotrope élastique linéaire par morceaux avec une définition uniaxiale de l'état de traction-compression

Le modèle phénoménologique précédent s'avère donc être incompatible avec l'algorithme d'optimisation. Il peut être simplifié en faisant l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire orthotrope dans l'état de traction et aussi dans l'état de compression.

Ce modèle, extrait de [65], est prouvé être compatible avec l'algorithme d'optimisation et sera à la base des exemples numériques présentés dans la section 5.4.

Loi de comportement élastique linéaire orthotrope en traction et en compression

La loi de comportement élastique linéaire orthotrope associée à un comportement en traction dans le sens des fibres est encore choisie sous la forme (5.8). On suppose que le module d'Young longitudinal en compression E_1^C , inférieur à E_1 , est indépendant de l'état de contraintes. Le module d'Young transverse E_2 et le rapport ν_{12}/E_1 sont toujours supposés identiques en traction et en compression :

$$E_2^C = E_2 \quad \frac{\nu_{12}^C}{E_1^C} = \frac{\nu_{12}}{E_1}$$

La loi de comportement élastique linéaire orthotrope associée à un comportement en compression dans le sens des fibres s'écrit donc :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1^C} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22} \\ \epsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} \\ \epsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}} \end{cases} \quad (5.11)$$

Potentiel thermodynamique

Considérons l'état de traction ou de compression défini à l'aide de la valeur du signe de la contrainte longitudinale. Ceci correspond à une approche en contraintes. Le potentiel thermodynamique qui tient compte de la dissymétrie de comportement en traction et en compression est alors écrit sous la forme :

$$\rho_0 \psi(\sigma) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_{11}^2}{E_1} + \left(\frac{1}{E_1^C} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{11}^2 \text{H}(-\sigma_{11}) + \frac{\sigma_{22}^2}{E_2} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \right]$$

Différencions ce potentiel par rapport à σ_{11} :

$$\rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma_{11}} = \frac{1}{2} \left[2 \frac{\sigma_{11}}{E_1} + \left(\frac{1}{E_1^C} - \frac{1}{E_1} \right) (2\sigma_{11} \text{H}(-\sigma_{11}) - \sigma_{11}^2 \delta(-\sigma_{11})) - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22} \right] \quad (5.12)$$

Or $x\delta(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc

$$\rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma_{11}} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} + \left(\frac{1}{E_1^C} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{11} \text{H}(-\sigma_{11}) - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22}$$

La différenciation du potentiel par rapport à σ_{22} et à σ_{12} est immédiate. La loi de comportement associée s'écrit donc :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} + \left(\frac{1}{E_1^C} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{11} \text{H}(-\sigma_{11}) - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22} \\ \epsilon_{22} = - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} \\ \epsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}} \end{cases} \quad (5.13)$$

Cette loi de comportement est continue. Pour $\sigma_{11} \geq 0$, elle correspond à l'équation (5.8) et pour $\sigma_{11} < 0$, elle correspond à l'équation (5.11).

Applicabilité de l'algorithme d'optimisation

Calculons $\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}$. On déduit de l'équation (5.13) que

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma_{11}} &= \frac{\sigma_{11}^2}{E_1} + \left(\frac{1}{E_1^C} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{11}^2 \text{H}(-\sigma_{11}) - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} \sigma_{22} \\ \sigma_{22} \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma_{22}} &= \frac{\sigma_{22}^2}{E_2} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma_{12}} &= \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} \\ \sigma_{21} \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma_{21}} &= \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} &= \frac{\sigma_{11}^2}{E_1} + \left(\frac{1}{E_1^C} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{11}^2 \text{H}(-\sigma_{11}) + \frac{\sigma_{22}^2}{E_2} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \\ &= 2\rho_0 \psi(\sigma)\end{aligned}$$

Par application du théorème de proportionnalité (section 4.3.2), on conclue que le potentiel thermodynamique $\rho_0 \psi(\sigma)$ et le potentiel dual par transformée de Legendre $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ sont, quelque soient (σ, ϵ) qui vérifient la loi de comportement, tels que :

$$\rho_0 \varphi(\epsilon) = \rho_0 \psi(\sigma)$$

En dénotant toujours les paramètres d'optimisation par (θ_i, α_i) , on a donc

$$\exists a = 1 \in \mathbb{R} / \rho_0 \varphi(\epsilon) = a \rho_0 \psi(\sigma) \quad \forall (\theta_i, \alpha_i), \forall (\sigma, \epsilon) \text{ qui vérifient la loi de comportement}$$

En conclusion, l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 4.2.4 peut être utilisé avec la loi de comportement (5.13) (sous réserve de l'existence d'une solution au problème élastique de référence qui est démontrée ci-après).

Expression explicite du potentiel dual

Dans ce cas particulier, l'expression explicite du potentiel dual $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ peut être déterminée. La loi de comportement est initialement sous la forme $\epsilon = \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}$. Cette relation est inversée pour obtenir $\sigma = f(\epsilon)$ dans laquelle f est une fonction explicite. La loi de comportement étant définie par la relation $\sigma = \rho_0 \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon}$, on déduit que $\rho_0 \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon} = \int f(\epsilon) d\epsilon$. Cette démarche conduit à l'expression suivante, avec $\nu_{12}^C = E_1^C \frac{\nu_{12}}{E_1}$:

$$\begin{aligned}\rho_0 \varphi(\epsilon) &= \frac{1}{2} \left[\frac{E_1}{1 - \nu_{12}^C \nu_{21}} (\epsilon_{11} + \nu_{21} \epsilon_{22})^2 + E_2 \epsilon_{22}^2 + 2G_{12} (\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{21}^2) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{E_1^C}{1 - \nu_{12}^C \nu_{21}} - \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \right) (\epsilon_{11} + \nu_{21} \epsilon_{22})^2 \text{H}(-(\epsilon_{11} + \nu_{21} \epsilon_{22})) \right] \quad (5.14)\end{aligned}$$

La loi de comportement associée est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}(\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22}) \\ \quad + \left(\frac{E_1^C}{1 - \nu_{12}^C\nu_{21}} - \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) (\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22}) \text{H}(-(\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22})) \\ \sigma_{22} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}(\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22}) + E_2\epsilon_{22} \\ \quad + \left(\frac{E_1^C}{1 - \nu_{12}^C\nu_{21}} - \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) (\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22}) \text{H}(-(\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22})) \\ \sigma_{12} = 2G_{12}\epsilon_{12} \end{array} \right.$$

Existence d'une solution unique au problème élastique de référence

Etudions tout d'abord la convexité du potentiel (5.12). Ce potentiel et son potentiel dual étant proportionnels et même égaux, nous allons utiliser la caractérisation de la stricte convexité définie dans la section 4.3.4. Montrons que $\psi(\tau) + \psi(\sigma) - \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma} : \tau > 0$ pour tout $\sigma \neq \tau$. Le potentiel $\rho_0\psi(\sigma)$ est constitué de la somme de deux termes :

$$\begin{aligned} \rho_0\psi_1(\sigma) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_{11}^2}{E_1} + \frac{\sigma_{22}^2}{E_2} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \right] \\ \rho_0\psi_2(\sigma) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{E_1^C} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{11}^2 \text{H}(-\sigma_{11}) \right] \end{aligned}$$

Le potentiel $\rho_0\psi_1(\sigma)$ est le potentiel thermodynamique d'un matériau orthotrope. Il est donc strictement convexe. La somme d'une fonction strictement convexe et d'une fonction convexe étant strictement convexe, il reste alors à démontrer que le potentiel $\rho_0\psi_2(\sigma)$ est convexe, soit

$$I = \psi_2(\tau) + \psi_2(\sigma) - \frac{\partial\psi_2(\sigma)}{\partial\sigma} : \tau \geq 0 \quad \forall \sigma \neq \tau$$

Cette grandeur I se met sous la forme :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1^C} - \frac{1}{E_1} \right) I_1 \\ \text{avec } I_1 &= (\tau_{11}^2 \text{H}(-\tau_{11}) + \sigma_{11}^2 \text{H}(-\sigma_{11}) - 2\sigma_{11}\tau_{11} \text{H}(-\sigma_{11})) \end{aligned}$$

La grandeur $\frac{1}{E_1^C} - \frac{1}{E_1}$ est positive car $E_1 \geq E_1^C$ par définition. Considérons les différents cas possibles :

- si $\sigma_{11} > 0$ et $\tau_{11} > 0$ alors $I_1 = 0$
- si $\sigma_{11} < 0$ et $\tau_{11} > 0$ alors $I_1 = \sigma_{11}^2 - 2\sigma_{11}\tau_{11}$. Or $\sigma_{11} < 0$ et $\tau_{11} > 0$ implique que $\sigma_{11}\tau_{11} < 0$, donc $I_1 > 0$,
- si $\sigma_{11} > 0$ et $\tau_{11} < 0$ alors $I_1 = \tau_{11}^2$, donc $I_1 > 0$,
- si $\sigma_{11} < 0$ et $\tau_{11} < 0$ alors $I_1 = (\tau_{11} - \sigma_{11})^2$, donc $I_1 \geq 0$,

- si $\sigma_{11} = 0$ et $\tau_{11} > 0$ alors $I_1 = 0$,
- si $\sigma_{11} = 0$ et $\tau_{11} < 0$ alors $I_1 = \tau_{11}^2$, donc $I_1 > 0$,
- si $\sigma_{11} > 0$ et $\tau_{11} = 0$ alors $I_1 = 0$,
- si $\sigma_{11} < 0$ et $\tau_{11} = 0$ alors $I_1 = \sigma_{11}^2$, donc $I_1 > 0$.

Donc $I \geq 0 \forall (\sigma, \tau)$, donc $\rho_0 \varphi_2(\sigma)$ est convexe. On en déduit que le potentiel (5.12) est strictement convexe. La transformée de Legendre d'un potentiel strictement convexe étant strictement convexe, on déduit que le potentiel $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ défini par (5.14) est strictement convexe.

Montrons maintenant que :

$$\exists \beta > 0 / \rho_0 \varphi(\epsilon) \geq \beta \epsilon : \epsilon \quad \forall \epsilon \quad (5.15)$$

Le potentiel $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ défini par (5.14) s'exprime sous la forme équivalente suivante :

- si $\epsilon_{11} + \nu_{21} \epsilon_{22} \geq 0$ alors

$$\rho_0 \varphi(\epsilon) = \frac{1}{2} \left[\frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} (\epsilon_{11} + \nu_{21} \epsilon_{22})^2 + E_2 \epsilon_{22}^2 + 2G_{12} (\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{21}^2) \right]$$

- si $\epsilon_{11} + \nu_{21} \epsilon_{22} < 0$ alors

$$\rho_0 \varphi(\epsilon) = \frac{1}{2} \left[\frac{E_1^C}{1 - \nu_{12}^C \nu_{21}^C} (\epsilon_{11} + \nu_{21} \epsilon_{22})^2 + E_2 \epsilon_{22}^2 + 2G_{12} (\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{21}^2) \right]$$

Dans les deux cas, la forme obtenue correspond au potentiel thermodynamique d'un matériau élastique linéaire orthotrope. On en déduit que :

- si $\epsilon_{11} + \nu_{21} \epsilon_{22} \geq 0$ alors $\exists \beta_1 > 0 / \rho_0 \varphi(\epsilon) \geq \beta_1 \epsilon : \epsilon \quad \forall \epsilon$
- si $\epsilon_{11} + \nu_{21} \epsilon_{22} < 0$ alors $\exists \beta_2 > 0 / \rho_0 \varphi(\epsilon) \geq \beta_2 \epsilon : \epsilon \quad \forall \epsilon$

Choisissons $\beta = \min(\beta_1, \beta_2)$. La propriété (5.15) de coercivité du potentiel $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ est alors démontrée.

La loi de comportement dérivant de ce potentiel étant continue, toutes les hypothèses de la section 4.1.3 sont réunies pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution au problème élastique de référence.

5.3.4 Une loi de comportement élastique non-linéaire par morceaux avec une définition biaxiale de l'état de traction-compression (utilisation de la décomposition de Kelvin)

Les deux précédents modèles utilisent une définition uniaxiale de l'état de traction-compression pour n'introduire que des grandeurs identifiables sur les essais expérimentaux disponibles. Ces essais ne permettent en effet que l'obtention d'informations sur la chute du module d'Young longitudinal pour une sollicitation de traction ou de compression longitudinale (c'est-à-dire dans le sens des fibres). La modélisation a donc été restreinte aux comportements en traction et en compression élastiques orthotropes où seul le module d'Young longitudinal diffère dans les deux états. Une caractérisation expérimentale biaxiale

à l'échelle du pli élémentaire de la dissymétrie de comportement en traction-compression est nécessaire pour permettre l'élaboration et la validation de modèles de comportement à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire par choix de potentiel thermodynamique.

Nous proposons ici d'adapter le modèle de comportement tridimensionnel anisotrope élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression présenté dans la section 5.1 au cadre de l'élasticité bidimensionnelle sous l'hypothèse des contraintes planes en supposant que les lois de comportement de référence en traction et en compression sont élastiques linéaires orthotropes. L'idée forte de ce modèle est que les identifications des lois de comportement élastiques linéaires orthotropes en traction et en compression sont suffisantes pour définir le potentiel thermodynamique qui modélise la dissymétrie de comportement en traction-compression. La définition de cette dissymétrie de comportement utilise alors l'ensemble du tenseur des contraintes et est donc biaxiale. Ce modèle qui est un cas particulier de celui présenté dans la section 5.1 est donc compatible avec l'algorithme d'optimisation. Son utilisation pour modéliser le comportement dissymétrique en traction-compression de matériaux composites à fibres longues reste bien sûr à valider sur des résultats expérimentaux.

Décomposition de Kelvin d'un tenseur de souplesse orthotrope

On se place dans le cadre de l'élasticité bidimensionnelle sous l'hypothèse des contraintes planes. Considérons un matériau élastique linéaire orthotrope. Son potentiel thermodynamique écrit en contraintes est :

$$\rho_0 \psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma : S : \sigma = \frac{1}{2} (A : \sigma) : (A : \sigma)$$

Le tenseur de souplesse S est défini par les termes non-nuls :

$$\begin{cases} S_{1111} = \frac{1}{E_1} \\ S_{2222} = \frac{1}{E_2} \\ S_{1122} = S_{2211} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ S_{1212} = S_{1221} = S_{2121} = S_{2112} = \frac{1}{4G_{12}} \end{cases} \quad (5.16)$$

et la décomposition de Kelvin A de S est définie par les termes non-nuls :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{1111} = \frac{1}{4\sqrt{2}E_2^2\nu_{12}^2} \left(\frac{(-E_1 + E_2 + \sqrt{\Delta})^2 \sqrt{\frac{E_1+E_2+\sqrt{\Delta}}{E_1E_2}}}{2 - \frac{2(E_1-E_2)}{E_1-E_2+\sqrt{\Delta}}} + \frac{(E_1 - E_2 + \sqrt{\Delta})^2 \sqrt{\frac{E_1+E_2-\sqrt{\Delta}}{E_1E_2}}}{2 - \frac{2(E_1-E_2)}{-E_1+E_2+\sqrt{\Delta}}} \right) \\ A_{2222} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\frac{E_1+E_2+\sqrt{\Delta}}{E_1E_2}}}{2 - \frac{2(E_1-E_2)}{E_1-E_2+\sqrt{\Delta}}} + \frac{\sqrt{\frac{E_1+E_2-\sqrt{\Delta}}{E_1E_2}}}{2 - \frac{2(E_1-E_2)}{-E_1+E_2+\sqrt{\Delta}}} \right) \\ A_{1122} = A_{2211} = \frac{E_2\nu_{12}}{\sqrt{2}\sqrt{\Delta}} \left(\sqrt{\frac{E_1 + E_2 - \sqrt{\Delta}}{E_1E_2}} - \sqrt{\frac{E_1 + E_2 + \sqrt{\Delta}}{E_1E_2}} \right) \\ A_{1212} = A_{1221} = A_{2121} = A_{2112} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2G_{12}}} \\ \text{avec } \Delta = (E_1 - E_2)^2 + 4E_2^2\nu_{12}^2 \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Introduction de la dissymétrie en traction-compression

Pour introduire la loi de comportement dissymétrique en traction-compression, on procède comme dans la section 5.1.2.

On introduit deux tenseurs de souplesse S^A et S^B qui définissent les comportements élastiques linéaires orthotropes respectifs dans l'état de traction et dans l'état de compression. On note A et B les décompositions de Kelvin de S^A et S^B . On définit alors le potentiel thermodynamique qui prend en compte la dissymétrie de comportement en traction-compression sous la forme :

$$\rho_0\psi(\sigma) = \frac{1}{2} \langle A : \sigma \rangle_+ : \langle A : \sigma \rangle_+ + \frac{1}{2} \langle B : \sigma \rangle_- : \langle B : \sigma \rangle_- \quad (5.18)$$

Ce potentiel est continûment différentiable, convexe et compatible avec l'algorithme d'optimisation (voir section 5.1.2). La loi de comportement continue associée s'écrit :

$$\epsilon = \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma} = A : \langle A : \sigma \rangle_+ - B : \langle B : \sigma \rangle_-$$

Expression de la loi de comportement par morceaux

Il est alors possible d'écrire explicitement la loi de comportement morceau par morceau. Plaçons nous dans le repère des fibres dans lequel le tenseur des contraintes s'écrit

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

On note $T^A = A : \sigma$ et $T^B = B : \sigma$. Ces tenseurs s'écrivent :

$$T^A = \begin{pmatrix} A_{1111}\sigma_{11} + A_{1122}\sigma_{22} & 2A_{1212}\sigma_{12} \\ 2A_{1212}\sigma_{12} & A_{1122}\sigma_{11} + A_{2222}\sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

$$T^B = \begin{pmatrix} B_{1111}\sigma_{11} + B_{1122}\sigma_{22} & 2B_{1212}\sigma_{12} \\ 2B_{1212}\sigma_{12} & B_{1122}\sigma_{11} + B_{2222}\sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

On détermine les valeurs propres $T_I^{A/B}$ et $T_{II}^{A/B}$ de $T^{A/B}$:

$$T_I^{A/B} = \frac{T_{11}^{A/B} + T_{22}^{A/B} - \sqrt{(T_{11}^{A/B} - T_{22}^{A/B})^2 + 4T_{12}^{A/B}{}^2}}{2}$$

$$T_{II}^{A/B} = \frac{T_{11}^{A/B} + T_{22}^{A/B} + \sqrt{(T_{11}^{A/B} - T_{22}^{A/B})^2 + 4T_{12}^{A/B}{}^2}}{2}$$

Si T_I^A et T_{II}^A sont négatifs, $\langle A : \sigma \rangle_+ = 0 \Rightarrow A : \langle A : \sigma \rangle_+ = 0$

Si T_I^B et T_{II}^B sont positifs, $-\langle B : \sigma \rangle_- = 0 \Rightarrow -B : \langle B : \sigma \rangle_- = 0$

Si T_I^A et T_{II}^A sont positifs, $\langle A : \sigma \rangle_+ = A : \sigma \Rightarrow A : \langle A : \sigma \rangle_+ = A : A : \sigma = S^A : \sigma$

Si T_I^B et T_{II}^B sont négatifs, $-\langle B : \sigma \rangle_- = B : \sigma \Rightarrow -B : \langle B : \sigma \rangle_- = B : B : \sigma = S^B : \sigma$

Si T_I^A est positif et T_{II}^A est négatif, la partie du potentiel thermodynamique relative à A se met sous la forme :

$$\frac{1}{2} \langle A : \sigma \rangle_+ : \langle A : \sigma \rangle_+ = \frac{1}{4} \left(T_{11}^{A^2} + T_{22}^{A^2} + 2T_{12}^{A^2} - (T_{11}^A + T_{22}^A) \sqrt{(T_{11}^A - T_{22}^A)^2 + 4T_{12}^{A^2}} \right)$$

La quantité $A : \langle A : \sigma \rangle_+$ s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A : \langle A : \sigma \rangle_+)_{11} = \frac{1}{2} \left(A_{1111} T_{11}^A + A_{1122} T_{22}^A - \frac{(A_{1111} - A_{1122})(T_{11}^{A^2} - T_{22}^{A^2})}{2\sqrt{(T_{11}^A - T_{22}^A)^2 + 4T_{12}^{A^2}}} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{(A_{1111} + A_{1122})}{2} \sqrt{(T_{11}^A - T_{22}^A)^2 + 4T_{12}^{A^2}} \right) \\ (A : \langle A : \sigma \rangle_+)_{22} = \frac{1}{2} \left(A_{1122} T_{11}^A + A_{2222} T_{22}^A - \frac{(A_{2222} - A_{1122})(T_{22}^{A^2} - T_{11}^{A^2})}{2\sqrt{(T_{11}^A - T_{22}^A)^2 + 4T_{12}^{A^2}}} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{(A_{1122} + A_{2222})}{2} \sqrt{(T_{11}^A - T_{22}^A)^2 + 4T_{12}^{A^2}} \right) \\ (A : \langle A : \sigma \rangle_+)_{12} = A_{1212} T_{12}^A \left(1 - \frac{T_{11}^A + T_{22}^A}{\sqrt{(T_{11}^A - T_{22}^A)^2 + 4T_{12}^{A^2}}} \right) \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Si T_I^B est négatif et T_{II}^B est positif, on retrouve l'expression (5.21) pour $-B : \langle B : \sigma \rangle_-$, avec les tenseurs B et T^B à la place de A et T^A .

Si T_I^A est négatif et T_{II}^A est positif, la partie du potentiel thermodynamique relative à A se met sous la forme :

$$\frac{1}{2} \langle A : \sigma \rangle_+ : \langle A : \sigma \rangle_+ = \frac{1}{4} \left(T_{11}^{A^2} + T_{22}^{A^2} + 2T_{12}^{A^2} + (T_{11}^A + T_{22}^A) \sqrt{(T_{11}^A - T_{22}^A)^2 + 4T_{12}^{A^2}} \right)$$

La quantité $A : \langle A : \sigma \rangle_+$ s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} (A : \langle A : \sigma \rangle_+)_{11} = \frac{1}{2} \left(A_{1111} T_{11}^A + A_{1122} T_{22}^A + \frac{(A_{1111} - A_{1122})(T_{11}^{A^2} - T_{22}^{A^2})}{2\sqrt{(T_{11}^A - T_{22}^A)^2 + 4T_{12}^{A^2}}} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{(A_{1111} + A_{1122})}{2} \sqrt{(T_{11}^A - T_{22}^A)^2 + 4T_{12}^{A^2}} \right) \\ (A : \langle A : \sigma \rangle_+)_{22} = \frac{1}{2} \left(A_{1122} T_{11}^A + A_{2222} T_{22}^A + \frac{(A_{2222} - A_{1122})(T_{22}^{A^2} - T_{11}^{A^2})}{2\sqrt{(T_{11}^A - T_{22}^A)^2 + 4T_{12}^{A^2}}} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{(A_{1122} + A_{2222})}{2} \sqrt{(T_{11}^A - T_{22}^A)^2 + 4T_{12}^{A^2}} \right) \\ (A : \langle A : \sigma \rangle_+)_{12} = A_{1212} T_{12}^A \left(1 + \frac{T_{11}^A + T_{22}^A}{\sqrt{(T_{11}^A - T_{22}^A)^2 + 4T_{12}^{A^2}}} \right) \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Si T_I^B est positif et T_{II}^B est négatif, on retrouve l'expression (5.22) pour $-B : \langle B : \sigma \rangle_-$, avec les tenseurs B et T^B à la place de A et T^A .

Si les deux valeurs propres de T^A sont de même signe et si celles de T^B sont de même signe, la loi de comportement obtenue est linéaire en contraintes sur le morceau considéré.

Par contre si les deux valeurs propres de T^A sont de signe opposés, $A : \langle A : \sigma \rangle_+$ est non-linéaire en contraintes (eq (5.21) et (5.22)). Alors $\epsilon = A : \langle A : \sigma \rangle_+ - B : \langle B : \sigma \rangle_-$ est non-linéaire en contraintes sur le morceau considéré, sauf dans le cas dégénéré où $B = A$ pour lequel on retrouve la loi de comportement élastique linéaire (et symétrique en traction et en compression). De même si les valeurs propres de B sont de signes opposés, la loi de comportement est non-linéaire sur le morceau considéré.

La loi de comportement dérivant du potentiel (5.18), avec pour choix de S^A et de S^B des lois de comportement élastiques linéaires orthotropes, est donc définie sur certains morceaux par une loi de comportement élastique linéaire et sur d'autres par une loi de comportement élastique non-linéaire.

5.3.5 Définition d'un nouveau modèle de comportement élastique linéaire par morceaux avec une définition biaxiale de l'état de traction-compression

La loi de comportement obtenue dans la section précédente est élastique linéaire et non-linéaire par morceaux. Le comportement peut donc être non-linéaire alors que l'on a fait l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire dans l'état de traction et dans l'état de compression. Nous proposons ici un modèle original, toujours basé sur les décompositions de Kelvin, qui permet d'obtenir une loi de comportement élastique linéaire par morceaux avec une définition de l'état de traction et de l'état de compression biaxiale qui fait intervenir les composantes σ_{11} et σ_{22} du tenseur des contraintes.

Dans le modèle précédent, si on se place dans le cas particulier où $\sigma_{12} = 0$ dans le repère des fibres, alors $T_{12}^A = T_{12}^B = 0$ (voir eq (5.19) et (5.20)). Alors $A : \langle A : \sigma \rangle_+$ et $-B : \langle B : \sigma \rangle_-$ restent linéaires en σ_{11} et σ_{22} quelque soit les signes de $T_I^{A/B}$ et $T_{II}^{A/B}$.

Cette remarque nous indique que l'introduction de la dissymétrie de comportement en traction et en compression dans le cadre de la décomposition de Kelvin implique une loi de comportement linéaire par morceaux si les contraintes σ_{12} n'interviennent pas dans la définition de la dissymétrie. Autrement dit, en scindant le potentiel thermodynamique en deux termes distincts dont un n'est fonction que des contraintes σ_{12} , la loi de comportement obtenue après introduction de la dissymétrie de comportement en traction et en compression sur le terme ne faisant pas intervenir σ_{12} est élastique linéaire par morceaux.

Décomposition de Kelvin partielle d'un tenseur de souplesse élastique linéaire orthotrope

Considérons l'écriture du potentiel thermodynamique $\rho_0\psi(\sigma)$ dans le repère d'orthotropie du matériau sous la forme :

$$\begin{aligned}\rho_0\psi(\sigma) &= \frac{1}{2} \sigma^* : S^* : \sigma^* + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (A^* : \sigma^*) : (A^* : \sigma^*) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \right)\end{aligned}$$

où l'on a noté

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

où $S^* = S$ (eq (5.16)) sauf pour les termes $S_{1212}^* = S_{1221}^* = S_{2112}^* = S_{2121}^* = 0$,
et où $A^* = A$ (eq (5.17)) sauf pour les termes $A_{1212}^* = A_{1221}^* = A_{2112}^* = A_{2121}^* = 0$.

Introduction de la dissymétrie de comportement en traction et en compression

On considère deux tenseurs S^{*A} et S^{*B} définis à partir des tenseurs S^A et S^B de comportement élastiques linéaires orthotropes d'un pli composite unidirectionnel respectivement en traction et en compression.

On détermine les racines carrées (au sens de la décompositions de Kelvin) A^* et B^* de S^{*A} et S^{*B} . On définit alors, dans le repère d'orthotropie associé à S^A et S^B , le potentiel thermodynamique qui prend en compte la dissymétrie de comportement en traction-compression sous la forme :

$$\rho_0\psi(\sigma) = \frac{1}{2} \langle A^* : \sigma \rangle_+ : \langle A^* : \sigma \rangle_+ + \frac{1}{2} \langle B^* : \sigma \rangle_- : \langle B^* : \sigma \rangle_- + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \right) \quad (5.23)$$

Le tenseur $A^* : \sigma^*$ s'écrit :

$$A^* : \sigma^* = \begin{pmatrix} A_{1111}^* \sigma_{11} + A_{1122}^* \sigma_{22} & 0 \\ 0 & A_{1122}^* \sigma_{11} + A_{2222}^* \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}(\langle A^* : \sigma^* \rangle_+)_11 &= (A_{1111}^* \sigma_{11} + A_{1122}^* \sigma_{22}) H(A_{1111}^* \sigma_{11} + A_{1122}^* \sigma_{22}) \\ (\langle A^* : \sigma^* \rangle_+)_22 &= (A_{1122}^* \sigma_{11} + A_{2222}^* \sigma_{22}) H(A_{1122}^* \sigma_{11} + A_{2222}^* \sigma_{22}) \\ (\langle A^* : \sigma^* \rangle_+)_12 &= (\langle A^* : \sigma^* \rangle_+)_21 = 0\end{aligned}$$

En considérant que $H(x)^2 = H(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle A^* : \sigma^* \rangle_+ : \langle A^* : \sigma^* \rangle_+ &= (A_{1111}^* \sigma_{11} + A_{1122}^* \sigma_{22})^2 H(A_{1111}^* \sigma_{11} + A_{1122}^* \sigma_{22}) \\ &\quad + (A_{1122}^* \sigma_{11} + A_{2222}^* \sigma_{22})^2 H(A_{1122}^* \sigma_{11} + A_{2222}^* \sigma_{22}) \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue, on a :

$$\begin{aligned} \langle B^* : \sigma^* \rangle_- : \langle B^* : \sigma^* \rangle_- &= (B_{1111}^* \sigma_{11} + B_{1122}^* \sigma_{22})^2 H(-(B_{1111}^* \sigma_{11} + B_{1122}^* \sigma_{22})) \\ &\quad + (B_{1122}^* \sigma_{11} + B_{2222}^* \sigma_{22})^2 H(-(B_{1122}^* \sigma_{11} + B_{2222}^* \sigma_{22})) \end{aligned}$$

Et le potentiel (5.23) se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \rho_0 \psi(\sigma) &= \frac{1}{2} \left((A_{1111}^* \sigma_{11} + A_{1122}^* \sigma_{22})^2 H(A_{1111}^* \sigma_{11} + A_{1122}^* \sigma_{22}) \right. \\ &\quad + (A_{1122}^* \sigma_{11} + A_{2222}^* \sigma_{22})^2 H(A_{1122}^* \sigma_{11} + A_{2222}^* \sigma_{22}) \\ &\quad + (B_{1111}^* \sigma_{11} + B_{1122}^* \sigma_{22})^2 H(-(B_{1111}^* \sigma_{11} + B_{1122}^* \sigma_{22})) \\ &\quad \left. + (B_{1122}^* \sigma_{11} + B_{2222}^* \sigma_{22})^2 H(-(B_{1122}^* \sigma_{11} + B_{2222}^* \sigma_{22})) + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ce potentiel est continûment différentiable et la loi de comportement élastique linéaire par morceaux associée s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{11} = A_{1111}^* \langle A_{1111}^* \sigma_{11} + A_{1122}^* \sigma_{22} \rangle_+ + A_{1122}^* \langle A_{1122}^* \sigma_{11} + A_{2222}^* \sigma_{22} \rangle_+ \\ \quad - B_{1111}^* \langle B_{1111}^* \sigma_{11} + B_{1122}^* \sigma_{22} \rangle_- - B_{1122}^* \langle B_{1122}^* \sigma_{11} + B_{2222}^* \sigma_{22} \rangle_- \\ \epsilon_{22} = A_{1122}^* \langle A_{1111}^* \sigma_{11} + A_{1122}^* \sigma_{22} \rangle_+ + A_{2222}^* \langle A_{1122}^* \sigma_{11} + A_{2222}^* \sigma_{22} \rangle_+ \\ \quad + B_{1122}^* \langle B_{1111}^* \sigma_{11} + B_{1122}^* \sigma_{22} \rangle_- + B_{2222}^* \langle B_{1122}^* \sigma_{11} + B_{2222}^* \sigma_{22} \rangle_- \\ \epsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}} \end{array} \right. \quad (5.25)$$

Applicabilité de l'algorithme d'optimisation

Calculons $\sigma : \rho_0 \frac{\partial \psi(\sigma)}{\partial \sigma}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \frac{\partial \rho_0 \psi(\sigma)}{\partial \sigma_{11}} &= A_{1111}^* \sigma_{11} (A_{1111}^* \sigma_{11} + A_{1122}^* \sigma_{22}) H(A_{1111}^* \sigma_{11} + A_{1122}^* \sigma_{22}) \\ &\quad + A_{1122}^* \sigma_{11} (A_{1122}^* \sigma_{11} + A_{2222}^* \sigma_{22}) H(A_{1122}^* \sigma_{11} + A_{2222}^* \sigma_{22}) \\ &\quad + B_{1111}^* \sigma_{11} (B_{1111}^* \sigma_{11} + B_{1122}^* \sigma_{22}) H(-(B_{1111}^* \sigma_{11} + B_{1122}^* \sigma_{22})) \\ &\quad + B_{1122}^* \sigma_{11} (B_{1122}^* \sigma_{11} + B_{2222}^* \sigma_{22}) H(-(B_{1122}^* \sigma_{11} + B_{2222}^* \sigma_{22})) \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue :

$$\begin{aligned} \sigma_{22}\rho_0 \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma_{22}} = & A_{1122}^*\sigma_{22}(A_{1111}^*\sigma_{11} + A_{1122}^*\sigma_{22}) \text{H}(A_{1111}^*\sigma_{11} + A_{1122}^*\sigma_{22}) \\ & + A_{2222}^*\sigma_{22}(A_{1122}^*\sigma_{11} + A_{2222}^*\sigma_{22}) \text{H}(A_{1122}^*\sigma_{11} + A_{2222}^*\sigma_{22}) \\ & + B_{1122}^*\sigma_{22}(B_{1111}^*\sigma_{11} + B_{1122}^*\sigma_{22}) \text{H}(-(B_{1111}^*\sigma_{11} + B_{1122}^*\sigma_{22})) \\ & + B_{2222}^*\sigma_{22}(B_{1122}^*\sigma_{11} + B_{2222}^*\sigma_{22}) \text{H}(-(B_{1122}^*\sigma_{11} + B_{2222}^*\sigma_{22})) \end{aligned}$$

Les termes relatifs à σ_{12} et σ_{21} s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_{12}\rho_0 \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma_{12}} &= \sigma_{12} \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}} \\ \sigma_{21}\rho_0 \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma_{21}} &= \sigma_{21} \frac{\sigma_{21}}{2G_{12}} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sigma : \rho_0 \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma} = & (A_{1111}^*\sigma_{11} + A_{1122}^*\sigma_{22})^2 \text{H}(A_{1111}^*\sigma_{11} + A_{1122}^*\sigma_{22}) \\ & + (A_{1122}^*\sigma_{11} + A_{2222}^*\sigma_{22})^2 \text{H}(A_{1122}^*\sigma_{11} + A_{2222}^*\sigma_{22}) \\ & + (B_{1111}^*\sigma_{11} + B_{1122}^*\sigma_{22})^2 \text{H}(-(B_{1111}^*\sigma_{11} + B_{1122}^*\sigma_{22})) \\ & + (B_{1122}^*\sigma_{11} + B_{2222}^*\sigma_{22})^2 \text{H}(-(B_{1122}^*\sigma_{11} + B_{2222}^*\sigma_{22})) + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \end{aligned}$$

En comparant l'équation précédente avec l'équation (5.24), on obtient :

$$\sigma : \rho_0 \frac{\partial\psi(\sigma)}{\partial\sigma} = 2\rho_0\psi(\sigma)$$

Par application du théorème de proportionnalité (section 4.3.2), on conclue que le potentiel thermodynamique $\rho_0\psi(\sigma)$ et le potentiel dual par transformée de Legendre $\rho_0\varphi(\epsilon)$ sont, quelque soient (σ, ϵ) qui vérifient la loi de comportement, tels que :

$$\rho_0\varphi(\epsilon) = \rho_0\psi(\sigma)$$

En dénotant toujours les paramètres d'optimisation (θ_i, α_i) , on a donc

$$\exists a = 1 \in \mathbb{R} / \rho_0\varphi(\epsilon) = a\rho_0\psi(\sigma) \quad \forall(\theta_i, \alpha_i), \forall(\sigma, \epsilon) \text{ qui vérifient la loi de comportement}$$

En conclusion, l'algorithme d'optimisation décrit dans la section 4.2.4 peut être utilisé avec la loi de comportement élastique linéaire par morceau à définition biaxiale de l'état de traction-compression (5.25).

5.4 Exemples numériques pour un matériau composite à fibres longues à loi de comportement orthotrope élastique linéaire par morceaux

Dans cette section, on s'intéresse à la mise en œuvre numérique de l'algorithme d'optimisation basé sur la compliance à paramètres distribués présenté dans le chapitre 4 en considérant :

- une membrane monocouche d'épaisseur totale constante,
- un matériau composite à fibres longues curvilignes de proportion variable,
- la loi de comportement élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression de type orthotrope élastique linéaire par morceaux, présentée dans la section 5.3.3.

On se place dans le cadre de l'élasticité bidimensionnelle sous l'hypothèse des contraintes planes. Deux paramètres d'optimisation distribués sont pris en compte : l'orientation locale des fibres notée θ et leur proportion locale notée α . Le terme de coût est choisi linéaire en fonction de la proportion de fibres uniquement :

$$Cout(\alpha) = k \int_S \alpha dS$$

Le critère à minimiser est la somme de la compliance et du coût défini ci-dessus :

$$Crit(\theta, \alpha) = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dS + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} ds + k \int_S \alpha dS$$

La loi de comportement élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression utilisée dérive du potentiel thermodynamique présenté dans la section 5.3.3 :

$$\rho_0 \psi(\sigma) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_{11}^2}{E_1} + \left(\frac{1}{E_1^C} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{11}^2 H(-\sigma_{11}) + \frac{\sigma_{22}^2}{E_2} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \right]$$

Dans la section 5.3.3, il a été montré que

- ce potentiel est convexe et continûment différentiable,
- le problème élastique de référence défini à l'aide de la loi de comportement associée à ce potentiel possède une solution unique,
- ce potentiel et son potentiel dual par transformée de Legendre sont proportionnels et même égaux, et donc que l'algorithme d'optimisation peut être utilisé avec la loi de comportement associée,
- l'expression du potentiel thermodynamique dual peut être déterminé explicitement.

La loi de comportement associée au potentiel précédent s'écrit :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} + \left(\frac{1}{E_1^C} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{11} H(-\sigma_{11}) - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22} \\ \epsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} \\ \epsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}} \end{cases}$$

L'expression du potentiel thermodynamique dual $\rho_0 \varphi(\epsilon)$ est :

$$\rho_0 \varphi(\epsilon) = \frac{1}{2} \left[\frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22})^2 + E_2 \epsilon_{22}^2 + 2G_{12} (\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{21}^2) \right. \\ \left. + \left(\frac{E_1^C}{1 - \nu_{12}^C \nu_{21}} - \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) (\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22})^2 H(-(\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22})) \right]$$

et la loi de comportement associée s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22}) \\ \quad + \left(\frac{E_1^C}{1 - \nu_{12}^C \nu_{21}} - \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) (\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22}) H(-(\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22})) \\ \sigma_{22} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22}) + E_2 \epsilon_{22} \\ \quad + \left(\frac{E_1^C}{1 - \nu_{12}^C \nu_{21}} - \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) (\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22}) H(-(\epsilon_{11} + \nu_{21}\epsilon_{22})) \\ \sigma_{12} = 2G_{12} \epsilon_{12} \end{cases} \quad (5.26)$$

Pour finaliser l'outil numérique effectuant l'optimisation de la membrane composite considérée, il reste à

1. Expliciter le calcul de la loi de comportement homogénéisée en fonction des paramètres d'optimisation.
2. Mettre en œuvre numériquement le calcul par éléments finis du champ de déplacements solution du problème élastique de référence et le calcul du champ de contraintes associé (cette étape correspond à la minimisation globale par rapport aux contraintes à paramètres d'optimisation fixés).
3. Expliciter la minimisation locale par rapport aux paramètres d'optimisation à contraintes fixées.

Ces trois points sont l'objet des sections suivantes, puis un exemple numérique est présenté.

5.4.1 Calcul de la loi de comportement homogénéisé

Les paramètres matériau E_1 , E_1^C , E_2 , ν_{12} et G_{12} doivent être exprimés en fonction des paramètres matériau des constituants élémentaires (fibres et matrice) et des paramètres d'optimisation. Différents processus d'homogénéisation peuvent être considérés. Ce choix est lié à la volonté d'obtenir une minimisation locale explicite dans le but de minimiser le coût de calcul de cette étape de l'algorithme d'optimisation.

Dans la section 1.4.3, il a été rappelé les travaux de Terrel [62] qui permettent, lors de l'optimisation d'une membrane composite monocouche d'épaisseur constante à fibres longues curvilignes de proportion variable, d'obtenir une minimisation locale explicite en utilisant la loi des mélanges comme processus d'homogénéisation. En généralisant cette approche pour prendre en compte la dissymétrie de comportement en traction-compression, une méthode d'homogénéisation qui aboutit à une minimisation locale explicite peut être définie.

Les fibres sont supposées avoir un comportement élastique linéaire isotrope transverse et la matrice un comportement élastique linéaire isotrope. On utilise un indice f pour les grandeurs relatives aux fibres et un indice m pour les grandeurs relatives à la matrice. Pour les paramètres matériau intervenant dans la loi de comportement homogénéisée dans l'état de traction, qui est alors supposée être élastique linéaire orthotrope, la loi des mélanges s'écrit [15] :

$$\begin{aligned} E_1 &= \alpha E_{f1} + (1 - \alpha)E_m & \nu_{12} &= \alpha \nu_{f12} + (1 - \alpha)\nu_m \\ E_2 &= \left(\frac{\alpha}{E_{f2}} + \frac{1 - \alpha}{E_m} \right)^{-1} & G_{12} &= \left(\frac{\alpha}{G_{f12}} + \frac{1 - \alpha}{G_m} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Certaines considérations doivent être prises en compte pour définir le module d'Young longitudinal en compression E_1^C en fonction de la proportion de fibres :

- $E_1^C < E_1 \quad \forall \alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$
- $E_2 < E_1^C \quad \forall \alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$
- si $\alpha = \alpha_{min} = 0$, $E_1^C = E_1 = E_m$

De plus, cette définition doit être choisie dans l'optique de rendre la minimisation locale par rapport aux paramètres d'optimisation à contraintes fixées la plus simple possible, voire explicite, dans le but de diminuer le coût numérique de cette étape. Un choix possible de E_1^C en fonction de la proportion de fibres qui satisfait les conditions précédentes est d'introduire un paramètre E_{f1}^C et de définir E_1^C sous la forme :

$$E_1^C = \alpha E_{f1}^C + (1 - \alpha)E_m \quad \text{avec} \quad E_{f2} < E_{f1}^C < E_{f1} \quad (5.28)$$

Il est important de noter que le paramètre E_{f1}^C n'a pas de sens physique particulier concernant la fibre seule. Ce paramètre est introduit uniquement pour permettre la définition d'un modèle de comportement homogénéisé dissymétrique en traction-compression caractérisant le microflambage des fibres en compression. E_{f1}^C ne permet donc pas de caractériser le microflambage d'une fibre seule, mais seulement le micro-flambage des fibres noyées au sein de la matrice.

Valeurs numériques

Pour tous les exemples numériques présentés dans la suite de ce chapitre, on considérera des fibres de kevlar et une matrice epoxyde. Pour les fibres de kevlar, supposées élastiques linéaires isotropes transverses, on utilisera les valeurs numériques des coefficients matériau intervenant dans la loi de comportement dans le plan des fibres suivantes :

$$\begin{aligned} E_{f1} &= 139400 \text{ MPa} & E_{f2} &= 9580 \text{ MPa} \\ \nu_{f12} &= 0.37 & G_{f12} &= 3450 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Pour la matrice epoxyde, supposée élastique linéaire isotrope, on utilisera les valeurs numériques des coefficients matériau suivantes :

$$E_m = 3450 \text{ MPa} \quad \nu_m = 0.3$$

La valeur du paramètre E_{f1}^C utilisée est choisie arbitrairement en respectant la propriété $E_{f2} < E_{f1}^C < E_{f1}$. On utilisera la valeur :

$$E_{f1}^C = 0.9E_{f1} = 125460 \text{ MPa}$$

Pour une proportion de fibres de 60%, ces valeurs numériques impliquent les valeurs des paramètres du matériau homogénéisé suivantes :

- matériau élastique linéaire orthotrope dans l'état de traction :

$$\begin{aligned} E_1 &= 85020 \text{ MPa} & E_2 &= 5600 \text{ MPa} \\ \nu_{12} &= 0.34 & G_{12} &= 2100 \text{ MPa} \end{aligned}$$

- matériau élastique linéaire orthotrope dans l'état de compression :

$$\begin{aligned} E_1 &= 76650 \text{ MPa} & E_2 &= 5600 \text{ MPa} \\ \nu_{12} &= 0.34 & G_{12} &= 2100 \text{ MPa} \end{aligned}$$

5.4.2 Mise en œuvre numérique du calcul par éléments finis

Le calcul par éléments finis a deux objectifs principaux au regard de l'algorithme d'optimisation. Le premier est la résolution du problème de minimisation globale par rapport aux contraintes à paramètres d'optimisation fixés. En effet le champ de contraintes solution de ce problème de minimisation n'est autre que la solution du problème élastique de référence en vertu du théorème de l'énergie complémentaire. Le deuxième objectif est la connaissance explicite du champ de contraintes associé à un jeu de valeurs des paramètres d'optimisation pour pouvoir effectuer la minimisation locale par rapport aux paramètres d'optimisation à contraintes fixées.

D'un point de vue numérique, le calcul du champ de contraintes solution du problème

élastique de référence peut s'effectuer par un calcul par éléments finis en déplacements avec un calcul des contraintes en post-traitement par utilisation de la loi de comportement.

Calcul par éléments finis en déplacements

Si on considère un état de traction-compression (noté TC) donné, la loi de comportement $\sigma = \rho_0 \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon}$ est linéaire en ϵ . Il est alors possible de discrétiser le système d'équation par utilisation de la méthode des éléments finis pour obtenir un système linéaire à résoudre. Le calcul de la solution du système linéaire obtenu permet alors la définition d'un nouvel état de traction-compression. Cette procédure est itérée (voir algorithme 1). Quand deux états de traction-compression successifs sont identiques, on obtient un champ de déplacements solution du problème élastique de référence et l'état de traction-compression associé. Le champ de déplacements obtenu est alors la solution du problème élastique de référence car celui-ci possède une solution unique (avec le choix de la loi de comportement considéré).

Algorithme 1 Calcul par éléments finis en déplacements

Initialisation : Choix de $TC^{(0)}$

boucle

Calcul par éléments finis avec $TC^{(n-1)} \Rightarrow u^{(n)}$ {Problème linéaire}

$TC^{(n)} \Leftarrow TC(u^{(n)})$

Vérification de la convergence : $TC^{(n)} \stackrel{?}{=} TC^{(n-1)}$; continuer si nécessaire

fin boucle

La mise en œuvre numérique de cet algorithme a été effectuée dans le code MODULEF en utilisant un élément isoparamétrique à 4 nœuds avec une interpolation de type Q1 Lagrange (en élasticité linéaire cet élément est dénommé QUAD 2Q1D dans MODULEF). Numériquement, l'algorithme converge toujours en moins de 5 itérations indépendamment de la finesse du maillage. La solution obtenue est indépendante de l'état de traction-compression initial, et un raffinement du maillage n'affecte pas la répartition globale des zones en traction et des zones en compression.

Calcul du champ de contraintes

Le champ de contraintes est calculé en post-processeur en utilisant la loi de comportement explicite $\sigma = \rho_0 \frac{\partial \varphi(\epsilon)}{\partial \epsilon}$ (équation (5.26)). L'état de traction-compression associé au champ de déplacements solution étant connu, la loi de comportement se résume à une loi de comportement élastique linéaire non-homogène sur la structure. Numériquement, le module de calcul des contraintes de MODULEF (dénommé STREXX) n'a donc pas eu à être modifié.

5.4.3 Mise en œuvre numérique de la minimisation locale

Les paramètres d'optimisation, orientation locale du repère d'orthotropie du matériau et proportion de fibres, sont supposés être constants sur chaque élément fini et variables d'un élément fini à l'autre.

Les potentiels thermodynamiques duaux dont dérive la loi de comportement considérée sont égaux. La grandeur locale à minimiser g est donc la somme du double de l'énergie complémentaire $2\rho_0\psi(\sigma, \theta, \alpha)$ et du coût local $k\alpha$, c'est-à-dire :

$$g(\theta, \alpha) = 2\rho_0\psi(\sigma, \theta, \alpha) + k\alpha \quad (5.29)$$

Dans cette optique, nous allons expliciter la minimisation locale par rapport aux paramètres d'optimisation qui est effectuée sur chaque élément fini en considérant un état de contraintes fixé. Elle est consécutivement constituée d'une minimisation par rapport à l'orientation à proportion de fibres fixée et d'une minimisation par rapport à la proportion de fibres à orientation fixée.

Soit σ_I et σ_{II} les deux contraintes principales dans l'élément considéré, avec $|\sigma_{II}| < |\sigma_I|$. L'angle θ est défini comme l'angle de rotation entre la direction principale des contraintes associée à σ_I et la direction d'orthotropie du matériau de plus grande rigidité, c'est-à-dire celle qui correspond à E_1 et E_1^C .

Minimisation locale par rapport à l'orientation locale à proportion de fibres fixée

Comme la coût local $k\alpha$ ne dépend pas de l'orientation locale, cette étape se réduit à la minimisation de l'énergie complémentaire à proportion de fibres et à contraintes fixées.

Dans le cadre de la minimisation ou de la maximisation de l'énergie complémentaire locale, l'orientation optimale d'un matériau élastique linéaire peut être déterminée analytiquement [19] (voir section 1.4.1). En utilisant les notations de l'article, on définit :

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E_1}{E_2} \right) & \beta_3 &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}} + 2\nu_{12} \right) \\ \mu &= \frac{\sigma_{II}}{\sigma_I} & \zeta &= \frac{\beta_2}{4\beta_3} \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \end{aligned}$$

En considérant un matériau pour lequel

$$G_{12} < \frac{E_1 E_2}{E_1 + (1 + \nu_{12}) E_2} \quad (5.30)$$

les résultats de l'angle optimal sont présentés dans le tableau 5.1.

La loi de comportement (5.26) considérée est élastique linéaire orthotrope par morceaux. Supposons que la condition (5.30) sur G_{12} est vérifiée dans l'état de traction et dans l'état de compression quelle que soit la valeur de la proportion de fibres (voir remarque à la fin de la

Tableau 5.1 — Orientation optimale minimisant l'énergie complémentaire locale à contraintes fixées dans le cas d'un matériau élastique linéaire orthotrope pour lequel $G_{12} < E_1 E_2 / (E_1 + (1 + \nu_{12}) E_2)$

	Minimum	Maximum
$ \zeta < 1$	$\theta = 0$ (global)	$\theta = + \arccos(-\zeta)$
	$\theta = \pi/2$ (local)	$\theta = - \arccos(-\zeta)$
$ \zeta \geq 1$	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$

Tableau 5.2 — Orientation optimale minimisant l'énergie complémentaire locale dans le cas de la loi de comportement élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression de type (5.26) dans le cas particulier défini par (5.31).

	$\sigma_{II} \leq 0$	$\sigma_{II} > 0$	
$\sigma_I < 0$	$\theta = 0$	si $\mu > -\mu_0$ alors $\theta = 0$ si $\mu < -\mu_0$ alors $\theta = \pi/2$	$\left(\text{avec } \mu_0 = \frac{1 - E_2/E_1^C}{1 - E_2/E_1} \right)$
$\sigma_I > 0$	$\theta = 0$	$\theta = 0$	

section), c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}] \quad \begin{cases} G_{12} < \frac{E_1 E_2}{E_1 + (1 + \nu_{12}) E_2} \\ G_{12} < \frac{E_1^C E_2}{E_1^C + (1 + \nu_{12}^C) E_2} \end{cases} \quad (5.31)$$

La minimisation locale de l'énergie complémentaire à proportion de fibres fixée et à contraintes fixées pour un matériau élastique non-linéaire à loi de comportement de type (5.26) peut alors se résoudre analytiquement. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.2. Leur démonstration est présentée dans l'annexe B.

Un nouveau cas apparaît par rapport au cas de l'élasticité linéaire orthotrope. Il correspond à un état de contraintes pour lequel $\sigma_I < 0$ et $\sigma_{II} > 0$. Le passage d'un angle optimal de 0° à 90° se produit lorsque le rapport σ_{II}/σ_I devient proche de -1 (par valeurs supérieures), pour une valeur critique qui est fonction des paramètres matériau des lois de comportement orthotropes en traction et en compression. La direction optimale est alors alignée avec la direction principale des contraintes associée à la contrainte principale qui n'est pas maximale en valeur absolue.

Remarque. La propriété (5.31) a été vérifiée numériquement en traçant les courbes de la différence des deux membres des deux inégalités dans les cas de traction et de compression pour $\alpha \in [\alpha_{min}; \alpha_{max}]$ avec le jeu de valeurs numériques défini dans la section 5.4.1.

Minimisation locale par rapport à la proportion de fibres à orientation locale fixée

Cette étape consiste en la minimisation de la grandeur locale $g(\sigma, \theta, \alpha)$ (voir eq (5.29)) par rapport à la proportion de fibres à orientation locale et à contraintes fixées.

L'étape précédente a permis de déterminer l'angle optimal entre la direction principale des contraintes associée à la contraintes principale σ_I maximale en valeur absolue et la direction d'orthotropie de plus grande rigidité (c'est-à-dire suivant la direction définie par E_1 et E_1^C).

Cas où $\sigma_I > 0$:

Si $\sigma_I > 0$, cet angle optimal est $\theta = 0^\circ$. La contrainte longitudinale est donc dans ce cas σ_I et est positive. Comme la minimisation locale par rapport à la proportion de fibres est effectuée à orientation locale fixée et à contraintes fixées, cela implique que la loi de comportement dissymétrique en traction-compression se réduit dans ce cas à la loi de comportement élastique linéaire orthotrope définie dans l'état de traction.

Le double de l'énergie complémentaire s'écrit alors :

$$2\rho_0\psi(\sigma, \theta, \alpha) = \frac{\sigma_I^2}{E_1} + \frac{\sigma_{II}^2}{E_2} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_I\sigma_{II}$$

En tenant compte des équations (5.27), la minimisation de la grandeur locale $g(\alpha)$ aboutit à la résolution d'un polynôme de degré 2 [62] dont les solutions sont explicites.

Cas où $\sigma_I < 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$:

Ce cas se produit quand $\sigma_{II} > 0$ et $-1 < \mu < -\mu_0$ (voir tableau 5.2). La contrainte longitudinale est donc dans ce cas σ_{II} et est positive. Comme la minimisation locale par rapport à la proportion de fibres est effectuée à orientation locale fixée et à contraintes fixées, cela implique que la loi de comportement dissymétrique en traction-compression se réduit dans ce cas à la loi de comportement élastique linéaire orthotrope définie dans l'état de traction.

On se retrouve alors dans la même situation que le cas précédent.

Cas où $\sigma_I < 0$ et $\theta = 0^\circ$:

En considérant que $\sigma_I < 0$, ce cas se produit dans deux situations (voir tableau 5.2) :

- $\sigma_{II} \leq 0$
- $\sigma_{II} > 0$ et $\mu > -\mu_0$

La contrainte longitudinale est donc dans ce cas σ_I et est négative. Comme la minimisation locale par rapport à la proportion de fibres est effectuée à orientation locale fixée et

à contraintes fixées, cela implique que la loi de comportement dissymétrique en traction-compression se réduit dans ce cas à la loi de comportement élastique linéaire orthotrope définie dans l'état de compression.

Compte-tenu des équation (5.27) et (5.28), la grandeur locale $g(\alpha)$ à minimiser s'écrit :

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha E_{f1}^C + (1 - \alpha)E_m} \sigma_I^2 + \frac{\alpha E_{f2} + (1 - \alpha)E_m}{E_{f2}E_m} \sigma_{II}^2 - 2 \frac{\alpha \nu_{f12} + (1 - \alpha)\nu_m}{\alpha E_{f1} + (1 - \alpha)E_m} \sigma_I \sigma_{II} + k\alpha$$

La dérivée de $g(\alpha)$ se met sous la forme :

$$\frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = \frac{A_1 + B_1\alpha + C_1\alpha^2 + D_1\alpha^3 + E_1\alpha^4}{E_{f2}E_m (\alpha E_{f1} + (1 - \alpha)E_m)^2 (\alpha E_{f1}^C + (1 - \alpha)E_m)^2}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = E_m^3 [kE_{f2}E_m^2 - E_{f2}(E_{f1}^C - E_m)\sigma_I^2 - E_m(E_{f2} - E_m)\sigma_{II}^2 - 2E_{f2}(E_m\nu_{f12} - E_{f1}\nu_m)\sigma_I\sigma_{II}] \\ B_1 = 2E_m^2 [kE_{f2}E_m^2(E_{f1} + E_{f1}^C - 2E_m) - E_{f2}(E_{f1} - E_m)(E_{f1}^C - E_m)\sigma_I^2 \\ \quad - E_m(E_{f2} - E_m)(E_{f1} + E_{f1}^C - 2E_m)\sigma_{II}^2 + 2E_{f2}(E_m - E_{f1}^C)(E_m\nu_{f12} - E_{f1}\nu_m)\sigma_I\sigma_{II}] \\ C_1 = E_m [kE_{f2}E_m^2(E_{f1}^2 + 4E_{f1}E_{f1}^C + E_{f1}^C{}^2 - 6(E_{f1} + E_{f1}^C)E_m + 6E_m^2) \\ \quad - E_{f2}(E_{f1} - E_m)^2(E_{f1}^C - E_m)\sigma_I^2 - 2E_{f2}(E_{f1}^C - E_m)^2(E_m\nu_{f12} - E_{f1}\nu_m)\sigma_I\sigma_{II} \\ \quad + E_m(E_m - E_{f2})(E_{f1} + E_{f1}^C + 4E_{f1}E_{f1}^C - 6(E_{f1} + E_{f1}^C)E_m + 6E_m^2)\sigma_{II}^2] \\ D_1 = 2E_m(E_{f1} - E_m)(E_{f1}^C - E_m)(E_{f1} + E_{f1}^C - 2E_m)(kE_{f2}E_m + (E_m - E_{f2})\sigma_{II}^2) \\ E_1 = (E_{f1} - E_m)^2(E_{f1}^C - E_m)^2(kE_{f2}E_m + (E_m - E_{f2})\sigma_{II}^2) \end{array} \right.$$

La minimisation de la grandeur locale $g(\alpha)$ aboutit donc à la résolution d'un polynôme de degré 4 dont les solutions sont explicites.

Remarque sur le caractère explicite de la minimisation locale

Si $\sigma_I > 0$, ou bien si $\sigma_I < 0$ et $\sigma_{II} \leq 0$, la minimisation par rapport à l'orientation locale ne dépend pas de la proportion de fibres. Donc, après une minimisation par rapport à l'orientation locale et une minimisation locale par rapport à la proportion de fibres, la minimisation est terminée. Elle est donc numériquement explicite.

Si $\sigma_I < 0$ et $\sigma_{II} > 0$, le test sur $\mu + \mu_0$ (voir tableau 5.2) est fonction de la proportion de fibres. Les deux minimisations par rapport à l'orientation et à la proportion de fibres doivent donc théoriquement être itérées. Dans la pratique, on observe que la convergence est obtenu après les deux minimisations initiales. Ceci peut s'expliquer par le fait que la proportion de fibres a une influence faible sur le paramètre μ_0 . On observe donc que dans ce cas aussi la minimisation est numériquement explicite.

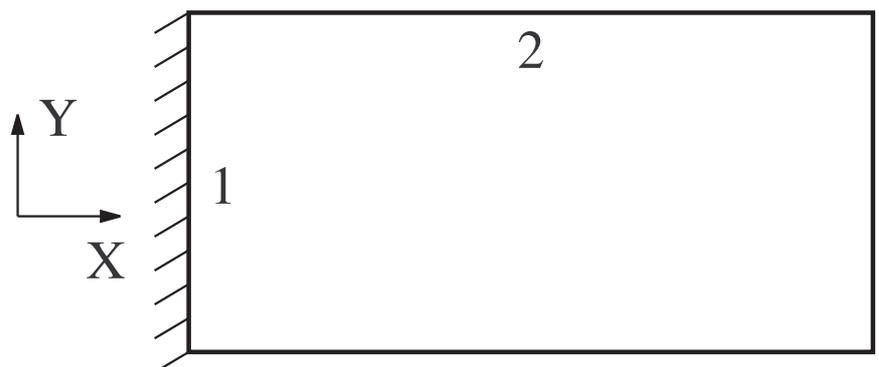


Figure 5.2 — Représentation schématique de la membrane et des conditions aux limites appliquées

5.4.4 Exemple numérique

On considère une membrane en élasticité bidimensionnelle sous l'hypothèse des contraintes planes (figure 5.2). Ses côtés ont pour longueurs $2m$ et $1m$. Sur un des côtés est imposé un déplacement nul et sur un autre un effort linéique vertical de norme égale à $25 N.m^{-1}$. On considère des fibres de kevlar et une matrice epoxyde. Les valeurs numériques des coefficients matériau utilisés dans la loi de comportement sont données dans la section 5.4.1.

Les calculs ont été effectués pour trois lois de comportement différentes :

- $E_{f1}^C = E_{f1}$ (loi de comportement élastique linéaire),
- $E_{f1}^C = 0.9E_{f1}$,
- $E_{f1}^C = 0.5E_{f1}$.

Le troisième cas, bien que non observé expérimentalement pour un matériau composite constitué de fibres de kevlar et d'une matrice epoxyde, est considéré pour mettre en évidence d'une manière plus visible la différence de répartition optimale de fibres avec le cas élastique linéaire. Dans ce cas, la condition (5.31) sur G_{12} est toujours vérifiée.

Le paramètre k du terme de coût est choisi égal à $0.2 SI$. La proportion de fibres est autorisée à varier entre 0 et 0.6. La proportion de fibres initiale est choisie égale à 0 : le matériau initial est donc élastique linéaire isotrope et identique pour les trois lois de comportement considérées.

Les valeurs optimales du critère et les valeurs des compliances et coûts associés sont présentées dans le tableau 5.3 avec un critère normalisé à 1 dans le cas de la loi de comportement élastique linéaire. Les répartitions optimales aboutissent à un coût différent dans les trois cas : plus le comportement en compression est différent du comportement en traction, c'est-à-dire plus E_{f1}^C est petit, plus le coût final est grand. La compliance optimale augmente aussi lorsque E_{f1}^C diminue, et donc le critère optimal est d'autant plus grand que E_{f1}^C est petit.

Les répartitions optimales de fibres pour la loi de comportement élastique linéaire et

Tableau 5.3 — Résultats numériques normalisés obtenus pour les trois lois de comportement considérées

	Compliance	Coût	Critère
Elasticité linéaire	0.63	0.37	1.00
$E_{f1}^C = 0.9 E_{f1}$	0.65	0.38	1.03
$E_{f1}^C = 0.5 E_{f1}$	0.81	0.42	1.23

pour la loi de comportement obtenue avec $E_{f1}^C = 0.5 E_{f1}$ sont présentées dans les figures 5.3 et 5.4. On observe pour la loi de comportement dissymétrique en traction-compression une augmentation de la proportion de fibres dans la moitié inférieure de la structure par rapport au cas élastique linéaire. Cette augmentation est le résultat de la minimisation locale qui, pour un même état de contraintes, une même orientation locale et un même paramètre k du terme de coût, aboutit à une proportion de fibres d'autant plus élevée que E_{f1}^C est petit. Par contre, on remarque aussi sur la partie droite de la structure, une modification de l'orientation locale des fibres. La répartition optimale des fibres dans le cas d'une loi de comportement dissymétrique en traction-compression n'est donc pas uniquement une répartition optimale obtenue pour une loi de comportement élastique linéaire avec une augmentation de la proportion de fibres dans les zones sollicitées en compression. Dans certains cas, un changement de topologie optimale peut apparaître.

5.5 Conclusion

La méthodologie développée au chapitre 4 pour prouver l'utilisation possible de l'algorithme d'optimisation dans le cas de lois de comportement élastiques non-linéaires dérivant de potentiels thermodynamiques duaux proportionnels a été utilisée pour étudier quelques lois de comportement dissymétriques en traction-compression.

Dans le cas d'une dissymétrie de comportement en traction-compression liée à la présence de micro-fissures au sein d'un matériau endommagé, nous avons introduit une nouvelle loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire de type puissance dissymétrique en traction-compression qui est utilisable par l'algorithme d'optimisation généralisé défini au chapitre précédent. Cette loi de comportement inclut les cas élastique linéaire, élastique non-linéaire de type puissance [60] et élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression [28].

Ensuite, dans le cas d'une dissymétrie de comportement en traction-compression d'un matériau composite à fibres longues, nous avons étudié un modèle orthotrope linéaire par morceaux avec une définition uniaxiale de l'état de traction-compression. Nous avons prouvé qu'il peut être utilisé par l'algorithme d'optimisation généralisé défini au chapitre précédent. Dans le cas de paramètres d'optimisation locaux de type orientation et proportion de fibres, une mise en œuvre numérique a été effectuée. Pour ce faire, le problème de l'orientation

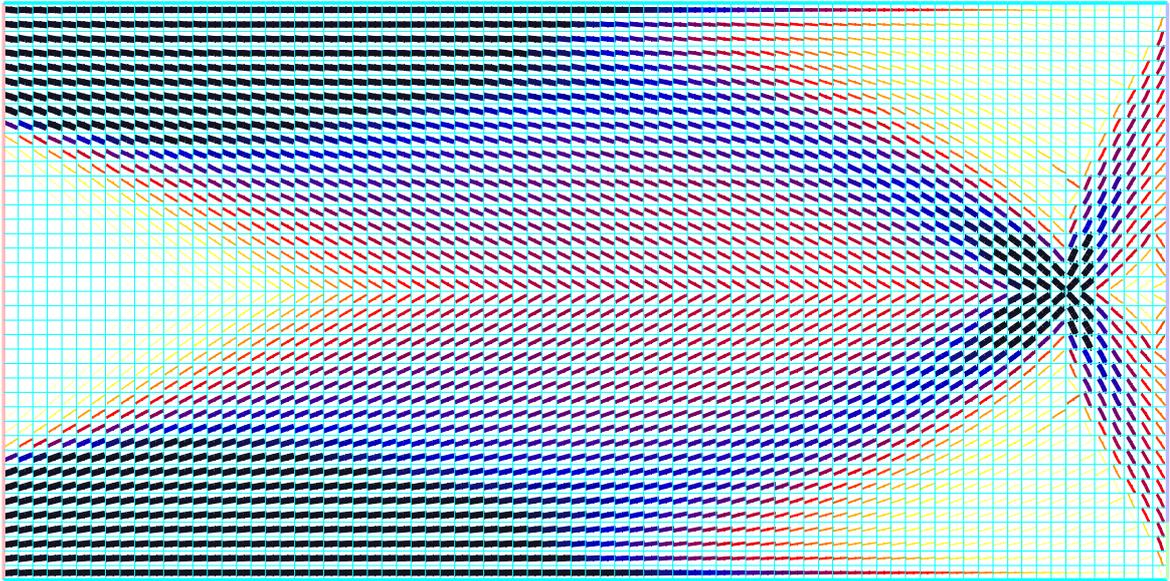


Figure 5.3 — Répartition de fibres optimale pour une loi de comportement élastique linéaire orthotrope ($E_{f1}^C = E_{f1}$)

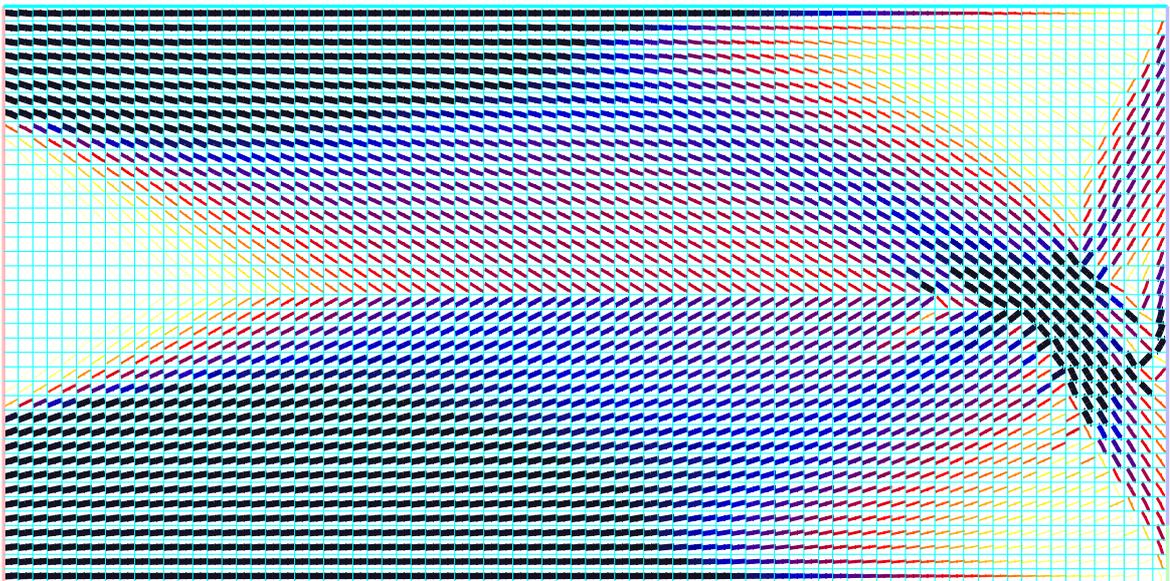


Figure 5.4 — Répartition de fibres optimale pour une loi de comportement élastique orthotrope dissymétrique en traction-compression ($E_{f1}^C = 0.5E_{f1}$)

optimale de ce matériau élastique non-linéaire a été résolu. Un exemple académique a été traité. De cet exemple, il ressort que la dissymétrie de comportement peut entraîner des changements de topologie de répartition optimale des fibres.

Enfin, la loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression [28] qui utilise des décompositions de Kelvin a été particularisée pour des lois de comportement orthotropes en traction et en compression. Une évolution originale de ce modèle utilisant des décompositions de Kelvin partielles a alors permis d'aboutir à une nouvelle loi de comportement qui est élastique linéaire par morceaux avec une définition biaxiale de l'état de traction-compression et qui est compatible avec l'algorithme d'optimisation généralisé défini au chapitre précédent.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

LORS de cette thèse nous nous sommes intéressés au problème de la conception optimale d'une structure élastique lorsque les impératifs de rigidité et de poids sont prépondérants. L'objectif était de définir des méthodes d'optimisation de structures en matériaux composites à caractère industriel. Ce travail, qui s'est déroulé dans le cadre d'une collaboration entre mon laboratoire d'accueil, le LM2S, l'Onera-Lille et Airbus, s'est orienté vers l'étude de structures de type assemblage de plaques composites, et une structure test a été définie : un volet de gouverne d'Airbus.

Le problème d'optimisation a été formulé comme la maximisation de la rigidité globale d'une structure élastique au moindre poids, ou plus généralement au moindre coût. La rigidité globale a été quantifiée par un critère énergétique global défini à l'aide du travail des efforts extérieurs dans le champ de déplacements solution, ou *compliance*. Le problème d'optimisation considéré tout au long de la thèse est alors le suivant : minimiser la somme de la compliance et d'un terme de coût, à définir par l'utilisateur, le champ de déplacements étant solution d'un problème élastique de référence.

Pour pouvoir utiliser des algorithmes d'optimisation déjà existants, nous avons développé un nouveau modèle de renforcement d'un milieu tridimensionnel par des plaques de Kirchhoff Love internes et externes. Il est alors possible de modéliser un assemblage de plaques composites en considérant un milieu tridimensionnel de faible rigidité renforcé par des plaques comparativement très rigides.

Dans le cas de paramètres d'optimisation distribués, nous avons utilisé un algorithme basé sur la reformulation du problème d'optimisation sous la forme d'une double minimisation [5]. L'efficacité numérique de cet algorithme repose sur le caractère local de la minimisation par rapport aux paramètres d'optimisation, ce qui permet d'éviter les calculs de sensibilité globaux sur la structure. A l'aide du modèle d'assemblage de plaques composites, nous avons traité numériquement le problème de la répartition optimale des fibres dans les différents renforts du volet de gouverne d'Airbus, ce qui constitue un exemple d'optimisation à paramètres distribués de structure industrielle de type assemblage de plaques composites de géométrie complexe. Les résultats obtenus ont alors permis d'énoncer des règles de conception des renforts internes qui sont optimales en terme de répartition des fibres.

Dans le cas de paramètres d'optimisation géométriques, le même modèle d'assemblage de plaques nous a permis de définir une méthode d'optimisation performante sur l'exemple du volet de gouverne. En utilisant l'algorithme du gradient projeté, nous avons observé

numériquement sur une géométrie simple l'existence de nombreux minimums locaux. Nous avons alors montré, toujours sur le même exemple, comment le nombre de minimums locaux peut être diminué en utilisant un jeu de paramètres d'optimisation qui associe la position des zones d'attache à celle des renforts internes. On obtient alors une méthode d'optimisation basée sur l'algorithme du gradient projeté numériquement performante.

Comme l'algorithme à paramètres distribués considéré est numériquement performant (car les minimisations par rapport aux paramètres d'optimisation sont locales), nous avons cherché à **généraliser cet algorithme aux cas des lois de comportements élastiques non-linéaires**. Nous avons alors montré qu'il pouvait être étendu aux lois de comportement élastiques non-linéaires dérivant de potentiels thermodynamiques duaux proportionnels. Nous avons introduit une définition de tels potentiels dans le cadre de l'optimisation à paramètres distribués et proposé une caractérisation originale systématique de tels potentiels qui ne s'appuie que sur la forme explicite d'un des deux potentiels. Cette démarche permet, à l'aide de la connaissance d'un potentiel thermodynamique quelconque de conclure de manière systématique sur l'applicabilité ou la non-applicabilité de l'algorithme d'optimisation généralisé.

Nous nous sommes alors intéressés aux lois de comportement élastiques non-linéaires dissymétriques en traction-compression. Ces lois sont en général caractérisées par une perte de rigidité dans l'un des deux états. La prise en compte de cette dissymétrie de comportement lors du processus d'optimisation peut donc potentiellement aboutir à des résultats très éloignés de ceux obtenus sans cette dissymétrie. Dans le domaine des matériaux composites, nous nous sommes intéressés à deux types de matériaux à comportement dissymétrique en traction-compression : les matériaux composites à fibres longues et les matériaux composites micro-fissurés.

Pour les matériaux composites à fibres longues à comportement différent en traction et en compression, nous avons tout d'abord considéré deux modèles basés sur une approche phénoménologique qui postule que le matériau est orthotrope élastique en traction et en compression et que seul le module d'Young en compression est modifié d'un état à l'autre [65]. Nous montrons que seul un des deux modèles est compatible avec l'algorithme d'optimisation. Pour cette loi compatible, une mise en œuvre numérique a été effectuée et les résultats obtenus sur un exemple académique montrent que la répartition des fibres change grandement lorsque l'on prend en compte la dissymétrie de comportement en traction-compression.

Pour des matériaux micro-fissurés, un modèle de loi de comportement tridimensionnelle élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression [28] a été généralisée en une loi de comportement de type puissance dissymétrique en traction-compression, qui inclut les cas élastique linéaire, élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression et élastique non-linéaire de type puissance. Nous avons démontré que cette loi de comportement peut être utilisée avec l'algorithme d'optimisation généralisé.

Enfin ce même modèle de comportement élastique non-linéaire dissymétrique en traction-compression qui utilise des décompositions de Kelvin a été particularisé à des lois

de comportement orthotrope en traction et en compression sous l'hypothèse des contraintes planes, ce qui a abouti à une loi de comportement élastique non-linéaire par morceaux avec une définition biaxiale de l'état de traction-compression. En utilisant une décomposition de Kelvin partielle, nous avons alors défini une nouvelle loi de comportement élastique linéaire par morceaux qui caractérise un comportement dissymétrique avec une définition biaxiale de l'état de traction-compression.

Donc, après avoir généralisé un algorithme d'optimisation à paramètres distribués à la famille des comportements qui dérivent de potentiels thermodynamiques duaux proportionnels, nous avons recensé quelques lois de comportement dissymétriques en traction-compression qui peuvent être utilisées pour optimiser la rigidité globale d'une structure élastique au moindre coût à l'aide de cet algorithme. Lors de cette étude, deux nouvelles lois de comportement ont été définies :

- tridimensionnelle élastique non-linéaire de type puissance dissymétrique en traction-compression dans le cadre de matériaux composites micro-fissurés,
- bidimensionnelle élastique linéaire par morceaux avec une définition biaxiale de l'état de traction-compression dans le cadre de matériaux composites à fibres longues.

Perspectives

Une première perspective à ce travail est la finalisation de la collaboration industrielle entre le LM2S, l'ONERA-Lille, et AIRBUS, qui a pour objectif de prouver que les méthodes d'optimisation développées permettent d'effectuer l'optimisation de structures à caractère industriel du milieu de l'aéronautique. Pour cela, nous effectuerons le traitement numérique de l'optimisation d'un modèle éléments finis du volet de gouverne complet, et non plus simplement d'une sous-structure.

A moyen terme, la vérification de l'ordre de grandeur des gains de rigidité prédits par la simulation numérique devra être menée à l'aide de tests expérimentaux sur des plaques composites à fibres longues curvilignes et de conception classique (fibres rectilignes).

A plus long terme, il faudrait développer une formulation et une méthode de résolution d'un problème d'optimisation qui tiennent compte de paramètres d'optimisation et de contraintes de conception plus proches des méthodes de fabrication et de conception d'AIRBUS (règles de drapage, fibres rectilignes, plis d'épaisseur constante...). Dans ce cadre, le développement d'un modèle d'assemblage de plaques, et éventuellement de plaques et coques, sans avoir recours au milieu tridimensionnel de remplissage peu rigide permettrait d'améliorer la modélisation du comportement de la structure et de diminuer le coût numérique.

D'un autre côté, les développements théoriques de la thèse nous ont permis de montrer que l'algorithme à paramètres distribués, qui est numériquement performant, s'applique avec un certain nombre de lois de comportement dissymétriques en traction-compression. La mise en œuvre numérique de cet algorithme, qui se confronte aux problèmes de la résolution du problème élastique de référence et de la minimisation locale par rapport aux paramètres

d'optimisation, reste à être effectuée pour les modèles associés aux matériaux micro-fissurés.

De plus, quelques résultats théoriques restent en suspens. Il reste à montrer que le critère possède un minimum atteint pour un couple déplacements/contraintes solution du problème élastique de référence associé à la valeur optimale des paramètres d'optimisation qui minimise le critère. Ce problème déjà abordé en élasticité linéaire [1][62], reste ouvert en élasticité non-linéaire. Enfin, l'existence possible de minimums locaux est un problème à considérer de manière numérique et théorique.

Bibliographie

- [1] G. ALLAIRE, *Shape optimization by the homogenization method*, Springer Verlag, New York, 2002.
- [2] G. ALLAIRE, E. BONNETIER, G. FRANCFORT et F. JOUVE, *Shape optimization by the homogenization method*, Numerische Mathematik, vol. 76, pp. 27–68, 1997.
- [3] G. ALLAIRE et R. KHON, *Explicit optimal bounds on the elastic energy of a two phase composite in two space dimension*, Quarterly of Applied Mathematics, vol. LI, n° 4, pp. 675–699, 1993.
- [4] G. ALLAIRE et R. KHON, *Optimal bounds on the effective behavior of a mixture of two well ordered elastic materials*, Quarterly Applied of Mathematics, vol. LI, n° 4, pp. 643–674, 1993.
- [5] G. ALLAIRE et R. KHON, *Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal micro structures*, Eur. J. Mech., A/Solids, vol. 12, n° 6, pp. 839–878, 1993.
- [6] O. ALLIX, P. LADEVÈZE et E. VITTECOQ, *Modelling and identification of the mechanical behaviour of composite laminates in compression*, Compos. Sci. Technol., vol. 51, pp. 35–42, 1994.
- [7] S. AUBRY, *Etude théorique et numérique de quelques problèmes d'optimisation de forme à l'aide de méthodes d'homogénéisation*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1999.
- [8] J.-L. BATOZ et G. DHATT, *Modélisation des structures par éléments finis, volume 1 : solides élastiques*, Hermes Paris, 1990.
- [9] J.-L. BATOZ et G. DHATT, *Modélisation des structures par éléments finis, volume 2 : poutres et plaques*, Hermes Paris, 1990.
- [10] M. BENDSOE, *Optimization of structural topology, shape and material*, Springer Verlag, New York, 1995.
- [11] M. BENDSOE, A. DIAZ, R. LIPTON et J. TAYLOR, *Optimal design of material properties and material distribution for multiple loading conditions*, Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 38, pp. 1149–1170, 1995.
- [12] M. BENDSOE, J. GUEDES, R. HABER, P. PEDERSEN et J. TAYLOR, *An analytical model to predict optimal material properties in the context of optimal structural design*, J. Applied Mechanics, vol. 61, pp. 930–937, 1994.

- [13] M. BENDSOE, J. GUEDES, S. PLAXTON et J. TAYLOR, *Optimization of structures and material properties for solids composed of softening materials*, Int. J. Solids Structures, vol. 33, n° 12, pp. 1799–1813, 1996.
- [14] M. BENDSOE et O. SIGMUND, *Material interpolation schemes in topology optimization*, Archive of Applied Mechanics, vol. 69, pp. 635–654, 1999.
- [15] J.-M. BERTHELOT, *Matériaux composites*, Masson, 1992.
- [16] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.
- [17] T. BRUNS et D. TOTORELLI, *Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 190, pp. 3443–3459, 2001.
- [18] T. BUHL, C. PEDERSEN et O. SIGMUND, *Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization*, Struct. Multidisc. Optim., vol. 19, pp. 93–104, 2000.
- [19] G. CHENG et P. PEDERSEN, *On sufficiency conditions for optimal design based on extremum principles of mechanics*, J. Mech. Phys. Solids, vol. 45, pp. 135–150, 1997.
- [20] H. CHENG, N. KIKUCHI et Z. MA, *An improved approach for determining the optimal orientation of orthotropic material*, Struct. Optim., vol. 8, pp. 101–112, 1994.
- [21] A. CHERKAEV, *Variational methods for structural optimization*, Springer Verlag, New York, 2000.
- [22] P. CIARLET, *Mathematical elasticity*, Elsevier, 1988.
- [23] S. COWIN, *Optimization of the strain energy density in linear anisotropic elasticity*, J. Elasticity, vol. 34, pp. 45–68, 1994.
- [24] K. DEMS et Z. MROZ, *Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis - I, variation of material parameters within fixed domain*, Int. J. Solids Structures, vol. 19, pp. 677–692, 1983.
- [25] K. DEMS et Z. MROZ, *Variational approach to first- and second-order sensitivity analysis of elastic structures*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 21, pp. 637–661, 1985.
- [26] B. DESMORAT et G. DUVAUT, *Optimization of the reinforcement of a 3d medium with thin composite plates*, dans *Fourth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, WCSMO-4*, June 2001.
- [27] B. DESMORAT, G. DUVAUT et E. DELETOMBE, *Renforts composites internes de structures tridimensionnelles, formulation variationnelle - optimisation*, dans *Actes du 5ème Colloque National en Calcul des Structures*, CSMA ed., Teknea, Toulouse, 2001.
- [28] R. DESMORAT, *Dissymétrie de comportement élastique anisotrope couplé ou non à l'endommagement*, C. R. Acad. Sci. Série II b, vol. 328, pp. 445–450, 2000.
- [29] R. DESMORAT, *Quasi-unilateral conditions and anisotropy*, dans *Physique et Mécanique de l'endommagement*, (pp. 57–61), Réunion du groupe de travail Mecamat, Mars 2000.

- [30] P. DESTUYNDER, *Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire*, Masson, 1986.
- [31] S. DRAPIER, J. GRANDIDIER et M. POTIER-FERRY, *Towards a numerical model of the compressive strength for long fiber composites*, Eur. J. Mech. A/Solids, vol. 18, pp. 69–92, 1999.
- [32] G. DUVAUT, *Mécanique des milieux continus*, Masson, 1990.
- [33] G. DUVAUT et B. DESMORAT, *Optimisation de la résistance de structures composites stratifiées*, Rapport technique, Onera, 2001.
- [34] G. DUVAUT, G. TERREL, F. LÉNÉ et V. VERIJENKO, *Optimization of fiber reinforced composites*, Composite Structures, vol. 48, pp. 83–89, 2000.
- [35] G. DUVAUT et V. VERIJENKO, *A new elasticity problem and its application to the optimal wrapping*, Composite Structures, vol. 54, pp. 149–152, 2001.
- [36] P. FISHER, *Optimisation non linéaire*, Cours de DESS, Université Bordeaux I.
- [37] G. DUVAUT et B. DESMORAT, *Optimisation de renforts composites internes de structures tridimensionnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II b, vol. 329, pp. 547–955, 2001.
- [38] J. GRANDIDIER, G. FERRON et M. POTIER-FERRY, *Microbuckling and strength in long fiber composites : theory and experiments*, Int. J. Solids Structures, vol. 29, pp. 753–761, 1992.
- [39] R. HAFTLA et Z. GURDAL, *Elements of structural optimization*, Kluwer, 1992.
- [40] V. HAMMER, *Optimal laminate design subject to single membrane loads*, Struct. Optim., vol. 17, pp. 65–73, 1999.
- [41] V. HAMMER, M. BENDSOE, R. LIPTON et P. PEDERSEN, *Parametrization in laminate design for optimal compliance*, Int. J. Solids Structures, vol. 34, pp. 415–434, 1997.
- [42] V. HAMMER et N. OLHOFF, *Topology optimization of continuum structures subjected to pressure loading*, Struct. Multidisc. Optim., vol. 19, pp. 85–92, 2000.
- [43] Z. HASHIN, *Failure criteria for unidirectional fiber composite*, J. of Applied Mechanics, vol. 47, pp. 329–334, 1980.
- [44] J.-B. HIRIART URRUTY et C. LEMARECHAL, *Convex analysis and minimization algorithms, I Fundamentals*, Springer Verlag, New York, 1993.
- [45] J.-B. HIRIART URRUTY et C. LEMARECHAL, *Convex analysis and minimization algorithms, II Advanced theory and Bundle methods*, Springer Verlag, New York, 1993.
- [46] M. HYER et H. LEE, *The use of curvilinear fiber format to improve buckling resistance of composite plates with central circular hole*, Comp. Struct., vol. 18, pp. 239–261, 1991.
- [47] J. IMBERT, *Analyse des structures par éléments finis*, Cepadues, Toulouse, 1984.
- [48] C. JOG, R. HAMMER et M. BENDSOE, *Topology design using a material with self-optimizing microstructure*, dans *Optimal design with advanced materials* (édité par P. PEDERSEN), Elsevier Science, 1993.

- [49] K. DEMS, *Sensitivity analysis and optimal design for fiber reinforced composite disks*, Struct. Optim., vol. 11, pp. 178–186, 1996.
- [50] P. LADEVÈZE, *On an isotropic damage theory*, dans *Proc. CNRS Int. Coll. 351 Villars-de-Lans, failure criteria of structured media* (édité par J. BOEHLER), (pp. 355–363), 1983.
- [51] J. LELLEP et J. MAJAK, *On optimal orientation of nonlinear orthotropic materials*, Struct. Optim., vol. 14, pp. 116–120, 1997.
- [52] J. LELLEP et J. MAJAK, *Optimal material orientation of nonlinear orthotropic materials*, Mech. Compos. Mater., vol. 35, pp. 233–240, 1999.
- [53] J. LELLEP et J. MAJAK, *Nonlinear constitutive behavior of orthotropic materials*, Mech. Compos. Mater., vol. 36, pp. 261–266, 2000.
- [54] E. LE DANTEC, *Contribution à la modélisation du comportement mécanique des composites stratifiés*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1989.
- [55] R. LIPTON, *On optimal reinforcement of plates and choice of design parameters*, Control Cybernetics, vol. 23, pp. 481–493, 1994.
- [56] J. MAJAK, *Orientational design of nonorthotropic two-dimensional materials*, Mech. Compos. Mater., vol. 37, pp. 15–22, 2001.
- [57] P. PEDERSEN, *On optimal orientation for orthotropic materials*, Struct. Optim., vol. 1, pp. 101–106, 1989.
- [58] P. PEDERSEN, *Bounds on elastic energy in solids of orthotropic materials*, Struct. Optim., vol. 2, pp. 55–63, 1990.
- [59] P. PEDERSEN, *On thickness and orientational design with orthotropic materials*, Struct. Optim., vol. 3, pp. 69–78, 1991.
- [60] P. PEDERSEN et J. TAYLOR, *Optimal design based on power-law non-linear elasticity*, dans *Optimal Design with Advanced Materials* (édité par P. PEDERSEN), Amsterdam : Elsevier, 1993.
- [61] G. RENAUD et J. HANSEN, *Optimal fiber orientation for composite patch repair*, dans *Second World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-2)*.
- [62] G. TERREL, *Une nouvelle méthode d'optimisation des structures composites à fibres longues*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, Paris, 1999.
- [63] G. TERREL, G. DUVAUT et P. GEOFFROY, *Development of an optimization method for composite material*, dans *International Conference on Composite material (ICCM/12), Paris, 1999*.
- [64] J. THOMSEN, *Optimization of composite discs*, Struct. Optim., vol. 3, pp. 89–98, 1991.
- [65] E. VITTECOQ, *Sur le comportement en compression des composites stratifiés carbone-epoxy*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, Paris, 1991.

ANNEXES

Annexe A

Minimisation locale pour un renfort de type membrane avec effort normal

Cette annexe présente le détail de la démarche décrite dans la section 3.3.2.

Rappel de la loi de comportement

Les grandeurs exprimées dans le repère d'orthotropie du matériau (repère des fibres) seront écrites avec un exposant f .

Dans le repère des fibres, la loi de comportement plane s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} e_{11}^f \\ e_{22}^f \\ 2e_{12}^f \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} S_{11}^f & S_{12}^f & 0 \\ S_{12}^f & S_{22}^f & 0 \\ 0 & 0 & S_{33}^f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N_{11}^f \\ N_{22}^f \\ N_{12}^f \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S_{11}^f = \frac{1}{E_1} \\ S_{22}^f = \frac{1}{E_2} \\ S_{12}^f = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ S_{33}^f = \frac{1}{G_{12}} \end{cases}$$

et la loi de comportement hors-plan s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{3,1}^f \\ u_{3,2}^f \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{22}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^f \\ Q_2^f \end{pmatrix}$$

Expression du critère dans le repère des fibres

La grandeur à minimiser g est le double de l'énergie complémentaire locale plus le coût local, ce qui s'écrit dans ce cas dans le repère des fibres :

$$g = A + B + C$$

où A est le double de l'énergie complémentaire locale associé au comportement tangentiel :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{h} \left[\frac{N_{11}^{f2}}{E_1} + \frac{N_{22}^{f2}}{E_2} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1} N_{11}^f N_{22}^f + \frac{N_{12}^{f2} + N_{21}^{f2}}{2G_{12}} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{N_{11}^{f2}}{E_1} + \frac{N_{22}^{f2}}{E_2} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1} N_{11}^f N_{22}^f + \frac{N_{12}^{f2}}{G_{12}} \right] \end{aligned}$$

et B est le double de l'énergie complémentaire locale associée au comportement normal :

$$B = \frac{1}{h} \left[\frac{Q_1^{f2}}{G_{12}} + \frac{Q_2^{f2}}{G_{22}} \right]$$

et C est le terme de coût local :

$$C = k\alpha$$

Minimisation locale par rapport à l'orientation à proportion de fibres fixée :

On note θ l'angle orienté dont est tourné le repère des fibres par rapport au repère global. La matrice de souplesse du comportement plan s'écrit dans le repère global :

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \begin{cases} S_{11} = V_1 + V_2 \cos(2\theta) + V_3 \cos(4\theta) \\ S_{22} = V_1 - V_2 \cos(2\theta) + V_3 \cos(4\theta) \\ S_{33} = 4(V_5 - V_3 \cos(4\theta)) \\ S_{12} = V_4 - V_3 \cos(4\theta) \\ S_{13} = V_2 \sin(2\theta) + 2V_3 \sin(4\theta) \\ S_{23} = V_2 \sin(2\theta) - 2V_3 \sin(4\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_1 = \frac{1}{8}(3S_{11}^f + 3S_{22}^f + 2S_{12}^f + S_{33}^f) \\ V_2 = \frac{1}{2}(S_{11}^f - S_{22}^f) \\ V_3 = \frac{1}{8}(S_{11}^f + S_{22}^f - 2S_{12}^f - S_{33}^f) \\ V_4 = \frac{1}{8}(S_{11}^f + S_{22}^f + 6S_{12}^f - S_{33}^f) \\ V_5 = \frac{1}{8}(S_{11}^f + S_{22}^f - 2S_{12}^f + S_{33}^f) \end{cases}$$

La dérivée de la grandeur A par rapport à l'angle θ se met sous la forme :

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{1}{h} (A_1 \sin(2\theta) + B_1 \cos(2\theta) + C_1 \sin(4\theta) + D_1 \cos(4\theta))$$

avec (N est ici exprimé dans le repère global) :

$$\begin{cases} A_1 = 2V_2(N_{22}^2 - N_{11}^2) \\ B_1 = 4V_2(N_{11} + N_{22})N_{12} \\ C_1 = 4V_3(N_{11} - N_{22} + 2N_{12})(N_{22} - N_{11} + 2N_{12}) \\ D_1 = 16V_3(N_{11} - N_{22})N_{12} \end{cases}$$

La matrice de souplesse du comportement hors-plan s'écrit dans le repère global :

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta)^2}{G_{12}} + \frac{\sin(\theta)^2}{G_{22}} & \cos(\theta) \sin(\theta) \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{1}{G_{22}} \right) \\ \cos(\theta) \sin(\theta) \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{1}{G_{22}} \right) & \frac{\cos(\theta)^2}{G_{22}} + \frac{\sin(\theta)^2}{G_{12}} \end{pmatrix}$$

La dérivée de la grandeur B par rapport à l'angle θ se met alors sous la forme :

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = \frac{1}{h} (A_2 \sin(2\theta) + B_2 \cos(2\theta))$$

avec (Q est ici exprimé dans le repère global) :

$$\begin{cases} A_2 = \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{1}{G_{22}} \right) (Q_2^2 - Q_1^2) \\ B_2 = 2 \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{1}{G_{22}} \right) Q_1 Q_2 \end{cases}$$

De plus $\frac{\partial C}{\partial \theta} = 0$ car le coût ne dépend pas de l'angle θ .

La dérivée de la grandeur locale à minimiser g par rapport à l'angle θ se met alors sous la forme :

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{1}{h} (A_0 \sin(2\theta) + B_0 \cos(2\theta) + C_0 \sin(4\theta) + D_0 \cos(4\theta))$$

avec

$$\begin{cases} A_0 = 2V_2(N_{22}^2 - N_{11}^2) + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{1}{G_{22}} \right) (Q_2^2 - Q_1^2) \\ B_0 = 4V_2(N_{11} + N_{22})N_{12} + 2 \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{1}{G_{22}} \right) Q_1 Q_2 \\ C_0 = 4V_3(N_{11} - N_{22} + 2N_{12})(N_{22} - N_{11} + 2N_{12}) \\ D_0 = 16V_3(N_{11} - N_{22})N_{12} \end{cases}$$

Par mise au carré, l'équation $\frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$ se met sous la forme du polynôme du quatrième

degré :

$$a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 = 0$$

avec $X = \cos(2\theta)$ ou $X = \sin(2\theta)$, et les solutions analytiques explicites d'un tel polynôme existent. Numériquement, il convient donc de les calculer puis de les trier pour déterminer le minimum global de g .

Pour $X = \sin(2\theta)$, les coefficients a,b,c,d,e sont donnés par :

$$\begin{cases} a = D_0^2 - B_0^2 \\ b = 2A_0D_0 - 4B_0C_0 \\ c = A_0^2 - 4C_0^2 - 4D_0^2 + B_0^2 \\ d = 4(B_0C_0 - A_0D_0) \\ e = 4(C_0^2 + D_0^2) \end{cases}$$

Pour $X = \cos(2\theta)$, les coefficients a,b,c,d,e sont donnés par :

$$\begin{cases} a = A_0^2 - D_0^2 \\ b = 2B_0D_0 + 4A_0C_0 \\ c = -A_0^2 + 4C_0^2 + 4D_0^2 - B_0^2 \\ d = 4(A_0C_0 - B_0D_0) \\ e = -4(C_0^2 + D_0^2) \end{cases}$$

Le tri des solutions est réalisé en 3 étapes :

1. On élimine les solutions qui ne vérifient pas la condition $\partial g / \partial \theta = 0$, (les solutions "parasites" générées par la mise au carré sont ainsi éliminées),
2. On éliminent les solutions restantes qui ne sont pas des minimums par un test sur le signe de la dérivée seconde,
3. Dans le cas de plusieurs minimums on compare les valeurs du critère pour déterminer le minimum global.

Minimisation locale par rapport à la proportion de fibres à orientation fixée :

On se place dans le repère des fibres. Le double de l'énergie complémentaire locale associée au comportement tangentiel A se met sous la forme [62] :

$$A = \frac{A_1 + B_1\alpha + C_1\alpha^2}{h(\alpha E_{f1} + (1 - \alpha)E_m)}$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= N_{11}^{f2} + N_{22}^{f2} - 2\nu_m N_{11}^f N_{22}^f + \frac{E_m}{G_m} N_{12}^{f2} \\ B_1 &= \left(\frac{E_m}{E_{f2}} + \frac{E_{f1}}{E_m} - 2 \right) N_{22}^{f2} - 2(\nu_{f12} - \nu_m) N_{11}^f N_{22}^f + \left(E_m \left(\frac{1}{G_{f12}} - \frac{1}{G_m} \right) + \frac{E_{f1} - E_m}{G_m} \right) N_{12}^{f2} \\ C_1 &= (E_{f1} - E_m) \left(\frac{1}{E_{f1}} - \frac{1}{E_m} \right) N_{22}^{f2} + (E_{f1} - E_m) \left(\frac{1}{G_{f12}} - \frac{1}{G_m} \right) N_{12}^{f2} \end{aligned}$$

Compte tenu que

$$G_{22} = \left(\frac{\alpha}{G_{f22}} + \frac{1 - \alpha}{G_m} \right)^{-1}$$

on peut écrire la grandeur B sous la forme :

$$B = \frac{Q_1^{f2} + Q_2^{f2}}{hG_m} + \frac{\alpha}{h} \left[Q_1^{f2} \left(\frac{1}{G_{f12}} - \frac{1}{G_m} \right) + Q_2^{f2} \left(\frac{1}{G_{f22}} - \frac{1}{G_m} \right) \right]$$

Le grandeur locale à minimiser g se met alors sous la forme :

$$g = A + B + C = \frac{Q_1^{f2} + Q_2^{f2}}{hG_m} + \frac{A_1 + B_1\alpha + C_1\alpha^2}{h(\alpha E_{f1} + (1 - \alpha)E_m)} + k'\alpha$$

avec $k' = k + \frac{Q_1^{f2}}{h} \left(\frac{1}{G_{f12}} - \frac{1}{G_m} \right) + \frac{Q_2^{f2}}{h} \left(\frac{1}{G_{f22}} - \frac{1}{G_m} \right)$.

L'expression de $\partial g / \partial \alpha$ est alors de la même forme que celle trouvée dans le cas d'une membrane en élasticité plane. Le paramètre k' est désormais un paramètre qui n'est pas constant sur S car il dépend des efforts normaux. La résolution de $\min_{\alpha} g$ est alors explicite [62].

Annexe B

Orientation optimale d'un matériau à loi de comportement dissymétrique en traction-compression

L'objectif de cette annexe est de démontrer les résultats présentés dans le tableau 5.2 de la section 5.4.3.

Rappel de quelques notations

σ_I et σ_{II} sont les deux contraintes principales dans l'élément considéré, avec $|\sigma_{II}| < |\sigma_I|$. L'angle θ est défini comme l'angle de rotation entre la direction principale des contraintes associée à σ_I et la direction d'orthotropie du matériau de plus grande rigidité, c'est-à-dire celle qui correspond à E_1 et E_1^C .

Résultats préliminaires

Pour démontrer les résultats du tableau 5.2 de la section 5.4.3, nous utiliserons les trois propriétés suivantes :

1. si $\mu > 0$, $\text{sign}(\sigma_{11}) = \text{sign}(\sigma_I)$ et $\sigma_{11} \neq 0 \quad \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
2. si $\mu < 0$, les courbes représentant l'énergie complémentaire pour les comportements élastique linéaire orthotrope en traction et élastique linéaire orthotrope en compression possèdent toujours deux minimums et deux maximums quand θ varie dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, et dans ce cas
 - le premier minimum est obtenu pour $\theta = 0$ et est tel que $\text{sign}(\sigma_{11}) = \text{sign}(\sigma_I)$,
 - le deuxième minimum est obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et est tel que $\text{sign}(\sigma_{11}) = -\text{sign}(\sigma_I)$.

Démonstration.

Remarque préliminaire : Considérons la fonction $f(\mu) = \frac{1+\mu}{1-\mu}$ pour $\mu \in [-1; +1[$. La dérivée de $f(\mu)$ est $\frac{2}{(1-\mu)^2}$, et est donc strictement positive pour $\mu \in [-1; +1[$. $f(0) = 1$ et f est strictement croissante donc

$$\begin{aligned} 0 < \mu < 1 &\Rightarrow 1 < f(\mu) \\ -1 < \mu \leq 0 &\Rightarrow 0 \leq f(\mu) \leq 1 \end{aligned}$$

Démonstration de la propriété 1. La contrainte σ_{11} s'exprime en fonction des contraintes principales sous la forme :

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \cos(2\theta) \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$$

La condition $\sigma_{11} = 0$ peut donc s'écrire sous la forme

$$\cos(2\theta) = -\frac{1+\mu}{1-\mu} = -f(\mu) \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\sigma_{II}}{\sigma_I} \quad (\text{B.1})$$

Compte tenu de l'hypothèse $0 \leq |\sigma_{II}| < |\sigma_I|$, la grandeur μ peut varier dans $[-1; +1[$. Or $\mu > 0$ implique que $f(\mu) > 1$. L'équation $\sigma_{11} = 0$ ne possède donc pas de solution. Donc $\sigma_{11} \neq 0 \forall \theta$ et σ_{11} est du même signe que $\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}$, c'est à dire du même signe que σ_I car $|\sigma_{II}| < |\sigma_I|$.

Démonstration de la propriété 2. $\mu \in [-1; 0]$ donc $f(\mu) \leq 1$. La condition (5.31) implique que [19] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta_2}{4\beta_3} < 1 \\ \left(\frac{\beta_2}{4\beta_3} \right)^C < 1 \end{array} \right.$$

Donc $\zeta = \frac{\beta_2}{4\beta_3} f(\mu) < 1$ et $\zeta^C = \left(\frac{\beta_2}{4\beta_3} \right)^C f(\mu) < 1$. Ce qui implique l'existence de deux minimums et de deux maximums à l'énergie complémentaire en fonction de l'angle d'orientation θ [19] (voir section 1.4.1) aussi bien dans le cas de la loi de comportement obtenue en traction que celle obtenue en compression.

L'équation (B.1) se met sous la forme :

$$\sigma_{11} = \sigma_I \left(\frac{1+\mu}{2} + \cos(2\theta) \frac{1-\mu}{2} \right)$$

L'énergie complémentaire d'un matériau élastique linéaire orthotrope en fonction de θ est

minimale pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Or $\theta = 0$ implique que

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_I \left(\frac{1+\mu}{2} + \frac{1-\mu}{2} \right) \\ &= \sigma_I\end{aligned}$$

et donc le minimum associé à $\theta = 0$ est tel que $\text{sign}(\sigma_{11}) = \text{sign}(\sigma_I)$.

$\theta = \frac{\pi}{2}$ implique que

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_I \left(\frac{1+\mu}{2} - \frac{1-\mu}{2} \right) \\ &= \mu\sigma_I\end{aligned}$$

Or on est dans le cas $\mu < 0$, donc le minimum associé à $\theta = \frac{\pi}{2}$ est tel que $\text{sign}(\sigma_{11}) = -\text{sign}(\sigma_I)$. \square

Démonstration principale

Cas où $\mu > 0$:

Ce cas regroupe deux possibilités :

- $\sigma_I > 0$ et $\sigma_{II} > 0$
- $\sigma_I < 0$ et $\sigma_{II} > 0$

La propriété 1 implique que σ_{11} ne s'annule pas quelque soit θ et donc que seule une des deux courbes est active. De plus, $\text{sign}(\sigma_{11}) = \text{sign}(\sigma_I)$, donc

- si $\sigma_I > 0$, la courbe active est celle de l'énergie complémentaire d'un matériau élastique linéaire orthotrope avec comme module d'Young longitudinal E_1 ,
- si $\sigma_I < 0$, la courbe active est celle de l'énergie complémentaire d'un matériau élastique linéaire orthotrope avec comme module d'Young longitudinal E_1^C .

Dans les deux cas, l'angle optimal qui minimise l'énergie complémentaire est $\theta = 0^\circ$.

Cas où $\sigma_I > 0$ et $\sigma_{II} < 0$:

On est alors dans le cas où $\mu < 0$.

Les minimums de la portion active de la courbe de l'énergie complémentaire associée à la loi de comportement orthotrope de traction (c'est-à-dire avec E_1) sont tels que $\sigma_{11} > 0$. Comme dans le cas étudié $\sigma_I > 0$, la propriété 2 nous permet de conclure la portion de courbe active associée à la loi de comportement orthotrope en traction possède un unique minimum qui est obtenu pour $\theta = 0$.

Les minimums de la portion active de la courbe de l'énergie complémentaire associée à la loi de comportement orthotrope de compression (c'est-à-dire avec E_1^C) sont tels que

$\sigma_{11} < 0$. Comme dans le cas étudié $\sigma_I > 0$, la propriété 2 nous permet de conclure la portion de courbe active associée à la loi de comportement orthotrope en compression possède un unique minimum qui est obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

On sait que le minimum de la courbe de l'énergie complémentaire pour le matériau orthotrope de traction obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (noté $Min_T(\theta = \frac{\pi}{2})$) est strictement supérieur à celui obtenu pour $\theta = 0$ (noté $Min_T(\theta = 0)$), ce qui s'écrit :

$$Min_T(\theta = \frac{\pi}{2}) \geq Min_T(\theta = 0) \quad (\text{B.2})$$

$Min_T(\theta = \frac{\pi}{2})$ vaut :

$$Min_T(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_{II}^2}{E_1} + \frac{\sigma_I^2}{E_2} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_I \sigma_{II} \right]$$

Le minimum de la courbe de l'énergie complémentaire pour le matériau orthotrope de traction obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ est :

$$Min_C(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_{II}^2}{E_1^C} + \frac{\sigma_I^2}{E_2} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_I \sigma_{II} \right]$$

La différence $Min_C(\theta = \frac{\pi}{2}) - Min_T(\theta = \frac{\pi}{2})$ s'écrit alors :

$$Min_C(\theta = \frac{\pi}{2}) - Min_T(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_{II}^2}{E_1^C} - \frac{\sigma_{II}^2}{E_1} \right]$$

Comme $E_1^C < E_1$, on en déduit que $Min_C(\theta = \frac{\pi}{2}) - Min_T(\theta = \frac{\pi}{2}) > 0$. Compte tenu de (B.2), on obtient donc que

$$Min_C(\theta = \frac{\pi}{2}) - Min_T(\theta = 0) > 0$$

et donc que, dans ce cas où $\sigma_I > 0$ et $\sigma_{II} < 0$, l'angle optimal qui minimise l'énergie complémentaire associée à la loi de comportement dissymétrique en traction-compression considérée est $\theta = 0$.

Cas où $\sigma_I < 0$ et $\sigma_{II} > 0$:

On est alors dans le cas où $\mu < 0$.

Les minimums de la portion active de la courbe de l'énergie complémentaire associée à la loi de comportement orthotrope de traction (c'est-à-dire avec E_1) sont tels que $\sigma_{11} > 0$. Comme dans le cas étudié $\sigma_I < 0$, la propriété 2 nous permet de conclure la portion de courbe active associée à la loi de comportement orthotrope en traction possède un unique minimum qui est obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Les minimums de la portion active de la courbe de l'énergie complémentaire associée

à la loi de comportement orthotrope de compression (c'est-à-dire avec E_1^C) sont tels que $\sigma_{11} < 0$. Comme dans le cas étudié $\sigma_I < 0$, la propriété 2 nous permet de conclure la portion de courbe active associée à la loi de comportement orthotrope en compression possède un unique minimum qui est obtenu pour $\theta = 0$.

Le minimum de la courbe de l'énergie complémentaire pour le matériau orthotrope de traction obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (noté $Min_T(\theta = \frac{\pi}{2})$) s'écrit :

$$Min_T(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_{II}^2}{E_1} + \frac{\sigma_I^2}{E_2} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_I\sigma_{II} \right]$$

Le minimum de la courbe de l'énergie complémentaire pour le matériau orthotrope de compression obtenu pour $\theta = 0$ (noté $Min_C(\theta = 0)$) s'écrit :

$$Min_C(\theta = 0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_I^2}{E_1^C} + \frac{\sigma_{II}^2}{E_2} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_I\sigma_{II} \right]$$

La différence des deux s'écrit alors :

$$\Delta = Min_T(\theta = \frac{\pi}{2}) - Min_C(\theta = 0) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1^C} \right) \sigma_I^2 - \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{II}^2 \right]$$

On démontre aisément que :

$$\begin{cases} \Delta < 0 & \Leftrightarrow & -1 < \mu < -\mu_0 \\ \Delta > 0 & \Leftrightarrow & -\mu_0 < \mu < 0 \end{cases} \quad \left(\text{avec } \mu_0 = \frac{1 - \frac{E_2}{E_1^C}}{1 - \frac{E_2}{E_1}} \right)$$

En conclusion, dans ce cas où $\sigma_I < 0$ et $\sigma_{II} > 0$, la condition $-1 < \mu < -\mu_0$ implique donc un angle optimal $\theta = \frac{\pi}{2}$ et la condition $-\mu_0 < \mu < 0$ un angle optimal $\theta = 0$.