

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Présentée par

Boris DESMORAT

---

Sur la prise en compte de l'anisotropie,  
de comportements non-linéaires  
et de la tenue mécanique  
en optimisation structurale

---

**Jury :**

*Rapporteurs :* G. ALLAIRE - Ecole Polytechnique  
G. DE SAXCÉ - Univ. Lille  
M. POTIER-FERRY - Univ. Lorraine  
*Examineurs :* P. BREITKOPF - UTC  
D. KONDO - UPMC  
P. LADEVÈZE - ENS Cachan



# Sommaire

<b>1</b>	<b>Problématique de recherche et positionnement scientifique</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Un algorithme d'optimisation structurale en élasticité linéaire</b>	<b>3</b>
2.1	Description, avantages et limitations . . . . .	3
2.2	Prise en compte d'un volume donné . . . . .	5
2.3	Instabilités numériques en damier et de dépendance au maillage . . . . .	6
2.4	Méthodologies d'optimisation alternatives . . . . .	7
	Bibliographie du Chapitre . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Extension aux contraintes initiales et aux plaques et coques</b>	<b>11</b>
3.1	Contraintes initiales dépendant du design . . . . .	12
3.2	Assemblages de plaques . . . . .	12
3.3	Coque de géométrie quelconque donnée . . . . .	14
3.4	Perspectives . . . . .	16
	Bibliographie du Chapitre . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Prise en compte de la non-linéarité du comportement et de l'endommagement</b>	<b>19</b>
4.1	Potentiels positivement homogènes . . . . .	20
4.2	Comportements élastiques non-linéaires dissymétriques en traction-compression .	20
4.3	Contact unilatéral sans frottement . . . . .	23
4.4	Fatigue à faible nombre de cycles pilotée par l'endommagement . . . . .	25
4.5	Perspectives . . . . .	26
	Bibliographie du Chapitre . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Prise en compte de l'anisotropie et de la tenue mécanique</b>	<b>29</b>
5.1	Paramétrisation par la méthode polaire pour les stratifiés . . . . .	30
5.2	Une approche d'optimisation hiérarchique appliquée aux stratifiés . . . . .	32
5.3	Minimisation de l'énergie complémentaire dans le cas orthotrope . . . . .	34
5.4	Minimisation d'un critère de tenue mécanique orthotrope . . . . .	35
5.5	Optimisation simultanée de la rigidité et de la tenue mécanique . . . . .	35
5.6	Perspectives . . . . .	37
	Bibliographie du Chapitre . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Bilan scientifique</b>	<b>39</b>
	<b>Bibliographie personnelle</b>	<b>41</b>



# Problématique de recherche et positionnement scientifique

---

La conception optimale de structure est caractérisée par le croisement de trois champs d'expertise scientifique : le *calcul des structures*, les *comportements des matériaux* et les *algorithmes d'optimisation*. Il est nécessaire de tenir compte de l'interaction de ces trois aspects afin de définir une méthodologie d'optimisation pertinente en terme de coût de calcul, de robustesse et de précision sur la réponse structurale.

**En ce qui concerne les comportements des matériaux**, il faut distinguer deux familles de problèmes définis par l'utilisation de matériaux homogènes ou de matériaux micro-structurés.

*Pour les matériaux homogènes*, les démarches de conception optimales restent encore à définir quand il s'agit de prendre en compte de fortes non-linéarités matériau (visco-plasticité et endommagement) pour lesquelles les modèles sont nombreux et complexes. Mes travaux considèrent des comportements élastiques non-linéaires, élasto-plastiques avec et sans endommagement sous chargements monotones ou cycliques sous l'hypothèse des petites perturbations. Dans la littérature, de nombreuses études traitent de comportements élastiques non-linéaires ainsi que de l'élasto-plasticité, mais encore très peu de comportements avec endommagement pour lesquels de très nombreux problèmes de conception optimale restent ouverts, notamment sous chargement cyclique car il est alors nécessaire d'utiliser une modélisation approchée des lois de comportement afin de limiter les temps de calcul et de rendre utilisable la méthodologie d'optimisation développée.

*Pour les matériaux micro-structurés*, le type de micro-structure influe considérablement sur les méthodologies d'optimisation développées car il est nécessaire de tenir compte de la faisabilité des structures optimales obtenues. Dans ce cadre, je me suis exclusivement consacré à l'étude des composites stratifiés dans une démarche d'optimisation topologique de la distribution de l'anisotropie. Les stratifiés considérés sont alors constitués de plis à fibres curvilignes pour lesquels de nombreuses méthodes de fabrication industrielles sont opérationnelles de nos jours. Les besoins industriels en terme de conception de ce type de structures sont actuellement très forts, et couvrent de multiples critères. A ce jour, je suis en mesure de proposer une méthodologie d'optimisation à deux échelles (dénommée hiérarchique) tenant compte de la tenue mécanique et de la rigidité structurale et basée sur une paramétrisation de l'anisotropie par invariants à l'aide du formalisme polaire. L'originalité de cette approche réside en deux points : prise en compte de l'ensemble des stratifications possibles et utilisation d'un critère de résistance homogène. Dans la littérature, il existe des approches qui traitent ce type de problème. Une première est basée sur une paramétrisation de l'anisotropie (*lamination parameters*) n'utilisant pas des invariants et qui ne caractérise pas explicitement les symétries matérielles. Une seconde utilise les orientations des plis comme paramètres d'optimisation au prix d'un coût numérique bien plus élevé. Enfin une troisième limite le domaine de recherche des stratifications pour tenir compte du critère de tenue mécanique et peut donc se révéler sous-optimale.

**En ce qui concerne le calcul des structures,** la littérature dans le cadre de l'optimisation topologique est abondante. Les études couvrent notamment (sans être exhaustif) les prises en compte de non-linéarités géométriques, de chargements dépendant du design (poids, pression, chargement thermique, ...), de contact et de chargements dynamiques.

Afin de proposer une méthodologie d'optimisation de structures composites stratifiées pouvant aboutir à un outil numérique de conception optimale utilisable industriellement, mes travaux traitent de la prise en compte de plaques et coques (la prise en compte de coques stratifiées de géométries quelconques représentant un problème industriellement crucial dans les domaines automobile et aéronautique), ainsi que de chargements thermo-élastiques et de contact unilatéral en optimisation topologique de l'anisotropie de structures stratifiées (les résultats sous chargements thermo-élastiques et avec contact unilatéral étant aussi utilisables en optimisation topologique classique, c'est-à-dire pour la répartition optimale d'un matériau isotrope dans un domaine donné).

**En ce qui concerne les algorithmes d'optimisation,** je me suis cantonné dans toutes mes études à l'algorithme des directions alternées, initialement introduit par Allaire et Kohn (1993) en optimisation topologique dans le cadre de la maximisation de la rigidité structurale mesurée par la compliance (ou travail des efforts extérieurs). Le choix de cet algorithme repose sur sa robustesse (convergence démontrée et donc garantie numériquement) et son coût numérique très réduit car il ne repose que sur des calculs de sensibilités locaux qui, même en prenant en compte des comportements anisotropes, peuvent être résolus analytiquement. Les lois de comportement non-linéaires ainsi que les cas particuliers de calculs de structures cités précédemment ont tous été menés afin d'étendre le champ d'utilisation de cet algorithme.

Bien évidemment, ce choix n'est pas l'unique possible, et d'autres algorithmes d'optimisation peuvent se montrer très performants pour certains types de problème (méthodes de critère d'optimalité, méthode des asymptotes mobiles, méthode de l'état adjoint, méthode des lignes de niveau, optimisation avec matériau libre, ...).

### **Présentation du mémoire :**

*Le premier chapitre* présente en détails l'algorithme des directions alternées, les précautions numériques nécessaires à une utilisation robuste, ainsi que les principaux algorithmes d'optimisation alternatifs utilisés en optimisation structurale.

*Le second chapitre* décrit les divers types de calcul des structures auxquels l'algorithme des directions alternées a été généralisé (en considérant des stratifications données dans le cas des plaques et coques).

*Le troisième chapitre* explicite la prise en compte de comportements élastiques non-linéaires, élasto-plastiques ainsi que la prise en compte de l'endommagement sous chargement cyclique avec l'algorithme des directions alternées.

*Le quatrième chapitre* présente la prise en compte de l'anisotropie et de la tenue mécanique dans une démarche hiérarchique (multi-échelle) alliant séquentiellement algorithme d'optimisation des directions alternées et algorithme génétique.

Enfin, un bilan de mes activités de recherche et un projet de recherche sont présentés en conclusion.

*Remarque :* Chaque chapitre possède sa propre section bibliographique et les chapitres 2, 3, 4 se concluent par une section de perspectives.

# Un algorithme d'optimisation structurale en élasticité linéaire

## Sommaire

2.1	Description, avantages et limitations . . . . .	3
2.2	Prise en compte d'un volume donné . . . . .	5
2.3	Instabilités numériques en damier et de dépendance au maillage . . . . .	6
2.4	Méthodologies d'optimisation alternatives . . . . .	7
	Bibliographie du Chapitre . . . . .	9

## 2.1 Description, avantages et limitations

Le point de départ (et la pierre angulaire) de tous mes travaux de recherche est l'approche en contraintes du problème de minimisation du travail des efforts extérieurs (ou *compliance*, en anglais) dans le cadre de l'optimisation topologique par technique d'homogénéisation, initialement introduite dans le cadre de l'élasticité 2D [5] puis étendue au cas 3D [3]. Cette approche permet l'écriture du problème de minimisation de la compliance sous la forme d'une double minimisation vis à vis des paramètres d'optimisation distribués et des champs de contraintes statiquement admissibles.

Sous les hypothèses de petits déplacements et de petites déformations, le problème élastique linéaire de référence à *déplacements imposés nuls* s'écrit

$$(P) \begin{cases} \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}} + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot n = F & \text{sur } \Gamma_1 \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{Q}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $u$  sont les champs de contraintes et de déplacements solutions,  $f$  est l'effort volumique appliqué dans le domaine  $\Omega$ ,  $F$  est l'effort surfacique appliqué sur la partie  $\Gamma_1$  de la frontière de  $\Omega$ ,  $\underline{\underline{Q}}$  est le tenseur de rigidité et  $\underline{\underline{\varepsilon}}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$  est le tenseur de déformation. Dans la suite, un champ de contraintes statiquement admissible, c'est-à-dire vérifiant l'équilibre et les conditions aux limites en efforts, sera noté en utilisant l'acronyme *SA*.

Pour ce problème d'élasticité linéaire ( $P$ ), on obtient classiquement l'égalité entre la compliance (ou travail des efforts extérieurs) et le double de l'énergie complémentaire ( $\underline{\underline{S}}$  est le tenseur de souplesse) :

$$\int_{\Omega} f \cdot u dV + \int_{\Gamma_1} F \cdot u dS = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} dV \tag{2.1}$$

et le théorème de l'énergie complémentaire implique

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} dV \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\tau}} dV \quad \forall \underline{\underline{\tau}} SA \quad (2.2)$$

En considérant des paramètres d'optimisation distribués bornés notés  $\beta(x) \in [\beta_{min}, \beta_{max}]$ , la maximisation de la rigidité globale d'une structure élastique linéaire est traitée comme la minimisation de la somme de la compliance et d'un terme de coût :

$$\min_{\beta \in [\beta_{min}, \beta_{max}]} \left( \int_{\Omega} f \cdot u dV + \int_{\Gamma_1} F \cdot u dS + \int_{\Omega} cout(\beta) dV \right) \quad (2.3)$$

qui, compte tenu de (2.2) et de (2.11), peut se mettre sous la forme

$$\min_{\beta \in [\beta_{min}, \beta_{max}]} \min_{\underline{\underline{\tau}} SA} \left[ \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}}(\beta) : \underline{\underline{\tau}} dV + \int_{\Omega} cout(\beta) dV \right]$$

**L'algorithme d'optimisation des directions alternées** découle directement de cette formulation en double minimisation. Une itération ( $n$ ) est constituée de deux étapes de minimisations successives :

1. *Étape de minimisations locales :*

Minimisation du critère local  $\underline{\underline{\sigma}}^{(n)} : \underline{\underline{S}}(\beta) : \underline{\underline{\sigma}}^{(n)} + cout(\beta)$  par rapport aux paramètres d'optimisation  $\beta \in [\beta_{min}, \beta_{max}]$  à contraintes fixées. Il vient après intégration sur le domaine  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{(n)} : \underline{\underline{S}}(\beta^{(n+1)}) : \underline{\underline{\sigma}}^{(n)} dV + \int_{\Omega} cout(\beta^{(n+1)}) dV \leq \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{(n)} : \underline{\underline{S}}(\beta^{(n)}) : \underline{\underline{\sigma}}^{(n)} dV + \int_{\Omega} cout(\beta^{(n)}) dV \quad (2.4)$$

2. *Étape de minimisation globale :*

Minimisation de l'énergie complémentaire par rapport aux contraintes statiquement admissibles à paramètres d'optimisation fixés. Il vient après utilisation du théorème de l'énergie complémentaire :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} : \underline{\underline{S}}(\beta^{(n+1)}) : \underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} dV + \int_{\Omega} cout(\beta^{(n+1)}) dV \leq \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^{(n)} : \underline{\underline{S}}(\beta^{(n+1)}) : \underline{\underline{\sigma}}^{(n)} dV + \int_{\Omega} cout(\beta^{(n+1)}) dV \quad (2.5)$$

Compte tenu de (2.4) et (2.5), le critère diminue à chaque itération. Le critère étant une grandeur positive, l'algorithme converge vers une limite qui est un point stationnaire du critère d'optimisation et, dans la pratique numérique, un minimiseur local.

L'applicabilité de l'algorithme est garantie grâce aux conditions (C) suivantes :

1. existence d'une solution au problème élastique de référence,
2. déplacements imposés à zéro,
3. utilisation du théorème de l'énergie complémentaire,
4. égalité entre la compliance et le double de l'énergie complémentaire.



**Le principal avantage** de cet algorithme d'optimisation réside dans la nature locale des calculs de sensibilités, qui sont donc peu coûteux numériquement : le coût de l'algorithme est lié à l'étape de minimisation globale (qui n'est en fait qu'un simple calcul par éléments finis des contraintes) et au nombre nécessaire d'itérations pour converger.

Sous cette forme, **la principale limitation** de cette algorithme est qu'il n'est possible d'utiliser qu'un seul critère, la compliance.

D'autres limitations seront évoquées dans la section 2.4 qui décrit des méthodologies d'optimisation alternatives à l'algorithme des directions alternées.

## 2.2 Prise en compte d'un volume donné

Avec la méthode d'optimisation présentée dans la section 2.1, il est possible de piloter le coût obtenu à l'état optimal en pondérant le terme de coût par un paramètre *fixé* lors de la démarche d'optimisation (il est à noter que l'évolution du terme de coût n'est alors pas monotone au cours des itérations). Il n'est néanmoins pas possible de trouver a priori la valeur du paramètre de pondération qui permet d'obtenir à l'état optimal le coût souhaité.

Il est possible de modifier la méthode d'optimisation précédente pour prendre en compte un coût donné [3]. Pour la présentation, nous nous placerons dans le cadre de l'approche SIMP [7, 16], qui est l'approche utilisée dans tous mes travaux dans le cadre de l'optimisation topologique. Dans un domaine  $\Omega$ , considérons le problème de la répartition d'un volume donné  $V_d$  d'un matériau fixé de tenseur de rigidité  $\underline{\underline{Q}}^0$  (le tenseur de souplesse sera noté  $\underline{\underline{S}}^0$ ).

**Paramètres d'optimisation :** densité fictive de matière distribuée  $\rho(x) \in [\rho_{min}, 1]$ . Le tenseur de rigidité  $\underline{\underline{Q}}$  du matériau fictif est approché par le tenseur  $\rho^p \underline{\underline{Q}}^0$ . La densité fictive  $\rho$  n'est pas autorisée à tendre vers zéro pour éviter que le tenseur de rigidité ne devienne singulier ( $\rho_{min}$  est généralement choisi égal à  $10^{-3}$  en pratique). Le paramètre *fixé*  $p$  permet d'obtenir un design optimal pour lequel les densités intermédiaires ont été éliminées ( $p$  est généralement choisi égal à 3 en pratique).

**Problème d'optimisation :**

$$\min_{\rho \in [\rho_{min}, 1]} \left( \int_{\Omega} f \cdot u dV + \int_{\Gamma_1} F \cdot u dS \right) \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega} \rho(x) dV = V_d \quad (2.6)$$

**Algorithme d'optimisation :**

1. *Étape de minimisations locales :*

En introduisant un paramètre scalaire réel positif  $k$ , on considère le problème de minimisation locale suivant :

$$\min_{\rho \in [\rho_{min}, 1]} \left[ \frac{1}{\rho^p} \underline{\underline{\sigma}}^{(n)} : \underline{\underline{S}}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^{(n)} + k\rho \right] \quad (2.7)$$

Ce problème de minimisation locale a pour solution :

$$\rho^{opt}(k) = \max \left[ \rho_{min}, \min \left[ 1, \left( \frac{p}{k} \underline{\underline{\sigma}}^{(n)} : \underline{\underline{S}}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^{(n)} \right)^{\frac{1}{p+1}} \right] \right] \quad (2.8)$$

Soit  $f(k) = V(k) - V_d = \int_{\Omega} \rho_{opt}(k) dV - V_d$ . On introduit une boucle sur les minimisations locales afin de résoudre  $f(k) = 0$  (compte tenu du fait que la fonction  $f(k)$  est décroissante, cette résolution peut s'effectuer par dichotomie). A convergence, il vient après intégration sur le domaine  $\Omega$  (en tenant compte du fait que  $\int_{\Omega} \rho^{(n+1)} dV = \int_{\Omega} \rho^{(n)} dV = V_d$ ) :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\rho^{(n+1)}} \underline{\sigma}^{(n)} : \underline{S}^0 : \underline{\sigma}^{(n)} dV \leq \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^{(n)}} \underline{\sigma}^{(n)} : \underline{S}^0 : \underline{\sigma}^{(n)} dV \quad (2.9)$$

2. *Étape de minimisation globale :*

Minimisation de l'énergie complémentaire par rapport aux contraintes SA à paramètres d'optimisation fixés. Il vient après utilisation du théorème de l'énergie complémentaire :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\rho^{(n+1)}} \underline{\sigma}^{(n+1)} : \underline{S}^0 : \underline{\sigma}^{(n+1)} dV \leq \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^{(n+1)}} \underline{\sigma}^{(n)} : \underline{S}^0 : \underline{\sigma}^{(n)} dV \quad (2.10)$$

Compte tenu de (2.9) et (2.10), le critère diminue à chaque itération. Le critère étant une grandeur positive, l'algorithme converge vers une limite qui est un point stationnaire du critère d'optimisation et, dans la pratique numérique, un minimiseur local.

Comparativement à la version standard de l'algorithme présentée dans la section 2.1, **le principal avantage** de cet algorithme d'optimisation réside dans le fait qu'il est possible de fixer a priori le volume total de matière au prix de la perte de la nature locale des calculs de sensibilités. Néanmoins ces calculs de sensibilités restent peu coûteux numériquement car ils allient solution analytique et résolution par dichotomie de la nullité d'une fonction scalaire à variable scalaire. Le coût de l'algorithme reste lié à l'étape de minimisation globale et donc au nombre nécessaire d'itérations pour converger.

**La principale limitation** de cet algorithme est identique à la version standard : il n'est possible d'utiliser qu'un seul critère, la compliance.

## 2.3 Instabilités numériques en damier et de dépendance au maillage

Lors de l'application de l'algorithme des directions alternées en optimisation topologique, il se produit des instabilités numériques en damier (*checkerboard instabilities*) et/ou de dépendance au maillage. Ces instabilités sont intrinsèquement liées à la non-existence de forme optimale dans le cas général de l'optimisation de formes (voir par exemple [12] et [2]).

Les instabilités numériques en damiers sont généralement traitées par des filtres heuristiques. Une revue des diverses approches met en avant les approches suivantes (listées ici sans ordre particulier): éléments finis d'ordre supérieur, technique de patch qui introduit des superéléments sur lesquels sont projetées les densités (avec conservation de la densité totale), filtre sur les sensibilités (technique de patch avec projections des sensibilités sur les éléments adjacents). Il est aussi possible d'adapter des filtres heuristiques (notamment celui sur les sensibilités évoqué ci-dessus) introduit pour le traitement des instabilités en damiers pour obtenir une indépendance au maillage de la forme optimale. Dans le cadre des méthodes de restriction qui permettent d'assurer l'existence d'une forme optimale, et donc qui éliminent les instabilités en damier et de dépendance au maillage, nous citerons en gardant la terminologie utilisée dans [12]: contrôle du périmètre, contrainte globale sur le gradient, contrainte locale sur le gradient.

Dans le cadre de l'algorithme des directions alternées, on a proposé [10] une méthode heuristique permettant de lever les problèmes d'instabilités en damier et de dépendance au maillage en filtrant les densités d'énergie, c'est à dire en considérant une énergie non locale lors des étapes de minimisation par rapport aux paramètres d'optimisation à contraintes fixées (ce qui s'apparente à un filtre simultané des densités et des sensibilités). Dans le cadre de l'approche SIMP, la minimisation locale s'écrit :

$$\min_{\rho \in [\rho_{min}, 1]} \left[ \frac{1}{\rho^p} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}}^0 : \underline{\underline{\sigma}} + k\rho \right]$$

En introduisant l'opérateur indépendant du maillage suivant :

$$\alpha_i = (r_{min} - dist(k, i))H(r_{min} - dist(k, i))$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside et  $dist(k, i) = \|\overrightarrow{C_k C_i}\|$  ( $C_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) est le barycentre du  $j^{ieme}$  élément et  $N$  est le nombre d'éléments finis du maillage).

Un critère non local pour l'élément  $k$  est introduit sous la forme suivante :

$$crit(k) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \alpha_i} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\alpha_i}{\rho_i^p} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}}^0 : \underline{\underline{\sigma}} \right) + k\rho_k$$

qui s'écrit aussi

$$crit(k) = \frac{1}{\rho_k^p} E_k + k\rho_k \quad \text{avec} \quad E_k = \frac{1}{\frac{1}{\rho_k^p} \sum_{i=1}^N \alpha_i} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\rho_i^p} \alpha_i \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}}^0 : \underline{\underline{\sigma}} \right)$$

La minimisation locale est alors effectuée en faisant l'hypothèse que  $E_k$  est constant, c'est-à-dire indépendant de  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). On obtient alors

$$\rho_k^{opt} = \left( \frac{pE_k}{k} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

Si on considère  $r_{min}$  suffisamment petit, on retrouve la densité optimale obtenue avec un critère local classique (avec  $E_k = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{S}}^0 : \underline{\underline{\sigma}}$ ).

Pour éviter les instabilités en damier,  $r_{min}$  est choisi de telle sorte qu'au moins un nœud commun entre deux éléments est pris en compte dans le calcul de  $E_k$ . Pour éviter les instabilités numériques de dépendance au maillage,  $r_{min}$  est choisi de façon indépendante du raffinement du maillage.

## 2.4 Méthodologies d'optimisation alternatives

**Optimisation de la compliance avec problème de type min/max :** Pour le problème d'élasticité linéaire ( $P$ ), on obtient classiquement l'égalité entre la compliance et le double de l'énergie de déformation

$$\int_{\Omega} f \cdot u dV + \int_{\Gamma_1} F \cdot u dS = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(u) : \underline{\underline{Q}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(u) dV \quad (2.11)$$

et le théorème de l'énergie potentielle implique

$$2 \left( \int_{\Omega} f \cdot v dV + \int_{\Gamma_1} F \cdot v dS \right) - \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(v) : \underline{\underline{Q}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(v) dV \leq \int_{\Omega} f \cdot u dV + \int_{\Gamma_1} F \cdot u dS \quad \forall v \in CA \quad (2.12)$$

où l'acronyme *CA*, pour cinématiquement admissible, signifie : vérifiant les conditions aux limites en déplacements.

Le problème de minimisation de la compli-ance (2.3) se met alors sous la forme du problème de type min /max suivant :

$$\min_{\beta \in [\beta_{min}, \beta_{max}]} \max_{v \in CA} \left[ 2 \left( \int_{\Omega} f \cdot v dV + \int_{\Gamma_1} F \cdot v dS \right) - \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}(v) : \underline{\underline{Q}} : \underline{\underline{\epsilon}}(v) dV + \int_{\Omega} \text{cout}(\beta) dV \right]$$

Pour cette méthode d'optimisation, appelée méthode de critère d'optimalité (*optimality criterion method*), l'algorithme d'optimisation *heuristique* associé [9] allie calculs de sensibilité locaux à déformations fixées et résolutions du problème élastique de référence à paramètres d'optimisation fixés. Dans le cadre de l'optimisation topologique, de nombreuses études (suivant le travail pionnier de [8]) ont été menées à l'aide de cet algorithme pour lequel il n'est cependant pas possible de prouver la convergence et qui recèle de nombreuses difficultés techniques non présentes dans l'approche sous forme de double minimisation (voir par exemple la remarque 5.2.3 de [1]).

De façon indépendante à ces approches min/min ou min/max qui reposent sur l'utilisation des théorèmes de l'énergie et qui sont donc limitées au critère d'optimisation de la compli-ance, de nombreuses autres méthodes d'optimisation topologique coexistent. Dans la suite de cette section, une brève description de ces méthodes est présentée.

**Méthode des asymptotes mobiles :** Afin de pouvoir traiter d'autres critères que la compli-ance, une autre méthode très communément utilisée dans le cadre de l'optimisation topologique pour des problèmes multi-physiques est la méthode des asymptotes mobiles (method of moving asymptots) [14]. Cette méthode repose sur des approximations convexes successives du problème d'optimisation initialement non-convexe. De nombreuses applications multiphysiques ont été réalisées à l'aide de cet algorithme.

**Méthode de l'état adjoint :** Afin de prendre en compte des critères différents de la compli-ance dans le cadre de l'élasticité linéaire, la méthode de l'état adjoint a été très abondamment utilisée. La notion d'état adjoint a été introduite dans la théorie du contrôle optimal, qui est à la base des méthodes d'optimisation de formes. Schématiquement, la méthode de l'état adjoint consiste en la définition d'un problème d'élasticité linéaire adjoint dont la résolution permet de calculer de façon *explicite* le gradient de la fonction objectif considérée (une description détaillée de la théorie du contrôle optimal appliquée à l'optimisation de formes paramétrique, géométrique et topologique des systèmes distribués peut par exemple être trouvée dans [2]).

Dans le cas du problème de la minimisation de la compli-ance, le problème est auto-adjoint et le gradient se calcule à partir de la solution du problème élastique de référence. Il est alors possible d'appliquer un algorithme de gradient pour minimiser la compli-ance conjointement par rapport aux paramètres d'optimisation distribués et aux champs de contraintes statiquement admissibles. Néanmoins, l'algorithme de gradient obtenu se trouve être bien moins performant numériquement que l'algorithme des directions alternées.

La méthode de l'état adjoint peut aussi être utilisée dans le cas de comportements dépendants du trajet de chargement [11]. On citera une application de cette méthode aux structures en béton armé qui permet de maximiser la compli-ance à l'état final de chargement en considérant des renforts élastiques linéaires dans une matrice à comportement élasto-plastique endommageable [6].

**Lignes de niveaux et gradient topologique :** Les méthodes d'optimisation précédemment décrites ont l'inconvénient majeur dans le cadre de l'optimisation topologique d'introduire des densités fictives intermédiaires (aussi bien dans l'approche par homogénéisation [3] que dans les approches par interpolation de type SIMP [7] ou RAMP [13]) et donc nécessitent une étape de pénalisation des densités intermédiaires qui a pour effet d'augmenter la valeur de la fonction objectif.

Une approche alternative permettant d'éviter cet écueil est la méthode d'optimisation de forme géométrique, sous sa forme traditionnelle utilisant des dérivées par rapport au domaine de la position des frontières d'une forme ou sous une forme bien plus efficace numériquement reposant sur la méthode des lignes de niveaux (*level set*) [15, 4]. En utilisant ces approches, la disparition ou la coalescence de trous sont prises en compte. La nucléation de nouveaux trous dans la structure peut être obtenue en ajoutant la notion de gradient topologique aux algorithmes précédents.

**Semi-definite programming :** Une autre approche permettant d'envisager l'optimisation topologique avec des comportements non isotropes est la programmation semi-définie (semi-definite programming). Les paramètres d'optimisation sont alors directement les composantes du tenseur de rigidité, et la contrainte de positivité du tenseur élastique est introduite directement dans l'algorithme d'optimisation.

*De nombreuses méthodologies d'optimisation sont couramment utilisés en optimisation topologique de structures (la liste de celles présentées ci-avant n'étant bien évidemment pas exhaustive). Bien que l'algorithme des directions alternées ait été initialement développé pour l'optimisation topologique de structures élastiques linéaires dans le cadre de la maximisation de la rigidité structurale mesurée par la compliance, mes travaux de recherche ont permis d'étendre son utilisation à des lois de comportement anisotropes et/ou non-linéaires ainsi qu'à la prise en compte de la tenue mécanique, tout en conservant son efficacité numérique. Mes travaux n'ont à ce jour pas exploré la comparaison de l'algorithme d'optimisation des directions alternées avec les différentes méthodologies d'optimisation décrite dans cette section, et n'ont pas eu recours à leur utilisation qui se serait avérée nécessaire en abandonnant le critère de rigidité structurale mesurée par la compliance. Certaines perspectives de ma recherche (voir chapitre 6) décrivent la nécessité d'envisager l'utilisation d'une ou plusieurs de ces méthodologies d'optimisation alternatives.*

## Bibliographie du Chapitre

- [1] G. Allaire. *Shape Optimization by the homogenization method*. Springer Verlag, New York, 2002.
- [2] G. Allaire. *Conception optimale de structures*, volume 58 of *Mathématiques et Applications*. Springer, 2007.
- [3] G. Allaire, E. Bonnetier, G. Francfort, and F. Jouve. Shape optimization by the homogenization method. *Numerische Mathematik*, 76:27–68, 1997.
- [4] G. Allaire, F. Jouve, and A.-M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 194:363–393, 2004.

- [5] G. Allaire and R.V. Kohn. Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 12:839–878, 1993.
- [6] O. Amir and O. Sigmund. Reinforcement layout design for concrete structures based on continuum damage and truss topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47:157–174, 2012.
- [7] M.P. Bendsoe. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, 1:193–202, 1989.
- [8] M.P. Bendsoe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71:197–224, 1988.
- [9] M.P. Bendsoe and O. Sigmund. *Topology Optimization. Theory, Methods and Applications*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2003.
- [10] B. Desmorat. Structural rigidity optimization with frictionless unilateral contact. *International Journal of Solids and Structures*, 44(3-4):1132–1144, 2007.
- [11] P. Michaleris, D.A. Tortorelli, and C.A. Vidal. Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with applications to elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(14):2471–2499, 1994.
- [12] O. Sigmund and J. Petersson. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 16:68–75, 1998.
- [13] M. Stolpe and K. Svanberg. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 22:116–124, 2001.
- [14] K. Svanberg. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:359–373, 1987.
- [15] M.Y. Wang, X. Wang, and D. Guo. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:227–246, 2003.
- [16] M. Zhou and G.I.N. Rozvany. The coc algorithm, part ii: topology, geometry, and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89:309–336, 1991.

# Extension aux contraintes initiales et aux plaques et coques

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Contraintes initiales dépendant du design</b>	<b>12</b>
<b>3.2</b>	<b>Assemblages de plaques</b>	<b>12</b>
<b>3.3</b>	<b>Coque de géométrie quelconque donnée</b>	<b>14</b>
<b>3.4</b>	<b>Perspectives</b>	<b>16</b>
	<b>Bibliographie du Chapitre</b>	<b>18</b>

*L'algorithme d'optimisation des directions alternées présenté dans le chapitre précédent peut s'appliquer à de nombreux autres cas que les structures 3D élastiques linéaires dans le cadre de l'optimisation topologique.*

*Une première étude présente la généralisation de l'algorithme à la prise en compte d'un chargement sous forme de contraintes initiales dépendant de la distribution des paramètres d'optimisation, aussi bien dans le cas de l'optimisation topologique que dans le cas de la distribution de la direction d'orthotropie.*

*Afin de satisfaire à des besoins industriels particuliers, l'utilisation de cet algorithme est ensuite généralisé à des structures de type assemblage de plaques ou bien à des coques de géométrie quelconque. Ces études s'insèrent dans le cadre plus général des structures minces composites stratifiées. La prise en compte lors de ce processus d'optimisation de l'ensemble des stratifications possibles est étudiée dans le chapitre 5, et la présentation dans ce chapitre se limite à des stratifications particulières.*

### 3.1 Contraintes initiales dépendant du design

Dans le cadre de l'optimisation topologique, une difficulté supplémentaire apparaît lorsque le chargement mécanique extérieur n'est plus indépendant de la distribution de matière, par exemple dans la transmission de forces de contact, pour les chargements de pression, pour les chargements volumiques ou bien en présence d'un champ de contraintes initiales (comme dans les cas de présence de contraintes résiduelles résultant du processus de fabrication ou bien de contraintes d'origine thermique dans le cadre de la thermo-élasticité faiblement couplée). Dans ce dernier cas, l'algorithme d'optimisation de la rigidité structurale mesurée par la compliance peut être généralisé [1].

Compte tenu du fait qu'il existe une solution au problème élastique de référence avec un champ de contraintes initiales et que le théorème de l'énergie complémentaire peut être établi, la difficulté rencontrée est la perte de la condition (2.11) d'égalité entre la compliance et le double de l'énergie complémentaire. Il est toutefois possible d'utiliser la relation suivante liant la compliance et l'énergie complémentaire :

$$\int_{\Omega} f \cdot u dV + \int_{\Gamma_1} F \cdot u dS = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{S} : \underline{\sigma} dV + \int_{\Omega} \underline{\sigma}_{ini} : \underline{S} : \underline{\sigma}_{ini} dV \quad (3.1)$$

afin de généraliser l'algorithme d'optimisation sous l'hypothèse d'une dépendance locale de la contrainte initiale avec les paramètres d'optimisation.

Dans ce cadre, une étude a été menée en généralisant en présence de contraintes initiales l'approche SIMP (introduite en section 2.2) au cas du mélange de deux matériaux isotropes. Les minimisations locales sont explicites et se résument finalement à la résolution d'un polynôme. Cette méthode a été appliquée aux cas de contraintes initiales d'origine thermique dans le cadre de la thermo-élasticité faiblement couplée. Les classes des mélanges de matériaux qui peuvent être considérés sont explicitées. Un cas particulier qui rentre dans le domaine de validité de la méthode proposée est le cas du mélange d'un matériau isotrope et de vide, ce qui correspond au cas de l'optimisation topologique classique. Un exemple numérique de topologie obtenue pour un matériau de type acier sans champ de contraintes thermiques initiales et avec un champ de contraintes thermiques générées par une température constante de  $-50^{\circ}\text{C}$  dans l'ensemble de la structure est présenté dans les figures 3.1, 3.2 et 3.3. Il apparaît clairement sur cet exemple simple que la prise en compte des contraintes initiales d'origine thermique est absolument nécessaire au niveau de l'optimisation topologique.

*Le principal apport de cette étude est de proposer pour ce type de problème un nouvel algorithme d'optimisation de la rigidité structurale très efficace numériquement. En effet il ne nécessite que des calculs de sensibilité locaux qui sont résolus par la recherche de la racine d'un polynôme strictement monotone sur l'intervalle considéré. De plus, l'algorithme généralisé ne se limite pas au cadre de l'optimisation topologique : il est aussi possible d'optimiser la distribution de la direction d'orthotropie d'un matériau orthotrope à tenseur de dilatation isotrope.*

### 3.2 Assemblages de plaques

L'optimisation structurale de plaques stratifiées a été traitée vis à vis de multiples critères (poids, flambage, première fréquence propre, rigidité, ...) en utilisant des paramètres d'optimisation distribués ou bien constants sur le domaine de la plaque. En considérant la rigidité d'une plaque



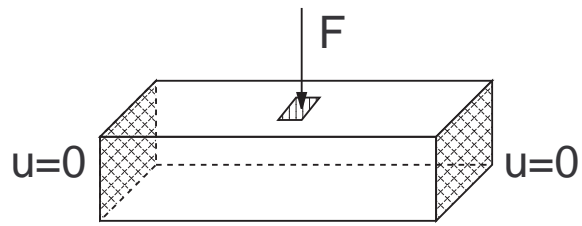


Figure 3.1: Géométrie, conditions aux limites en déplacements et en efforts.

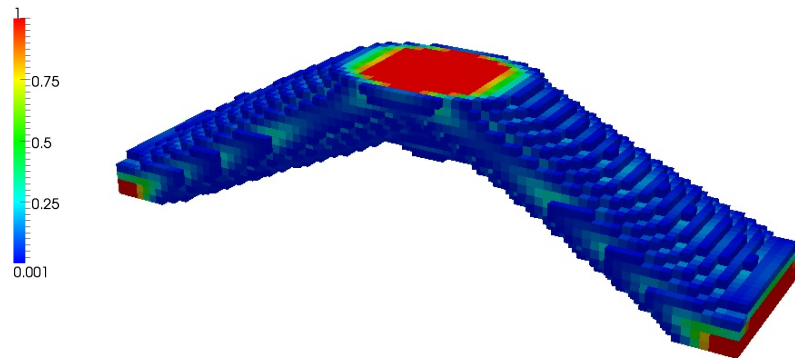


Figure 3.2: Distribution optimale de densité sans contraintes initiales d'origine thermique.

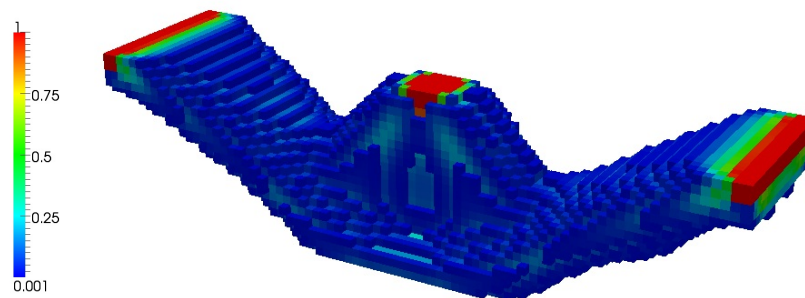


Figure 3.3: Distribution optimale de densité avec contraintes initiales d'origine thermique ( $T = -50^\circ\text{C}$ ).

élastique comme objectif et des paramètres d'optimisation distribués (densité/épaisseur dans le cas d'un matériau isotrope ou distribution de l'anisotropie), il est aisé de voir qu'une plaque sous chargement de membrane et/ou de flexion satisfait aux conditions d'applicabilité (C) de l'algorithme d'optimisation des directions alternées (section 2.1).

D'un point de vue industriel, de nombreuses structures sont de type assemblage de plaques. Ces assemblages peuvent être modélisés par des renforts internes ou externes de milieu tridimensionnel. Un de mes premiers travaux [3, 2] a été de développer un modèle de ce type satisfaisant aux conditions d'applicabilité de l'algorithme d'optimisation. Ce modèle considère l'insertion d'une plaque de Kirchhoff Love au sein d'un milieu 3D élastique linéaire : les formulations variationnelles en déplacements et en contraintes sont écrites, l'existence d'une solution au problème élastique de référence est assurée, le théorème de l'énergie complémentaire ainsi que l'égalité entre énergie de déformation et complémentaire en sont déduits.

En considérant des renforts monocouches à fibres longues curvilignes de densité variable, les paramètres d'optimisation distribués sont l'orientation de la direction d'orthotropie et la proportion de fibres. Le comportement homogénéisé est obtenu par la loi des mélanges (le cas d'un comportement orthotrope général est traité dans des travaux plus récents, voir chapitre 5).

Une difficulté numérique rencontrée dans cette approche est le fait que le champ de déplacement doit être deux fois dérivable à la traversée d'une plaque de renfort, propriété qui n'est pas assurée avec les éléments finis 3D standards. Afin de valider l'approche, un modèle EF a été développé sous l'hypothèse de comportement de membrane avec cisaillement transverse, ce qui lève la difficulté d'assurer la continuité du gradient de déplacement à la traversée d'une plaque. Les minimisations locales à contraintes fixées sont résolues de façon semi-analytique. Un exemple numérique de renfort d'aileron d'avion est présenté dans la figure 3.4.

*Le principal apport de cette étude est le développement d'un modèle de calcul des structures en élasticité linéaire de type assemblage de plaques compatible avec l'algorithme d'optimisation des directions alternées.*

### 3.3 Coque de géométrie quelconque donnée

L'extension de l'utilisation de l'algorithme d'optimisation des directions alternées aux coques de géométries quelconques est un problème délicat compte tenu du couplage membrane/flexion induit par la courbure de la coque. Dans la littérature, de nombreuses études spécifiques aux géométries de coques traitent de la minimisation de la masse (par variation de la forme et/ou de la distribution de l'épaisseur), de la maximisation de la première fréquence propre, de la tenue au flambage et de la maximisation de la rigidité.

En considérant la rigidité d'une coque de *géométrie donnée* comme objectif, on souhaite que cette géométrie définie par ailleurs varie peu par rapport à sa forme de référence vis à vis d'un chargement donné. Dans une situation où l'on considère ce critère comme prépondérant, nous avons considéré l'optimisation de la rigidité d'une coque stratifiée de géométrie donnée [4]. Afin d'étendre l'algorithme d'optimisation des directions alternées au cas de coques stratifiées générales, nous avons explicité les hypothèses nécessaires à satisfaire : le modèle de coque doit faire intervenir des efforts généralisés de membrane et de flexion *symétriques* et le comportement homogénéisé du stratifié ne doit pas dépendre de la courbure de la coque. Néanmoins, un couplage membrane/flexion de la coque à comportement localement découplé est toujours présent au travers des équations d'équilibre de la coque.

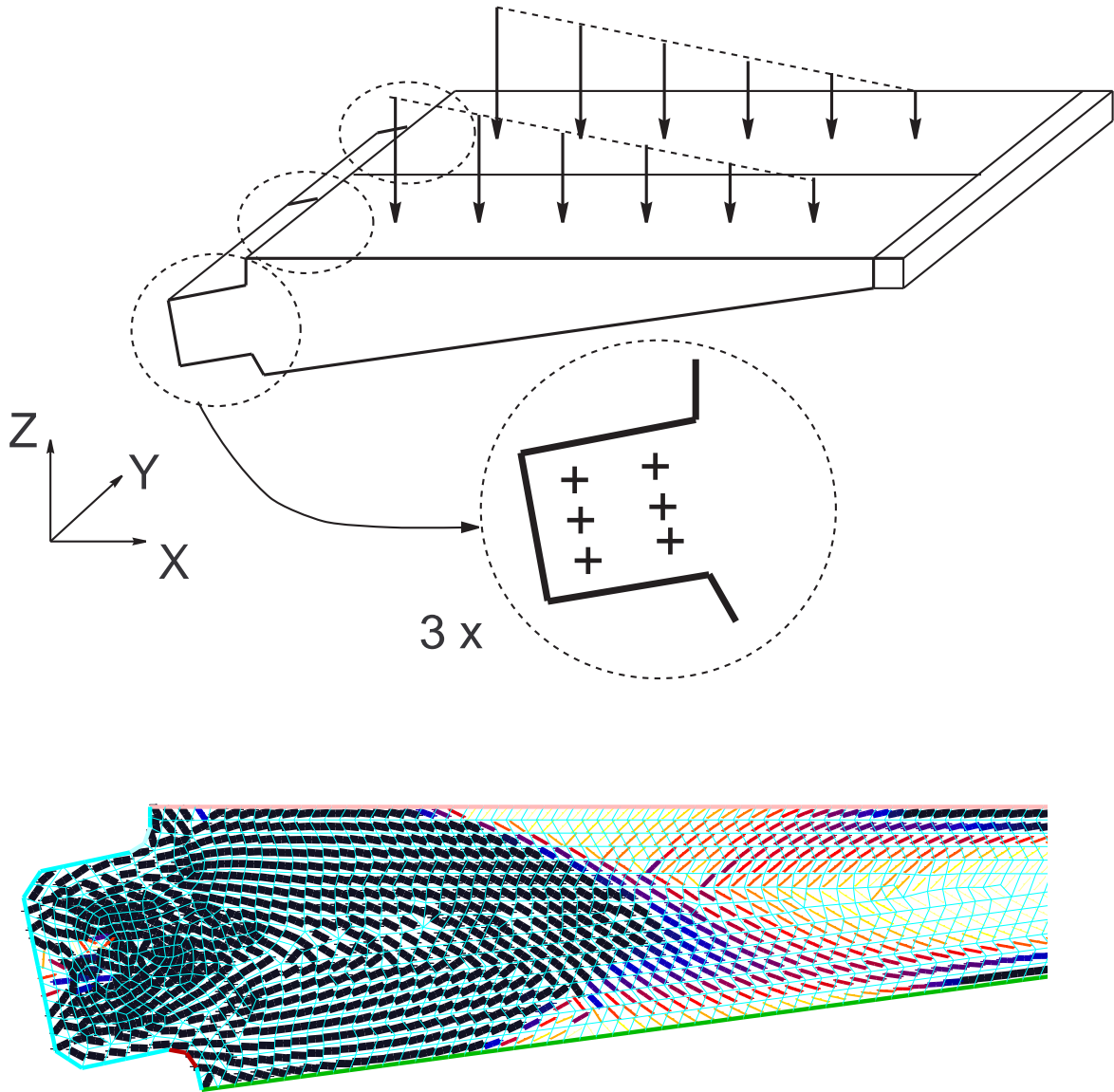


Figure 3.4: Sous structure 3D représentative du chargement appliqué à 1 nervure et distribution optimale de l'orientation et de la densité de fibres au sein de la nervure centrale près du point d'attache

Dans ce cadre, la démarche a pu être complètement développée pour une coque stratifiée de géométrie quelconque, à fibres longues curvilignes avec une séquence particulière d'empilement à plis alternés découplée orthotrope quasi-homogène (l'extension au comportement orthotrope général sera considérée dans le chapitre 5). Dans ce cas, deux paramètres d'optimisation distribués sont à prendre en compte : la direction d'orthotropie du stratifié  $\Phi_1$  et l'angle d'orientation des plis  $\pm\alpha$  par rapport à la direction d'orthotropie du stratifié.

Le calcul par éléments finis des efforts généralisés de membrane, de flexion et de cisaillement transverse a été réalisé à l'aide d'un élément fini MITC4 en prenant en compte la non-influence de la courbure sur le calcul du comportement homogénéisé du stratifié. Les minimisations locales par rapport à  $\Phi_1$  et  $\alpha$  à efforts généralisés fixés sont résolues de façon semi-analytique. La difficulté majeure pour trouver une solution analytique à ce problème de minimisation locale est que le problème de minimisation de la somme des deux termes quadratiques en efforts de membrane et de flexion par rapport aux paramètres d'optimisation associés au comportement de rigidité est toujours un problème ouvert, même dans ce cas de comportement quasi homogène (c'est-à-dire avec un même tenseur de rigidité normalisé en membrane et en flexion). Une discussion sur ce sujet sera effectuée au chapitre 5.

*Le principal apport de cette étude est de proposer un algorithme d'optimisation de la rigidité structurale pour des coques de géométrie quelconque donnée. Cela implique que pour tout maillage donné d'une géométrie de coque, l'algorithme d'optimisation des directions alternées est directement applicable, ce qui en fait un outil de conception facilement utilisable pour des études industrielles.*

### 3.4 Perspectives

Les études présentées dans ce chapitre ont pour but de définir un outil d'optimisation de plaques et de coques composites stratifiées, numériquement performant, et donc utilisable en phase d'avant projet dans des bureaux d'études industriels. Dans cette démarche de généralisation de l'algorithme d'optimisation des directions alternées à des calculs de structures spécifiques, il ressort les perspectives principales suivantes:

- Lors de la prise en compte de contraintes initiales dépendant du design, en abandonnant l'hypothèse de dépendance locale de la contrainte initiale avec les paramètres d'optimisation, diverses stratégies de généralisation de l'algorithme d'optimisation des directions alternées sont envisageables. Ces généralisations ne possédant plus le caractère local des calculs de sensibilité, il serait alors nécessaire de comparer l'efficacité numérique des approches obtenues avec d'autres approches d'optimisation de la littérature, dans le cas de contraintes initiales d'origine thermique par exemple.
- La démarche d'optimisation ainsi mise en place pourra alors être appliquée aux assemblages de plaques ou aux coques composites stratifiées orthotropes dont le comportement thermique dépend de la séquence d'empilement.
- Dans le cas des coques composites stratifiées, une extension naturelle à la démarche présentée serait d'inclure l'optimisation de la géométrie de la coque dans cette approche. Cela est envisageable en couplant les démarches d'optimisation par rapport aux paramètres de stratification sur la configuration de référence [5] et par rapport aux paramètres de la transformation conforme permettant de définir la forme de la coque 3D.

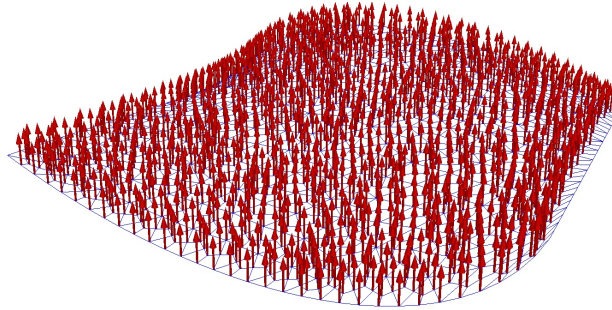


Figure 3.5: Conditions aux limites en efforts (coque de géométrie elliptique encastrée sur ses deux bords rectilignes).

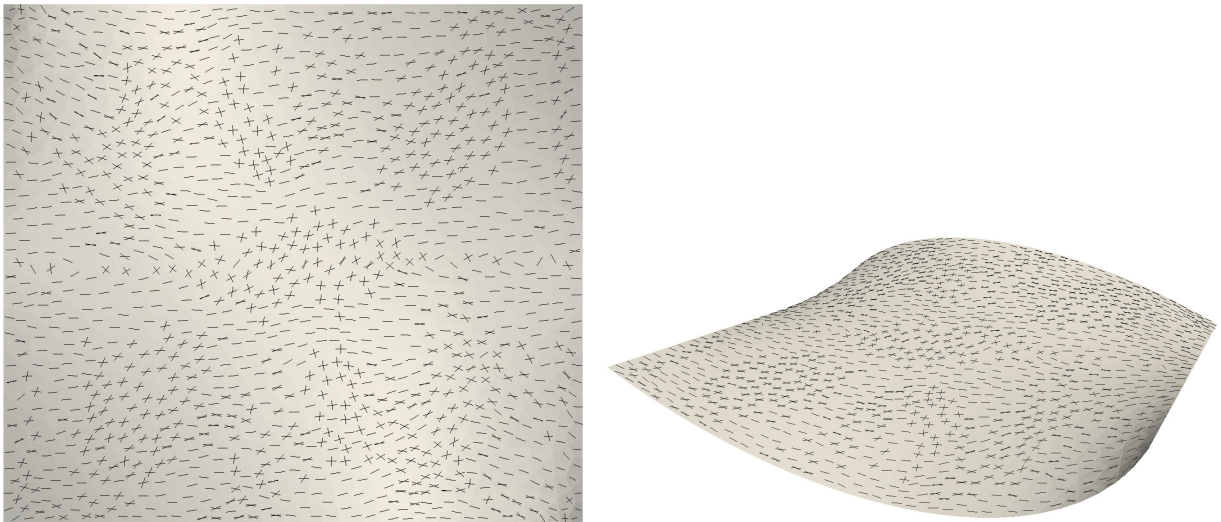


Figure 3.6: Orientations optimales des fibres  $\Phi_1 + \alpha$  et  $\Phi_1 - \alpha$  (coque de géométrie elliptique).

- Un autre type de structure mince composite stratifiée à forte application industrielle est la géométrie de plaque/coques sandwich à peaux stratifiées. L'utilisation de l'algorithme des directions alternées avec des plaques sandwich à des peaux minces ou épaisses est en cours, en considérant l'ensemble des stratifications possibles.

## Bibliographie du Chapitre

- [1] B. Desmorat. Structural rigidity optimization with an initial design dependent stress field. application to thermo-elastic stress loads. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 37:150–159, 2013.
- [2] B. Desmorat and G. Duvaut. Optimization of the reinforcement of a 3d medium with thin composite plates. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 28(6):407–415, 2004.
- [3] G. Duvaut, B. Desmorat, and E. Deletombe. Optimization of internal composite reinforcements of 3d structures. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, 329:549–555, 2001.
- [4] A. Jibawy, B. Desmorat, and A. Vincenti. Structural rigidity optimization of thin laminated shells. *Composite Structures*, 95:35–43, 2012.
- [5] G. Terrel. *Une nouvelle méthode d'optimisation des structures composites à fibres longues*. PhD thesis, Université Paris 6, Pierre et Marie Curie, 1999.

# Prise en compte de la non-linéarité du comportement et de l'endommagement

---

## Sommaire

<b>4.1 Potentiels positivement homogènes . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>4.2 Comportements élastiques non-linéaires dissymétriques en traction-compression . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>4.3 Contact unilatéral sans frottement . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>4.4 Fatigue à faible nombre de cycles pilotée par l'endommagement . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>4.5 Perspectives . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>Bibliographie du Chapitre . . . . .</b>	<b>28</b>

---

*Dans une démarche d'optimisation topologique, les structures optimisées obtenues avec un matériau élastique linéaire ou élastique non-linéaire sont bien évidemment différentes.*

*L'utilisation de l'algorithme des directions alternées présenté dans le chapitre 2 est étendue à la prise en compte d'une classe particulière de comportements élastiques non-linéaires : les comportements dérivant de potentiels positivement homogènes qui assurent la propriété de proportionnalité entre compliance et énergie complémentaire.*

*Ensuite, des lois de comportement élastiques non-linéaires dissymétriques en traction compression dérivant de tels potentiels sont présentées et une application au cas de composites à fibres longues de comportement orthotrope dissymétrique en traction-compression est décrite.*

*Dans un troisième temps, une application de cette approche d'optimisation au cas de structures avec surfaces de contact unilatéral sans frottement est présentée. Le contact est régularisé sous la forme d'une loi de comportement non-linéaire d'interface dérivant d'un potentiel positivement homogène.*

*Enfin, afin d'optimiser la topologie de structures élasto-plastiques, il est possible dans certains cas d'utiliser une loi de comportement élastique non-linéaire équivalente. Pour certaines applications, la prise en compte de la tenue de telles structures dans la démarche d'optimisation peut être estimée à partir d'un calcul d'endommagement en post-processeur du calcul élasto-plastique (on suppose alors un découplage entre élasto-plasticité et endommagement). Dans ce cadre, nous présentons une méthode d'optimisation topologique basée sur l'algorithme des directions alternées pour des structures élasto-plastiques sous chargement cyclique, pour lesquelles la durée de vie en fatigue est pilotée par l'endommagement.*

## 4.1 Potentiels positivement homogènes

Afin d'étendre l'utilisation de l'algorithme d'optimisation des directions alternées à des lois de comportement élastiques non-linéaires, il est possible d'étendre les conditions d'applicabilité ( $C$ ) de l'algorithme (section 2.1) en remarquant que la condition d'égalité entre la compliance et le double de l'énergie complémentaire peut être remplacée par une condition de proportionnalité (avec un coefficient de proportionnalité constant indépendant des paramètres d'optimisation). Cette condition est assurée dans le cas de potentiels positivement homogènes : toutes les lois de comportement non-linéaires dérivant de ce type de potentiel peuvent donc être utilisées, sous couvert bien sûr de l'existence d'une solution au problème élastique de référence obtenu.

Dans la suite de cette section est décrit le lien entre potentiel positivement homogène et proportionnalité entre compliance et énergie complémentaire [4]. Des exemples de comportements élastiques non-linéaires dissymétriques en traction compression sont présentés dans la section suivante.

Soit  $\psi(\underline{\sigma})$  un potentiel convexe continûment différentiable. En notant  $\varphi(\underline{\varepsilon}) = \sup_{\underline{\sigma}} (\underline{\varepsilon} : \underline{\sigma} - \psi(\underline{\sigma}))$  la transformée de Legendre du potentiel  $\psi(\underline{\sigma})$ , la loi de comportement reliant  $\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{\sigma}$  s'écrit sous les trois formes équivalentes:

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial \varphi(\underline{\varepsilon})}{\partial \underline{\varepsilon}} \Leftrightarrow \underline{\varepsilon} = \frac{\partial \psi(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \Leftrightarrow \varphi(\underline{\varepsilon}) + \psi(\underline{\sigma}) = \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \quad (4.1)$$

Si les contraintes  $\underline{\sigma}$  et déformations  $\underline{\varepsilon}$  dérivent de deux potentiels  $\varphi(\underline{\varepsilon})$  et  $\psi(\underline{\sigma})$  duaux au sens de la transformée de Legendre et vérifient la loi de comportement (4.1) alors

$$\begin{aligned} p\varphi(\underline{\varepsilon}) = q\psi(\underline{\sigma}) &\Leftrightarrow \psi(\underline{\sigma}) \text{ est positivement homogène de degré } q \\ &\Leftrightarrow \varphi(\underline{\varepsilon}) \text{ est positivement homogène de degré } p \end{aligned}$$

où les réels  $p$  et  $q$  sont tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

*Rappel :*  $\varphi(\underline{\varepsilon})$  est un potentiel positivement homogène de degré  $p \Leftrightarrow \varphi(\lambda \underline{\varepsilon}) = \lambda^p \varphi(\underline{\varepsilon}) \quad \forall \lambda > 0$

Pour des potentiels positivement homogènes, l'égalité entre énergie complémentaire et opposé de l'énergie potentielle dans le cas de déplacements imposés *nuls* :

$$\int_{\Omega} \psi(\underline{\sigma}) dV = \int_{\Omega} f \cdot u dV + \int_{\Gamma_1} F \cdot u dS - \int_{\Omega} \varphi(\underline{\varepsilon}(u)) dV \quad (4.2)$$

implique alors :

$$\int_{\Omega} f \cdot u dV + \int_{\Gamma_1} F \cdot u dS = q \int_{\Omega} \psi(\underline{\sigma}) dV \quad (4.3)$$

Cette dernière équation démontre la proportionnalité entre compliance et énergie complémentaire pour des lois de comportement dérivant de potentiels positivement homogènes.

## 4.2 Comportements élastiques non-linéaires dissymétriques en traction-compression

Afin d'utiliser l'algorithme d'optimisation des directions alternées dans le cas de composites à fibres longues pour lesquels le comportement orthotrope est dissymétrique suivant une unique direction privilégiée [3], on introduit le potentiel convexe continûment différentiable et positivement



homogène de degré 2 suivant (avec  $E_1^C < E_1$ ) :

$$\rho_0 \psi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_{11}^2}{E_1} + \left( \frac{1}{E_1^C} - \frac{1}{E_1} \right) \sigma_{11}^2 H(-\sigma_{11}) + \frac{\sigma_{22}^2}{E_2} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G_{12}} + \frac{\sigma_{21}^2}{2G_{12}} \right]$$

Comme pour l'étude de l'assemblage de plaques de la section 3.2, les composites considérés sont des monocouches à fibres longues curvilignes de densité variable. Les paramètres d'optimisation distribués sont l'orientation de la direction d'orthotropie et la proportion de fibres. Le comportement homogénéisé est obtenu par la loi des mélanges. Le problème élastique de référence étant non-linéaire, la résolution par éléments finis est itérative. Les minimisations locales à contraintes fixées peuvent être résolues analytiquement. Un résultat remarquable est que, pour une proportion de fibres donnée, la direction d'orthotropie n'est plus forcément alignée avec la contrainte principale maximale en valeur absolue, comme c'est le cas en élasticité linéaire, mais peut être tournée de 90 degrés lorsque cette contrainte est négative. Un exemple de structure 2D sollicitée en membrane uniquement est présenté dans les figures 4.1, 4.2 et 4.3. Il apparaît clairement que les résultats de l'optimisation tenant compte de la dissymétrie de comportement en traction-compression diffèrent dans une certaine zone de ceux obtenus en considérant un comportement élastique linéaire symétrique en traction-compression.

Dans le cadre de l'utilisation de potentiels positivement homogènes, il est possible de considérer un comportement élastique non-linéaire 3D de type puissance dissymétrique en traction compression à l'aide de la décomposition de Kelvin. Dans cette décomposition, un tenseur de souplesse  $\underline{\underline{S}}$  se décompose à l'aide de 6 valeurs propres ou modules de Kelvin  $s^I > 0$  et des tenseurs propres associés  $\underline{\underline{S}}^I$  sous la forme :

$$\underline{\underline{S}} = \sum_{I=1}^6 s^I \underline{\underline{S}}^I \otimes \underline{\underline{S}}^I, \quad (\underline{\underline{S}}^I : \underline{\underline{S}}^J = \delta_{IJ})$$

On introduit alors le tenseur  $\underline{\underline{A}}$  défini par  $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}$ , soit  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}^{1/2} = \sum_{I=1}^6 \sqrt{s^I} \underline{\underline{S}}^I \otimes \underline{\underline{S}}^I$ .

En considérant deux tenseurs de souplesse distincts  $\frac{1}{E} \underline{\underline{H}}^A$  et  $\frac{1}{E} \underline{\underline{H}}^B$ , ainsi que les tenseurs  $\underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{H}}^A)^{1/2}$  et  $\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{H}}^B)^{1/2}$ , une loi de comportement élastique non-linéaire de type puissance dissymétrique en traction compression peut être introduite à l'aide du potentiel convexe continûment différentiable et positivement homogène de degré  $n+1$  suivant :

$$\psi(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{(n+1)E^n} \left[ \langle \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+ : \langle \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+ + \langle \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle_- : \langle \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\sigma}} \rangle_- \right]^{(n+1)/2} \quad (4.4)$$

Pour  $H^A = H^B$ , on retrouve une loi de comportement de type puissance [7], pour  $n = 1$  on retrouve une loi de comportement dissymétrique en traction compression [5] et pour  $n = 1$  et  $H^A = H^B$ , on retrouve une loi de comportement élastique linéaire.

*Le principal apport de cette étude est de montrer que la classe des lois de comportement élastiques non-linéaires dérivant de potentiels positivement homogènes est utilisable avec l'algorithme d'optimisation des directions alternées. La caractérisation de l'homogénéité est simple, et ne nécessite pas de connaître explicitement le potentiel dual. Enfin, dans le cadre des lois de comportement dissymétriques en traction compression, plusieurs choix sont possibles.*

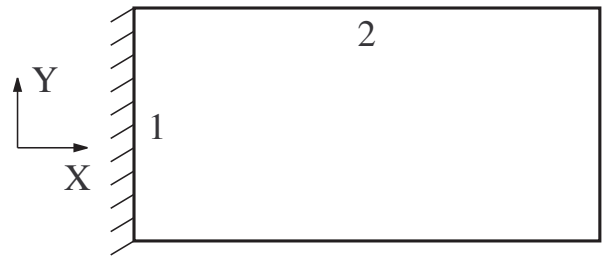


Figure 4.1: Géométrie, conditions aux limites en déplacements et en efforts.

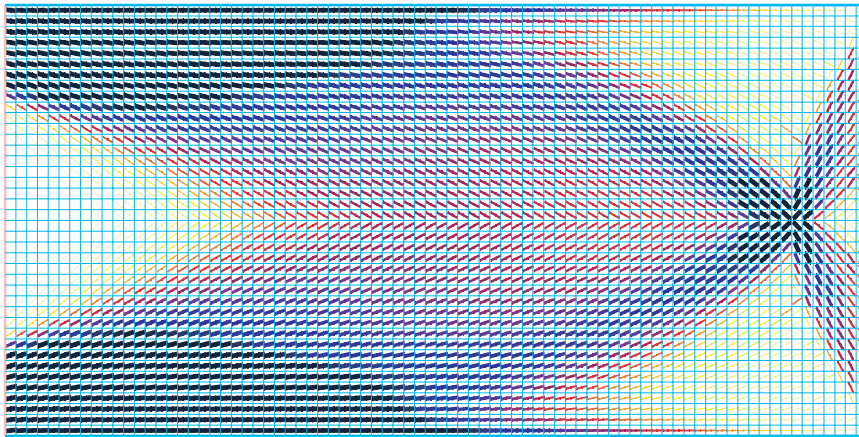


Figure 4.2: Distribution optimale de la direction d'orthotropie et de la proportion de fibres pour un comportement élastique linéaire symétrique en traction-compression.

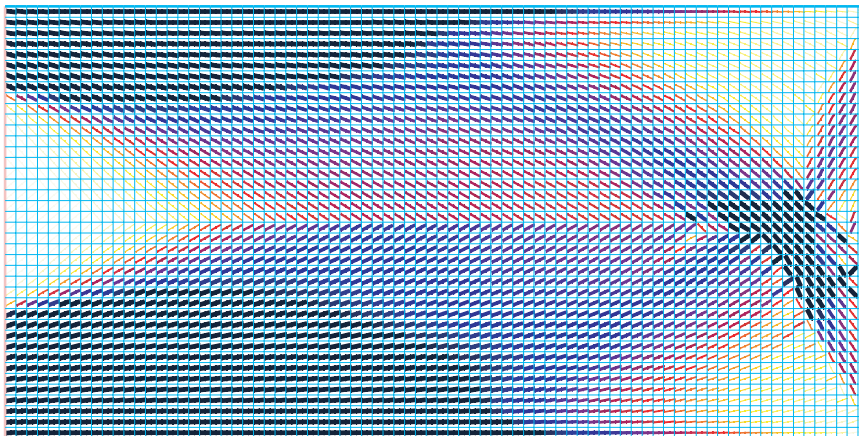


Figure 4.3: Distribution optimale de la direction d'orthotropie et de la proportion de fibres pour un comportement élastique linéaire dissymétrique en traction-compression.

### 4.3 Contact unilatéral sans frottement

L'utilisation de l'algorithme des directions alternées avec *plusieurs* lois de comportement élastiques non-linéaires dérivant de potentiels positivement homogènes est possible en considérant des degrés d'homogénéité *identiques* pour tous les comportements considérés. En effet, dans ce cas, la proportionnalité entre compliance et énergie complémentaire est toujours assurée. Comme les lois de comportement considérées peuvent dépendre en toute généralité de composantes spécifiques des contraintes et des déformations, la généralisation de l'algorithme à des lois de contact unilatéral sans frottement est effectuée pour une structure élastique linéaire en considérant des lois de comportement d'interface dérivant de potentiels homogènes de degré 2 reliant contrainte normale et déplacement normal.

Dans le cas d'un contact avec une fondation rigide, la contrainte tangentielle  $\sigma_T$  est égale à zéro sur la surface de contact et on suppose qu'il existe une loi de comportement reliant la contrainte normale  $\sigma_N$  au déplacement normal  $u_N$  du type  $\sigma_N = \frac{\partial \varphi_C(u_N)}{\partial u_N} = k^- u_N H(-u_N)$  qui dérive du potentiel convexe continûment différentiable et homogène de degré 2 suivant ( $H(\cdot)$  désigne la fonction de Heavyside) :

$$\varphi_C(u_N) = \frac{1}{2} k^- u_N^2 H(-u_N) \quad (4.5)$$

Dans le cas d'une surface de contact interne au milieu 3D, la loi de comportement relie la contrainte normale  $\sigma_N$  au saut de déplacement  $[[u_N]]$  sous la forme  $\sigma_N = k^- [[u_N]] H(-[[u_N]])$ , et dérive du potentiel homogène de degré 2 :

$$\varphi_S([[u_N]]) = \frac{1}{2} k^- [[u_N]]^2 H(-[[u_N]]) \quad (4.6)$$

Cette approche permet d'introduire la modélisation d'un *contact régularisé* dans la formulation continue du problème et de définir les formulations variationnelles de type égalité associées, nécessaires à l'applicabilité de l'algorithme d'optimisation des directions alternées. L'optimisation topologique qui en découle permet de prendre en compte des zones de contact unilatéral sans frottement, et donc de répartir la matière de façon adaptée à la géométrie de ces zones de contact. Dans cette approche, les zones de contact doivent être données et fixées lors du processus d'optimisation, et la distance initiale entre les surfaces en éventuel contact doit être égale à zéro.

Un exemple numérique de structure avec deux zones de contact initiales est présenté dans les figures 4.4 et 4.5. On perçoit clairement comment l'existence de ces zones de contact influe de façon prépondérante sur la distribution optimale de densité de matière.

*Le principal apport de cette étude est de montrer que l'algorithme d'optimisation des directions alternées est compatible avec l'optimisation topologique de structures avec surfaces de contact traitées comme des lois de comportement non-linéaires d'interface. Ce problème, bien que lié à des lois de comportement non-linéaires s'apparente à l'optimisation avec calcul de structures spécifiques, abordée au chapitre 2.*

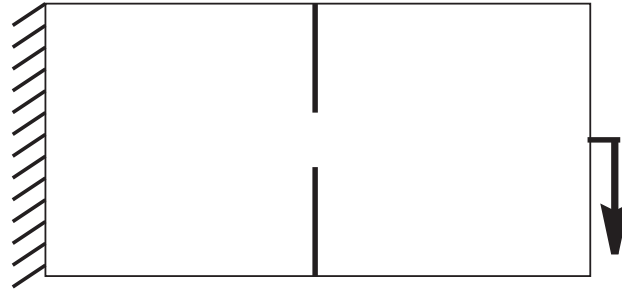


Figure 4.4: Géométrie de la structure et des zones de contact; conditions aux limites en déplacements et en efforts.

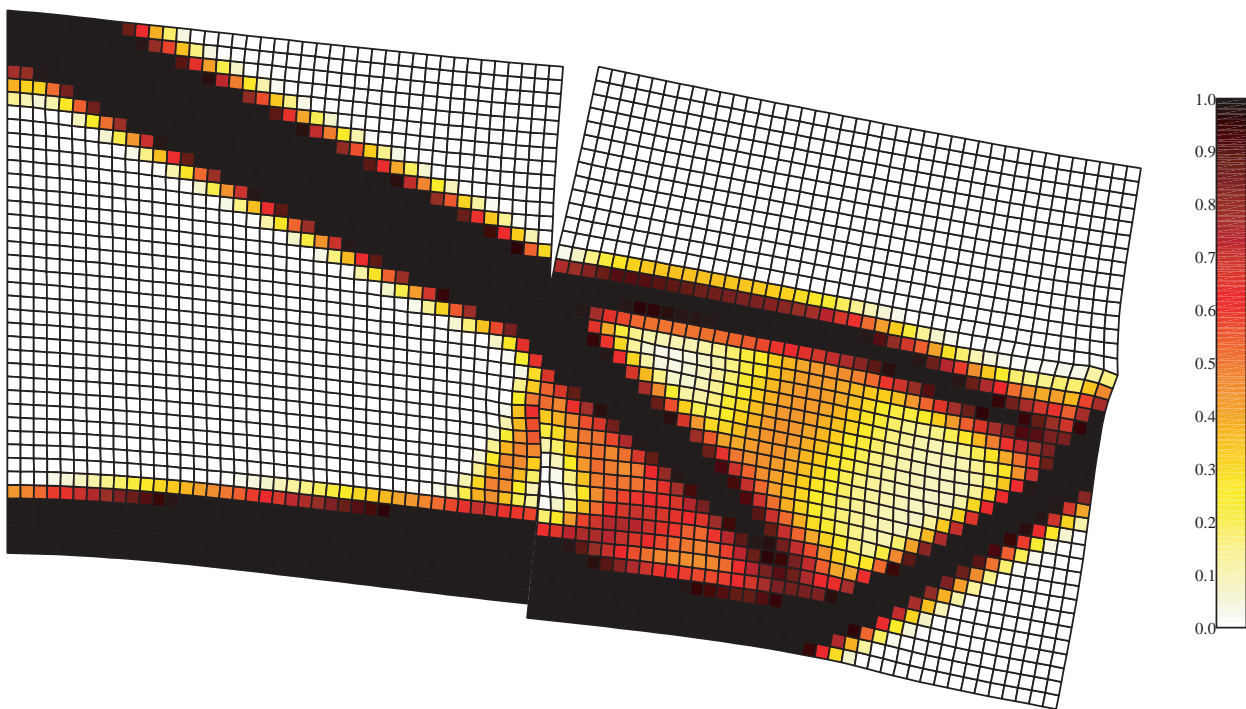


Figure 4.5: distribution optimale de la densité.

## 4.4 Fatigue à faible nombre de cycles pilotée par l'endommagement

Pour proposer une méthode d'optimisation topologique permettant de prendre en compte un dimensionnement en fatigue, il est nécessaire d'utiliser une étape de minimisation *locale* afin de prendre en compte le caractère localisé de la plasticité et de l'endommagement. L'algorithme d'optimisation des directions alternées possède cette propriété, mais il est limité à des loi de comportement élastiques et à des chargements monotones.

Afin de généraliser l'algorithme d'optimisation des directions alternées à l'optimisation topologique en fatigue à faible nombre de cycles pilotée par l'endommagement [2], nous avons utilisé un modèle de plasticité cyclique à écrouissage cinématique linéaire [6] qui permet de définir une loi de comportement cyclique élasto-plastique sous la forme d'une loi de comportement élastique non linéaire 3D écrite en terme d'amplitudes de contraintes et de déformations (au prix de l'hypothèse des chargements proportionnels):

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\Delta\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\Delta\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{3}{2C}\frac{\Delta\sigma_{ij}^D}{\Delta\sigma_{eq}}\langle\Delta\sigma_{eq} - 2\sigma_Y\rangle_+ \quad (4.7)$$

où  $E$  est le module d'Young,  $\nu$  le coefficient de poisson,  $C$  le module plastique et  $\sigma_Y$  la limite d'élasticité. Cette loi dérive du potentiel continûment différentiable (mais non homogène) suivant :

$$\psi^{cyclic}(\underline{\Delta\sigma}) = \psi_e^{cyclic}(\underline{\Delta\sigma}) + \psi_p^{cyclic}(\underline{\Delta\sigma}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \psi_e^{cyclic}(\underline{\Delta\sigma}) = \frac{\Delta\sigma_{eq}^2 R_\nu}{2E} \\ \psi_p^{cyclic}(\underline{\Delta\sigma}) = \frac{\langle\Delta\sigma_{eq} - 2\sigma_Y\rangle_+^2}{2C} \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $\Delta\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\Delta\sigma_{ij}^D\Delta\sigma_{ij}^D}$ ,  $\Delta\sigma_H = \frac{1}{3}\Delta\sigma_{kk}$ ,  $R_\nu = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left[\frac{\Delta\sigma_H}{\Delta\sigma_{eq}}\right]^2$ .

La fatigue à faible nombre de cycles pilotée par l'endommagement peut alors être estimée sous l'hypothèse d'un découplage entre élasto-plasticité et endommagement (c'est-à-dire avec un endommagement estimé en post-processeur d'un calcul élasto-plastique). Dans ce cadre, le nombre de cycle à initiation d'une fissure s'écrit ( $A$  est un constante du matériau) :

$$N_R = \frac{A}{\left(\psi_e^{cyclic}(\underline{\Delta\sigma})\right)^s \left(\psi_p^{cyclic}(\underline{\Delta\sigma})\right)^{1/2}} \quad (4.9)$$

Afin de maximiser la durée de vie en fatigue, nous considérons le problème d'optimisation topologique, dans le cadre d'une approche SIMP, suivant :

$$\min_{\beta \in [\beta_{min}, 1]} \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{\beta^n} \psi^{cyclic}(\underline{\Delta\sigma}) dV + \int_{\Omega} \text{cout}(\beta) dV \right]$$

ce qui revient à introduire un module d'Young équivalent  $\rho^n E$  et un module plastique équivalent  $\rho^n C$ , en considérant que la limite élastique  $\sigma_Y$  et le coefficient de poisson  $\nu$  restent inchangés.

Grâce au théorème de l'énergie complémentaire obtenu à partir du problème élastique de référence, ce problème se met sous la forme de double minimisation similaire à celle classiquement résolue par l'algorithme des directions alternées :

$$\min_{\beta \in [\beta_{min}, 1]} \min_{\underline{\Delta\tau} \in \Sigma_{ad}} \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{\beta^n} \psi^{cyclic}(\underline{\Delta\tau}) dV + \int_{\Omega} \text{cout}(\beta) dV \right]$$

Lors de l'étape des minimisations locales à contraintes fixées :

$$\min_{\beta \in [\beta_{\min}, 1]} \left[ \frac{1}{\beta^n} \psi^{cyclic}(\underline{\Delta\sigma}) + \text{cout}(\beta) \right],$$

les points fortement sollicités de la structure ont une densité optimisée égale à 1. La maximisation de la durée de vie, c'est à dire :

$$\max_{\beta \in [\beta_{\min}, 1]} \frac{A}{\left(\psi_e^{cyclic}\right)^s \left(\psi_p^{cyclic}\right)^{1/2}}$$

est aussi obtenue pour une densité égale à 1. Lors de la procédure d'optimisation, les points fortement sollicités auxquels l'initiation de fissure peut se produire ont donc une densité optimale vis à vis de la durée de vie.

Il faut toutefois remarquer que dans cette étude, nous sommes sortis du cadre des potentiels homogènes et que la durée de vie est reliée par  $\psi_e^{cyclic}(\underline{\Delta\sigma})$  et  $\psi_p^{cyclic}(\underline{\Delta\sigma})$  à l'énergie complémentaire du problème élastique de référence écrit en terme d'amplitude de contraintes et de déformations, sans que celle-ci soit proportionnelle à la compliance d'un tel problème.

Un exemple numérique (avec un endommagement critique de 0.2 et une limite d'élasticité de 180 MPa) est présenté dans les figures 4.6, 4.7 et 4.8. On perçoit clairement les zones élastiques, les zones plastifiées, ainsi que la distribution de l'endommagement pour un nombre de cycles égal au nombre de cycles à initiation de fissure  $N_R$ .

*Le principal apport de cette étude est de proposer une méthodologie d'optimisation dans le cadre du dimensionnement en fatigue pilotée par l'endommagement de structures élasto-plastiques sous chargement cyclique. L'approche proposée est efficace numériquement grâce à la modélisation du comportement élasto-plastique sous la forme d'une loi de comportement élastique non-linéaire découplée de l'endommagement et grâce au caractère local des calculs de sensibilité résolus analytiquement (le coût numérique de l'algorithme est directement proportionnel au temps de résolution par éléments finis d'un problème élastique non-linéaire).*

## 4.5 Perspectives

Dans ce chapitre, une approche d'optimisation topologique de structures constituées d'un matériau à comportement non-linéaire a été présentée. De nombreuses lois de comportement élastiques non-linéaires (dérivant de potentiels positivement homogènes) peuvent être prises en compte.

L'algorithme d'optimisation des directions alternées est généralisé à des lois de comportement élastiques non-linéaires à seuil, en considérant non plus la compliance comme objectif, mais directement l'énergie de déformation (exprimée en contraintes). Sous chargement monotone, certaines lois de comportement élasto-plastiques tombent dans ce cadre, et peuvent donc être prises en compte. Le cas particulier de lois élasto-plastiques à écrouissage cinématique linéaire sera notamment étudié, en considérant des modules plastiques faibles, afin de s'approcher du cas de la plasticité parfaite.

Pour des chargements cycliques, le cas d'un comportement élasto-plastique avec écrouissage cinématique linéaire a été traité. Afin d'améliorer le modèle prédictif de la durée de vie en fatigue, il est envisagé d'utiliser une loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage cinématique non-linéaire non saturant en suivant la même démarche, c'est-à-dire en supposant un découplage entre élasto-plasticité et endommagement pour le calcul de la durée de vie.

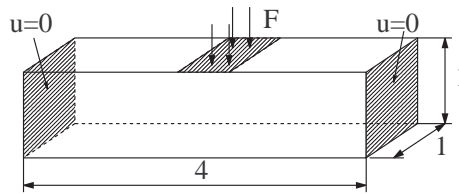


Figure 4.6: Description du milieu 3D et des conditions aux limites considérées.

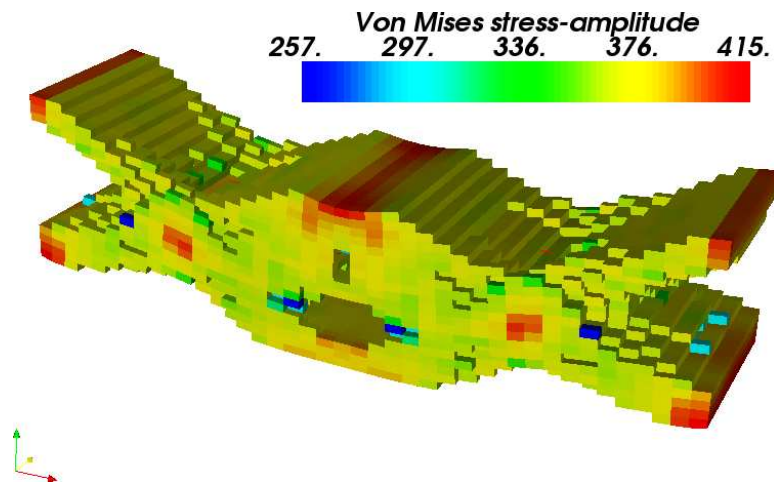


Figure 4.7: Amplitude de contrainte de von Mises (MPa) sur la géométrie déformée à initiation de fissure (pour un volume de matière de 48 %).

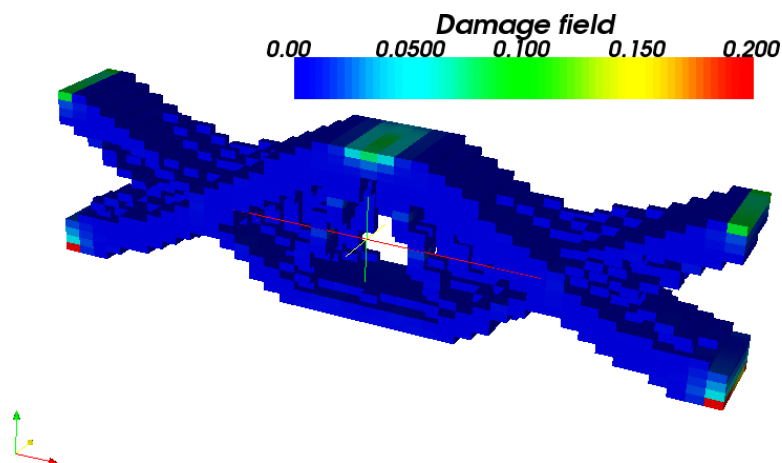


Figure 4.8: Endommagement sur la moitié de la structure à initiation de fissure pour un volume de matière de 48% (plan de coupe central).

A moyen terme, la prise en compte de l'anisotropie dans une approche d'optimisation topologique d'une structure constituée d'un matériau élasto-plastique est envisagée. Il ne s'agira alors plus seulement de déterminer la distribution optimale du matériau, mais aussi la distribution de l'anisotropie (cette perspective est fortement liée aux recherches présentées dans le chapitre suivant). L'extension au cas d'un chargement cyclique devra aussi être repensée compte tenu de l'hypothèse de chargement proportionnel utilisée dans le cas isotrope, qui doit être généralisée au cas des comportements orthotropes.

Enfin, à un horizon plus lointain, la prise en compte pour un matériau (dans un premier temps initialement isotrope) de l'anisotropie et de la dissymétrie de comportement en traction-compression induites par l'endommagement dans le cadre de l'optimisation topologique seront explorées.

## Bibliographie du Chapitre

- [1] B. Desmorat. Structural rigidity optimization with frictionless unilateral contact. *International Journal of Solids and Structures*, 44(3-4):1132–1144, 2007.
- [2] B. Desmorat and R. Desmorat. Topology optimization in damage governed low cycle fatigue. *Comptes-Rendus Mécanique*, 336(5):448–453, 2008.
- [3] B. Desmorat and G. Duvaut. Compliance optimization with nonlinear elastic materials: Application to constitutive laws dissymmetric in tension-compression. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 22:179–192, 2003.
- [4] B. Desmorat and G. Duvaut. Optimisation de structures constituées de matériaux à comportement élastique non-linéaire. In *16ème congrès français de mécanique*, 2003.
- [5] R. Desmorat. Dissymétrie de comportement élastique anisotrope couplé ou non à l'endommagement. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, 328:445–450, 2000.
- [6] R. Desmorat. Fast estimation of localized plasticity and damage by energetic methods. *International Journal of Solids and Structures*, 39(12):3289–3310, 2002.
- [7] P. Pedersen and J.E. Taylor. Optimal design based on power-law non-linear elasticity. In P. Pedersen, editor, *Optimal Design with Advanced Materials*. Elsevier Science, Amsterdam, 1993.



# Prise en compte de l'anisotropie et de la tenue mécanique

---

## Sommaire

---

5.1	Paramétrisation par la méthode polaire pour les stratifiés . . . . .	30
5.2	Une approche d'optimisation hiérarchique appliquée aux stratifiés . . . . .	32
5.3	Minimisation de l'énergie complémentaire dans le cas orthotrope . . . . .	34
5.4	Minimisation d'un critère de tenue mécanique orthotrope . . . . .	35
5.5	Optimisation simultanée de la rigidité et de la tenue mécanique . . . . .	35
5.6	Perspectives . . . . .	37
	Bibliographie du Chapitre . . . . .	38

---

*Afin d'optimiser des structures minces composites stratifiées à fibres longues curvilignes, le choix de la paramétrisation est primordial. Deux voies distinctes sont envisageables : soit directement utiliser les angles dans chacun des plis en chaque point de la structure, soit scinder le problème en deux sous-problèmes consécutifs et utiliser des paramètres associés au stratifié homogène équivalent dans un premier temps pour rechercher les stratifications optimales dans un second temps. C'est cette deuxième approche, dénommée hiérarchique, que nous avons utilisée. Certains travaux ont exploré cette voie en utilisant la paramétrisation des "lamination parameters". Dans mes travaux, le choix d'une autre paramétrisation par la méthode polaire a été utilisée pour ses avantages en terme d'interprétation des symétries matérielles, pour ses propriétés d'invariance, pour la simplicité des expressions analytiques obtenues, et enfin pour l'expertise existante au sein du laboratoire au niveau de la recherche de stratifications basée sur la méthode polaire par algorithme génétique. La méthode polaire appliquée aux stratifiés est synthétiquement présentée dans la première section de ce chapitre.*

*Une méthodologie d'optimisation robuste et peu coûteuse numériquement traitant le problème de la maximisation simultanée de la rigidité et de la résistance est proposée. Cette méthodologie repose sur :*

- *l'utilisation de l'algorithme des directions alternées afin de maximiser la rigidité structurale et de plusieurs versions modifiées de cet algorithme afin de maximiser simultanément rigidité structurale et résistance mécanique,*
- *l'utilisation d'un algorithme génétique afin d'effectuer les recherches des stratifications optimales à partir des paramètres polaires obtenus à l'aide l'algorithme des directions alternées modifié,*
- *des résolutions analytiques explicites des calculs de sensibilités locaux : minimisations de l'énergie complémentaire et d'un indice de résistance.*

*Ces travaux ont été menés en étroite collaboration avec A. Vincenti et P. Vannucci, tous deux étant les chercheurs référents quant à la recherche de stratifications par algorithme génétique. Les études ont fait l'objet d'une collaboration industrielle avec l'entreprise SEGULA Aerospace (2006-2011). Mon apport personnel est lié à la phase d'utilisation de l'algorithme des directions alternées. Deux thèses [4, 1] que j'ai coencadrées à 80% ont été soutenues sur ces sujets.*

## 5.1 Paramétrisation par la méthode polaire pour les stratifiés

Une difficulté majeure en optimisation est le choix des paramètres d'optimisation. Dans le cas des composites stratifiés, avec des lois de comportement en élasticité plane, il est nécessaire d'utiliser une paramétrisation efficace pour représenter les symétries matérielles (la plupart des plis considérés sont orthotropes) et la dépendance à la rotation par rapport à un repère donné. Enfin, une paramétrisation permettant de relier analytiquement de façon *explicite* les paramètres du stratifié homogène équivalent aux paramètres de chaque pli ainsi qu'à leur orientations respectives est un véritable atout. Toutes ces propriétés sont assurées par la méthode polaire, initialement introduite dans [9], et dont une formulation synthétique et exhaustive est présentée dans [7].

**Formalisme polaire.** Dans ce paragraphe décrivant le formalisme polaire, les divers tenseurs sont exprimés dans le repère  $x - y$  tourné d'un angle  $\theta$  dans le sens trigonométrique par rapport au repère global 1 – 2 (voir figure 5.1(a)).

Pour le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$  d'ordre 2 symétrique, la représentation polaire introduit 2 invariants, les modules polaires  $T$  et  $R$ , ainsi que l'angle  $\Phi$  positionnant la direction associée à la plus grande contrainte principale dans le repère 1 – 2, voir figure 5.1(a) (pour le tenseur des déformations, les paramètres polaires seront notés  $t$ ,  $r$  et  $\varphi$ ) :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = T + R \cos 2(\Phi - \theta) \\ \sigma_{22} = T - R \cos 2(\Phi - \theta) \\ \sigma_{12} = R \sin 2(\Phi - \theta) \end{cases} \quad (5.1)$$

Pour le tenseur de rigidité  $\underline{Q}$  d'ordre 4 du type de l'élasticité, la représentation polaire introduit 5 invariants  $T_0, T_1, R_0, R_1, \Phi_0 - \Phi_1$ , les angles  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  étant définis dans le repère 1 – 2, voir figure 5.1(a) (pour le tenseur de souplesse  $\underline{S}$ , les paramètres polaires seront notés  $t_0, t_1, r_0, r_1, \varphi_0$  et  $\varphi_1$ ) :

$$\begin{cases} Q_{1111}(\theta) = T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) + 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta) \\ Q_{1112}(\theta) = R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta) \\ Q_{1122}(\theta) = -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) \\ Q_{1212}(\theta) = T_0 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) \\ Q_{2212}(\theta) = -R_0 \sin 4(\Phi_0 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta) \\ Q_{2222}(\theta) = T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4(\Phi_0 - \theta) - 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta) \end{cases} \quad (5.2)$$

Les modules polaires sont des scalaires positifs :

$$T_0 \geq 0 \quad T_1 \geq 0 \quad R_0 \geq 0 \quad R_1 \geq 0 \quad (5.3)$$

Les conditions de positivité du tenseur de rigidité s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} T_0 - R_0 > 0 \\ T_1(T_0^2 - R_0^2) - 2R_1^2[T_0 - R_0 \cos 4(\Phi_0 - \Phi_1)] > 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Les symétries élastiques sont définies par des conditions sur les invariants polaires :

$$\begin{aligned} \text{Orthotropie ordinaire : } & \Phi_0 - \Phi_1 = K \frac{\pi}{4}, \quad (K \in \{0, 1\}) \\ \text{Orthotropie } R_0 : & R_0 = 0 \\ \text{Symétrie du carré : } & R_1 = 0 \\ \text{Isotropie : } & R_0 = 0 \text{ et } R_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

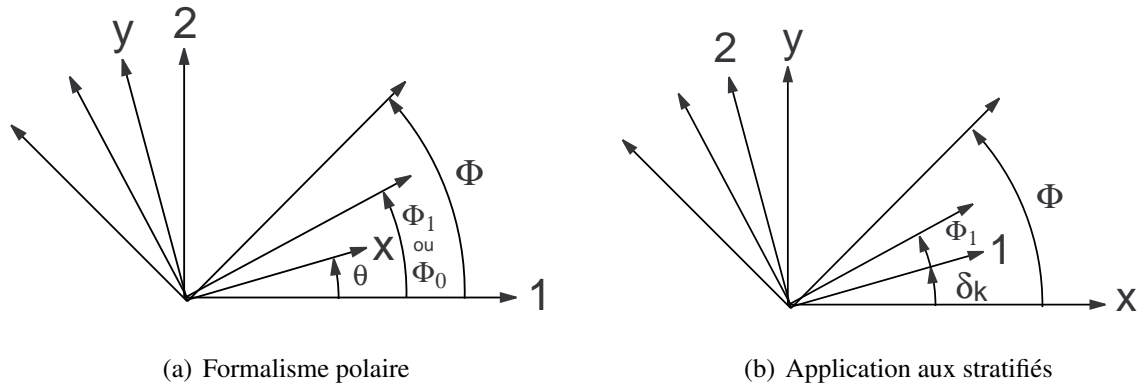


Figure 5.1: Représentation des repères et des angles pour la présentation du formalisme polaire et pour son application aux stratifiés.

Les conditions de symétries élastiques s'écrivent de façon analogue pour le tenseur de souplesse (en utilisant les paramètres polaires de  $\mathbb{S}$ ). Si l'isotropie et la symétrie du carré du tenseur de rigidité  $\underline{\underline{Q}}$  sont respectivement équivalentes à l'isotropie et à la symétrie du carré du tenseur de souplesse  $\underline{\underline{S}}$ , il faut remarquer que les autres symétries ne sont plus équivalentes. On peut montrer que la symétrie  $r_0 = 0$  de  $\underline{\underline{S}}$  implique la relation  $R_0 = R_1^2/T$  (avec  $K = 1$ ) [6], et que pour la symétrie ordinaire, seuls les trois cas ( $K = 1, k = 0$ ), ( $K = 0, k = 0$ ) et ( $K = 0, k = 1$ ) peuvent exister [10].

Dans le cas d'un matériau présentant une orthotropie ordinaire, l'expression du tenseur de rigidité (5.2) devient :

$$\begin{cases} Q_{1111}(\theta) = & T_0 + 2T_1 + (-1)^K R_0 \cos 4(\Phi_1 - \theta) + 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta) \\ Q_{1112}(\theta) = & + (-1)^K R_0 \sin 4(\Phi_1 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta) \\ Q_{1122}(\theta) = & -T_0 + 2T_1 - (-1)^K R_0 \cos 4(\Phi_1 - \theta) \\ Q_{1212}(\theta) = & T_0 - (-1)^K R_0 \cos 4(\Phi_1 - \theta) \\ Q_{2212}(\theta) = & - (-1)^K R_0 \sin 4(\Phi_1 - \theta) + 2R_1 \sin 2(\Phi_1 - \theta) \\ Q_{2222}(\theta) = & T_0 + 2T_1 + (-1)^K R_0 \cos 4(\Phi_1 - \theta) - 4R_1 \cos 2(\Phi_1 - \theta) \end{cases} \quad (5.6)$$

Les angles  $\Phi_1$  et  $\Phi_1 - \theta$  s'interprètent alors comme les angles positionnant la direction principale d'orthotropie respectivement dans les repères 1 – 2 et  $x - y$ . L'énergie de déformation exprimée en contraintes (énergie complémentaire)  $W_c$  s'écrit en fonction des modules polaires du tenseur de souplesse :

$$W_c = 2t_0 R^2 + 4t_1 T^2 + 2(-1)^k r_0 R^2 \cos 4(\varphi_1 - \Phi) + 8r_1 TR \cos 2(\varphi_1 - \Phi) \quad (5.7)$$

ou de façon équivalente en fonction des modules polaires du tenseur de rigidité :

$$W_c = \frac{4}{\Delta} \left\{ 2(T_0 T_1 - R_1^2) R^2 + (T_0^2 - R_0^2) T^2 + 2[R_1^2 - (-1)^K R_0 T_1] R^2 \cos 4(\Phi_1 - \Phi) - 4R_1 [T_0 - (-1)^K R_0] TR \cos 2(\Phi_1 - \Phi) \right\} \quad (5.8)$$

où  $\Delta = 16T_1(T_0^2 - R_0^2) - 32R_1^2 [T_0 - (-1)^K R_0]$ .

**Application aux stratifiés.** En considérant des stratifiés, la loi de comportement homogène équivalente obtenue en théorie classique s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{N} &= \underline{A} : \underline{\varepsilon}_0 + \underline{B} : \underline{\chi} \\ \underline{M} &= \underline{B} : \underline{\varepsilon}_0 + \underline{D} : \underline{\chi} \end{aligned} \quad (5.9)$$

où  $\underline{N}$  et  $\underline{M}$  sont les efforts de membrane et les moments de flexion,  $\underline{\varepsilon}_0$  et  $\underline{\chi}$  sont les déformations de membrane et les courbures, et  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  et  $\underline{D}$  sont respectivement les matrices de rigidité de membrane, de couplage membrane/flexion et de rigidité de flexion.

Dans le cas d'un stratifié d'épaisseur  $h$  à plis identiques, on peut montrer que les paramètres polaires isotropes notés  $\bar{T}_0$  et  $\bar{T}_1$  du tenseur normalisé  $\underline{A}^* = \frac{1}{h}\underline{A}$  ainsi que les paramètres polaires isotropes notés  $\tilde{T}_0$  et  $\tilde{T}_1$  du tenseur normalisé  $\underline{D}^* = \frac{12}{h^3}\underline{D}$  sont égaux à ceux de la couche de base. Il est possible d'exprimer de façon explicite les paramètres polaires anisotropes du stratifié pour la membrane et pour la flexion en fonction des invariants polaires du pli et de l'angle  $\delta_k$  de rotation du repère 1-2 associé au pli  $k$  par rapport au repère du stratifié  $x-y$  (voir figure 5.1(b)). Ces relations s'écrivent dans le cas d'un stratifié orthotrope en membrane et en flexion (dont les paramètres polaires orthotropes sont respectivement notés  $(\bar{R}_0, \bar{R}_1, \bar{K})$  et  $(\tilde{R}_0, \tilde{R}_1, \tilde{K})$ ), constitué de plis identiques orthotropes (de paramètres polaires  $T_0, T_1, R_0, R_1, K, \Phi_1$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T}_0 = T_0 \\ \bar{T}_1 = T_1 \\ (-1)^{\bar{K}} \bar{R}_0 e^{4i\bar{\Phi}_1} = \frac{1}{n} (-1)^K R_0 e^{4i\Phi_1} \sum_{k=-p}^p e^{4i\delta_k} \\ \bar{R}_1 e^{2i\bar{\Phi}_1} = \frac{1}{n} R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=-p}^p e^{2i\delta_k} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_0 = T_0 \\ \tilde{T}_1 = T_1 \\ (-1)^{\tilde{K}} \tilde{R}_0 e^{4i\tilde{\Phi}_1} = \frac{1}{n^3} (-1)^K R_0 e^{4i\Phi_1} \sum_{k=-p}^p d_k e^{4i\delta_k} \\ \tilde{R}_1 e^{2i\tilde{\Phi}_1} = \frac{1}{n^3} R_1 e^{2i\Phi_1} \sum_{k=-p}^p d_k e^{2i\delta_k} \end{array} \right. \quad (5.10)$$

( $d_k$  étant un scalaire uniquement dépendant de la valeur de  $k$  et tel que  $\sum_{k=-p}^p d_k = n^3$ ).

Ces relations montrent que des plis identiques imposent la valeur des paramètres polaires isotropes du stratifié homogène équivalent quelque soit la stratification considérée. Cette propriété remarquable sera utilisée dans l'approche d'optimisation hiérarchique décrite dans la section suivante.

Enfin, le formalisme polaire offre la possibilité d'écrire de façon explicite les conditions que doivent satisfaire les paramètres polaires des comportements de membrane et de flexion du stratifié pour assurer l'existence d'une stratification satisfaisant l'équation (5.10) [8] :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \left( \frac{\bar{R}_1}{R_1} \right)^2 - 1 \leq \frac{(-1)^{\bar{K}} \bar{R}_0}{(-1)^K R_0} \\ |(-1)^{\bar{K}} \bar{R}_0| \leq R_0 \\ \bar{R}_1 \geq 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 2 \left( \frac{\tilde{R}_1}{R_1} \right)^2 - 1 \leq \frac{(-1)^{\tilde{K}} \tilde{R}_0}{(-1)^K R_0} \\ |(-1)^{\tilde{K}} \tilde{R}_0| \leq R_0 \\ \tilde{R}_1 \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.11)$$

## 5.2 Une approche d'optimisation hiérarchique appliquée aux stratifiés

En considérant l'optimisation de la rigidité structurale de composites stratifiés, le choix de l'approche hiérarchique présentée ici a été pilotée par la volonté d'appliquer l'algorithme d'optimisation des directions alternées dans le cas des composites stratifiés, tout en conservant son principal atout numérique : l'utilisation de calcul de sensibilités locaux, qui doivent donc si possible être résolus analytiquement.

Dans le cadre de la minimisation de la compliance, l'utilisation d'une paramétrisation d'un stratifié à plis identiques basée sur les orientations des plis présente deux inconvénients majeurs : le nombre de paramètres dépend du nombre de plis considérés, mais surtout les minimisations locales de l'énergie sont alors des problèmes fortement non-convexes.

Nous avons donc opté pour une méthodologie d'optimisation à deux étapes successives basée sur le formalisme polaire, appelée approche d'optimisation hiérarchique [5], qui a fait l'objet de la thèse CIFRE de A. Jibawy [4] (coencadrée avec F. Léné, taux d'encadrement : 80%) en parallèle de la thèse de C. Julien (coencadrée par A. Vincenti et F. Léné) dans le cadre d'un contrat avec la société SEGULA Aerospace :

**Étape 1** *Optimisation structurale à l'échelle macroscopique.*

L'optimisation de la compliance d'un composite stratifié à plis identiques, découplé, orthotrope en membrane et en flexion est réalisée en utilisant l'algorithme d'optimisation des directions alternées en considérant des paramètres d'optimisation associés au comportement homogène équivalent du composite stratifié : les paramètres polaires d'orthotropie des tenseurs normalisés de membrane et de flexion (les paramètres polaires d'isotropie étant fixés égaux à ceux de la couche de base pour un stratifié à plis identiques).

**Étape 2** *Conception de la stratification à l'échelle mésoscopique.*

Une recherche des angles des plis de la stratification satisfaisant aux valeurs des paramètres polaires optimaux obtenus à l'étape 1, ainsi qu'au découplage et à l'orthotropie du stratifié en membrane et en flexion est réalisée.

*Remarques concernant l'étape 1.* Afin de rendre les étapes de minimisations locales de l'énergie complémentaire explicites (voir section 5.3), il est nécessaire de considérer un chargement de membrane *ou* de flexion. Dans le cas d'efforts de membranes et de moments de flexion combinés pour lequel il n'existe pas à ce jour de solution analytique au problème de minimisation locale de l'énergie, deux approches alternatives sont possibles. La première consiste à choisir une famille de stratifications remarquables afin de résoudre analytiquement les minimisations locales de l'énergie (par exemple la famille des stratifications alternées, possiblement quasi-homogènes, qui permet dans certains cas d'atteindre le minimum en présence d'efforts de membrane ou de moments de flexion, voir section 5.3). La seconde consiste à résoudre numériquement le problème de la minimisation locale de l'énergie par rapport aux paramètres polaires de membrane et de flexion, mais avec le risque de ne pas obtenir le minimum global recherché (voir la section 5.6 de perspectives).

*Remarques concernant l'étape 2.* La contrainte géométrique (5.11) ayant été intégrée à l'étape 1, l'existence d'une stratification solution est assurée localement (c'est-à-dire sur chaque élément fini en pratique). Les variables d'optimisation sont alors les orientations des plis du stratifié et le problème est fortement non convexe. Nous déterminerons dans la section suivante quelques familles de stratifications optimales pouvant être déterminées analytiquement (angle ply, UD et cross ply). En dehors de ces solutions remarquables, un algorithme génétique a été utilisé afin de résoudre numériquement le problème de recherche de stratification. Il reste néanmoins le problème de la faisabilité des stratifications satisfaisant localement aux valeurs des paramètres polaires optimaux du stratifié. Pour les stratifications remarquables, la faisabilité ne peut être assurée en toute généralité. Pour obtenir un stratifié fabricable en terme de continuité des fibres au sein des plis, il est nécessaire d'effectuer une étape de recherche numérique de stratification en tenant compte des orientations optimales des points voisins. Pour cela, de nombreuses stratégies sont possibles, et sont en cours d'étude (voir à nouveau la section 5.6 de perspectives).

### 5.3 Minimisation de l'énergie complémentaire dans le cas orthotrope

Le problème de la minimisation locale de l'énergie complémentaire à contraintes fixées qui apparaît lors de l'utilisation de l'algorithme d'optimisation des directions alternées a été résolu analytiquement dans le cas d'un matériau orthotrope (en considérant des paramètres polaires isotropes constants). Ce problème s'écrit ( $W_c$  est donné par l'équation (5.8)):

$$\min_{\{R_0, R_1, K, \Phi_1\}} W_c(R_0, R_1, K, \Phi_1) \quad (5.12)$$

**Matériau orthotrope général.** Dans le cas d'un matériau *orthotrope général*, il faut adjoindre au problème (5.12) les contraintes d'optimisation (5.3) et (5.4) écrites dans le cas de l'orthotropie ordinaire (5.5) :

$$\begin{aligned} R_0 &\geq 0 & T_0 - R_0 &> 0 \\ R_1 &\geq 0 & [T_0 - (-1)^K R_0] \{T_1 [T_0 + (-1)^K R_0] - 2R_1^2\} &> 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ce problème d'optimisation peut être résolu analytiquement de façon explicite (une démonstration partielle est publiée dans [10], tandis que l'article décrivant la démonstration complète est à ce jour soumis). Les principaux résultats remarquables obtenus sont que *les solutions sont de trois types différents en fonction du rapport entre partie sphérique et déviatorique du tenseur des contraintes, et que pour le premier type de solutions, il existe un ensemble de solutions optimales* défini à l'aide d'un intervalle sur le paramètre  $(-1)^K R_0$ .

**Matériau stratifié orthotrope.** Le problème de minimisation locale de l'énergie complémentaire à contraintes fixées a aussi été résolu analytiquement dans le cas d'un matériau orthotrope stratifié (découplé) pour un problème de membrane ou de flexion (une démonstration partielle est publiée dans [10], tandis que l'article décrivant la démonstration complète est à ce jour en rédaction). Au problème (5.12) (qui doit alors s'écrire en fonction des paramètres polaires de rigidité ou de membrane), il faut adjoindre la condition (5.3) et la condition géométrique (5.11) qui est toujours plus restrictive que la condition de positivité du tenseur de rigidité (5.4) appliquée au tenseur de membrane ou de flexion du stratifié [8]. On résout un problème similaire à celui de la minimisation de l'énergie complémentaire pour un matériau constitué du mélange de deux matériaux élastiques et dont le comportement est obtenu par homogénéisation. La différence est que le domaine de recherche est cette fois ci limité aux stratifiés de comportement homogène obtenu par intégration suivant l'épaisseur. Des résultats similaires à ceux obtenus dans le cas de l'orthotropie générale ont été obtenus, avec en plus la possibilité de définir des stratifications remarquables optimales, aussi bien en membrane qu'en flexion :

- les angles ply sont solutions du premier et deuxième type,
- les unidirectionnels sont les solutions du deuxième type,
- les cross-ply sont solutions pour les trois types.

*Le principal apport de ces études est de définir une solution analytique explicite (non présente dans la littérature) caractérisant l'ensemble des solutions au problème de la minimisation de l'énergie complémentaire dans le cas de l'orthotropie générale et dans le cas d'un stratifié orthotrope.*

## 5.4 Minimisation d'un critère de tenue mécanique orthotrope

Dans l'optique d'optimiser la tenue mécanique de plaques composites stratifiées, le premier critère à prendre en compte est la rupture premier pli. Il est possible, dans une première approche, de considérer ce critère à l'aide d'un indice de résistance sous forme polynomiale. Dans ce cadre, pour un pli composite dont le comportement est localement orthotrope, les critères de résistance de Hill-Tsai, Hoffman et Tsai-Wu s'expriment sous la forme tensorielle générale :

$$F^{pli} = \underline{\nu} : \underline{\underline{H}} : \underline{\nu} + \underline{h} : \underline{\nu} \leq 1 \quad (5.14)$$

où  $\underline{\nu}$  est le tenseur des contraintes ou de déformations, et  $\underline{\underline{H}}$  et  $\underline{h}$  sont les tenseurs, respectivement d'ordre 4 et d'ordre 2, de résistance ou de faiblesse, suivant que l'indice de rupture est exprimé en contraintes ou en déformations. En supposant que le tenseur  $\underline{\underline{H}}$  est orthotrope et possède les mêmes directions d'orthotropie que le tenseur de rigidité, on montre que *le type d'orthotropie du tenseur  $\underline{\underline{H}}$  n'est pas toujours identique à celui du tenseur de rigidité.*

En utilisant les paramètres polaires  $(\Gamma_0, \Gamma_1, \Lambda_0, \Lambda_1, L, \Omega_1)$  du tenseur orthotrope  $\underline{\underline{H}}$  afin d'obtenir une expression similaire à celle de l'énergie de déformation (cas du critère de Tsai-Hill), et avec des termes supplémentaires relatifs aux paramètres polaires  $(\Gamma, \Lambda, \Omega_1)$  de  $\underline{h}$  pour les critères de Hoffman et Tsai-Wu (en faisant l'hypothèse de mêmes directions principales pour  $\underline{\underline{H}}$  et  $\underline{h}$ ), ces critères se mettent sous la forme  $((U, V, \Upsilon)$  sont les paramètres du tenseur  $\underline{\nu}$ ) :

$$F^{pli} = 4V^2 \left[ \Gamma_0 + (-1)^L \Lambda_0 \cos 4(\Omega_1^{(k)} - \Upsilon) \right] + 8U^2 \Gamma_1 + 16UV \Lambda_1 \cos 2(\Omega_1^{(k)} - \Upsilon) + \\ + 2U\Gamma + 2V\Lambda \cos 2(\Omega_1^{(k)} - \Upsilon) \leq 1 \quad (5.15)$$

où  $\Omega_1^{(k)} = \Omega_1 + \delta_k$  (voir figure 5.1(a) avec  $\Phi_1 = \Omega_1$  et  $\Phi = \Upsilon$ ). A l'aide de cette expression, il est possible d'obtenir la direction optimale d'orthotropie minimisant le critère de Tsai-Hill en utilisant des résultats identiques à ceux obtenus pour l'énergie de déformation [3] (voir [10] pour leur expression dans le formalisme polaire). Pour les critères quadratiques et linéaires de Hoffman et Tsai-Wu, l'orientation optimale est déterminée analytiquement [2] et comparée avec celle obtenue pour le critère quadratique.

*Le principal apport de cette étude est de montrer que, même si pour certaines familles de valeurs des contraintes (ou déformations) les orientations optimales pour les différents critères de résistance sont identiques, elles ne le sont pas toujours : le choix du critère est prépondérant pour le problème de minimisation de l'indice de résistance par rapport à la direction d'orthotropie du matériau.*

## 5.5 Optimisation simultanée de la rigidité et de la tenue mécanique

Afin d'optimiser la rigidité et la tenue mécanique d'une plaque stratifiée, il est possible d'utiliser l'approche hiérarchique décrite dans la section 5.2 de deux façons différentes [1]. La première méthode consiste en l'introduction de la contrainte d'optimisation sur l'indice de résistance au niveau de l'étape 2, c'est-à-dire à l'étape de recherche de stratification. Il serait alors possible d'obtenir des plaques stratifiées optimisées en rigidité satisfaisant à un critère de résistance, sans

toutefois avoir a priori une quelconque information sur l'existence d'une telle stratification avant sa recherche par algorithme génétique.

La deuxième méthode consiste en l'introduction de l'indice de résistance au niveau de l'étape 1. Pour ce faire, il est alors nécessaire d'utiliser un critère de résistance homogénéisé, car à l'étape 1, la stratification n'est pas connue. Pour donner un sens à un tel indice de résistance homogénéisé, il faut établir son lien avec l'indice de résistance des plis constituant le stratifié qui n'est défini que lors de la deuxième étape.

L'indice de résistance homogénéisé est introduit par intégration suivant l'épaisseur des indices de résistance des plis exprimés en déformations. En théorie classique des stratifiés, la déformation 3D est approximée par une fonction affine de la coordonnée suivant l'épaisseur  $z$ , et on obtient en considérant le critère quadratique de Hill Tsai :

$$F_{Hill}^{Hom} = \frac{1}{h} \left[ \underline{\varepsilon}_0 \left( \int_h \underline{H} dz \right) \underline{\varepsilon}_0 + \underline{\chi} \left( \int_h \underline{H} z^2 dz \right) \underline{\chi} + 2\underline{\varepsilon}_0 \left( \int_h \underline{H} z dz \right) \underline{\chi} \right] \leq 1. \quad (5.16)$$

Dans le cas d'un stratifié homogène découplé orthotrope en membrane et en flexion, et constitué de plis identiques orthotropes tournés d'un angle  $\delta_k$  dans le repère du stratifié, on obtient alors des relations similaires à celles respectivement obtenues dans le cas de la rigidité par les équations (5.10), (5.4) et (5.11) en terme de lien entre paramètres polaires homogénéisés et du pli, positivité du tenseur de résistance homogénéisé et de contraintes géométriques.

Dans le cas d'un chargement membranaire uniquement, la déformation est identique dans chaque pli et l'indice de résistance d'un pli défini dans le repère 1 – 2 tourné d'un angle  $\delta_k$  par rapport au repère du stratifié  $x - y$  (voir figure 5.1(b)) s'écrit à l'aide de l'équation (5.15) appliquée au cas du critère de Hill Tsai :

$$F^{pli} = 4V^2 [\Gamma_0 + (-1)^L \Lambda_0 \cos 4(\delta_k + \Omega_1 - \Upsilon)] + 8U^2 \Gamma_1 + 16UV \Lambda_1 \cos 2(\delta_k + \Omega_1 - \Upsilon) \quad (5.17)$$

Dans cette formule, la déformation et les paramètres polaires ( $\Gamma_0, \Gamma_1, \Lambda_0, \Lambda_1, L, \Omega_1$ ) du pli de base sont *fixés*. Il est donc possible de déterminer pour quelle valeur de l'angle  $\delta_k$  cet indice est maximal, et donc de déterminer la distance maximale entre l'indice homogène et l'indice d'un pli.

L'approche hiérarchique présentée dans la section 5.2 est alors modifiée comme suit :

**Étape 1** *Optimisation structurale à l'échelle macroscopique.*

Optimisation de l'indice de résistance et de l'énergie complémentaire par rapport aux paramètres polaires de résistance et de rigidité, *supposés indépendants*.

**Étape 2** *Conception de la stratification à l'échelle mésoscopique.*

Recherche des stratifications satisfaisant au découplage, à l'orthotropie et aux valeurs des paramètres polaires homogènes de résistance et de rigidité optimaux obtenus à l'étape 1.

Pour l'étape 1, les minimisations locales de l'énergie et de l'indice de résistance possèdent un paramètre commun : la direction d'orthotropie (possiblement tournée de 90° entre résistance et rigidité). Les minimisations locales sont réalisées en cascade. Si l'angle optimal est déterminé lors de la minimisation locale de l'énergie complémentaire, l'algorithme se résume à la version précédente définie pour un seul critère de rigidité avec en post processeur les minimisations locales de l'indice de résistance par rapport à ses invariants polaires orthotropes. Par contre, si l'angle d'orthotropie est optimisé lors de la minimisation locale de l'indice de résistance, plusieurs stratégies numériques (non décrites ici) sont possibles, tout en conservant la convergence théorique de l'algorithme d'optimisation obtenu. En utilisant la relation (5.17), on peut déterminer à la fin



de l'étape 1 si les plis ont tous un indice de résistance inférieur à 1, quelque soit leur orientation au sein du stratifié  $\delta_k$ . Si tel est le cas, cela permet d'effectuer une recherche de stratification sur l'ensemble des stratifications le plus grand possible, tout en assurant a priori que l'indice de résistance des plis est toujours inférieur à 1.

Pour l'étape 2, si l'indice de résistance homogénéisé est inférieur à 1 partout dans la structure, il est possible de déterminer analytiquement si des plis sont susceptibles d'avoir un indice de résistance supérieur à 1 en fonction de leur orientation au sein du stratifié : on peut alors connaître l'intervalle sur l'angle  $\delta_k$  qui assurera la condition  $F^{pli} \leq 1$ . Cette condition, une fois introduite à l'étape 2, permet alors de rechercher des stratifications en assurant a priori que l'indice de résistance des plis est toujours inférieur à 1.

*Le principal apport de cette étude est de proposer une méthode d'optimisation de plaque stratifiée simultanément en rigidité et en résistance, en opposition à une optimisation de la rigidité contrainte par la résistance ou une optimisation de la résistance contrainte par la rigidité. Cette approche repose sur l'utilisation d'un indice de résistance homogène qui, relié analytiquement à l'indice de résistance local de chaque pli, permet d'effectuer une recherche de stratification tout en assurant a priori que l'indice de résistance des plis est toujours inférieur à 1.*

## 5.6 Perspectives

Pour le problème de la minimisation de la rigidité globale de structures minces composites stratifiées découplées orthotropes, la prise en compte d'efforts de membrane et de moments de flexion combinés (chargements combinés, coques) reste un problème ouvert : le problème de minimisation locale tenant compte des contraintes géométriques simultanées de membrane et de flexion n'est pas résolu à ce jour. La difficulté majeure réside dans le fait que les stratifiés ont généralement des comportements différents en membrane et en flexion, tout en étant liés par la micro-structure commune (ou stratification). Le but est ici d'explorer mathématiquement ce lien afin de définir le véritable domaine d'optimisation pour cette classe de matériaux (en se limitant aux matériaux orthotropes en membrane et en flexion). Une simplification de ce problème consiste en la prise en compte de stratifications quasi-homogènes, pour lesquelles les comportements normalisés de membrane et de flexion sont identiques. Le domaine d'optimisation est alors connu, mais la solution analytique au problème de minimisation locale de l'énergie complémentaire est manquante.

Pour le problème de détermination de la meilleure distribution de l'anisotropie d'une structure mince stratifiée qui doit être simultanément la plus rigide et la plus résistante, les perspectives naturelles sont les suivantes : généralisation de l'approche par critère de résistance homogène du stratifié au cas des chargements de flexion, extension au cas de critères quadratiques et linéaires (Hoffman et Tsai-Wu), et définition d'un algorithme d'optimisation favorisant la maximisation de la rigidité ou de la résistance de façon pilotée par l'utilisateur.

Pour les deux types de problèmes (rigidité / rigidité et résistance), la prise en compte de la faisabilité de la stratification en terme de continuité et de courbure des fibres dans chaque pli dans l'étape de recherche par algorithme génétique de stratifications satisfaisant aux paramètres polaires obtenus par l'algorithme des directions alternées ainsi qu'aux hypothèses de découplage et d'orthotropie, représente un véritable challenge numérique.

A moyen terme, la prise en compte d'un critère de tenue au délaminage en supplément du critère polynomial de tenue à la rupture premier pli est envisagée. L'objectif est le développement d'un outil de dimensionnement permettant de déterminer les séquences d'empilement optimales

pour un multicouche et des conditions aux limites données. Cet outil original sera basé sur des approches type plaques 2D évitant de lourdes approches 3D, nécessitera l'interaction d'une méthode de détermination des efforts d'interface, d'un critère de tenue au délaminage et d'une stratégie d'optimisation incluant ce critère. Il pourra dans un premier temps être envisagé que l'optimisation de la séquence d'empilement sera pilotée par la rigidité structurale et la résistance à la rupture premier pli loin du bord libre et par la tenue au délaminage près du bord libre.

A plus long terme, l'utilisation d'un critère polynomial de résistance mécanique sera remplacée par la prise en compte de l'endommagement du composite stratifié. Une possible approche d'optimisation de structure avec prise en compte de l'endommagement a déjà été décrite dans le chapitre précédent. La difficulté supplémentaire consiste en la définition des informations qui pourraient être prises en compte lors de l'utilisation de l'algorithme des directions alternées avec un comportement homogène équivalent, et celles qui devront être traitées lors de la recherche de stratification. En effet, l'évolution de l'endommagement dans un pli ou une interface au sein du stratifié est fortement dépendante de la stratification, et plus seulement de l'orientation du pli considéré comme dans le cas d'un critère de type rupture premier pli.

## Bibliographie du Chapitre

- [1] A. Catapano. *Stiffness and strength optimization of the anisotropy distribution for laminated Structures*. PhD thesis, UPMC, 2013.
- [2] A. Catapano, B. Desmorat, and P. Vannucci. Invariant formulation of phenomenological failure criteria for orthotropic sheets and optimisation of their strength. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35(15):1842–1858, 2012.
- [3] G. Cheng and P. Pedersen. On sufficiency conditions for optimal design based on extremum principles in mechanics. 45:135–150, 1997.
- [4] A. Jibawy. *Optimisation structurale de coques minces composites stratifiées*. PhD thesis, Université Paris 6, Pierre et Marie Curie, 2010.
- [5] A. Jibawy, C. Julien, B. Desmorat, A. Vincenti, and F. Léné. Hierarchical structural optimization of laminated plates using polar representation. *International Journal of Solids and Structures*, 48(18):2576–2584, 2011.
- [6] P. Vannucci. A special planar orthotropic material. *Journal of Elasticity*, 67:81–96, 2002.
- [7] P. Vannucci. Plane anisotropy by the polar method. *Meccanica*, 40:437–454, 2005.
- [8] P. Vannucci. A note on the elastic and geometric bounds for composite laminates. *Journal of Elasticity*, 112(2):199–215, 2013.
- [9] G. Verchery. Les invariants des tenseurs d'ordre 4 du type de l'élasticité. In CNRS, editor, *Euromech 115*, volume 31, pages 93–104, 1982.
- [10] A. Vincenti and B. Desmorat. Optimal orthotropy for minimum elastic energy by the polar method. *Journal of Elasticity*, 102(1):55–78, 2011.

## CHAPITRE 6

# Bilan scientifique

---

Mes activités de recherche, réalisées en partie dans le cadre de collaborations industrielles ont pour finalité le développement d'outils numériques robustes et rapides de conception optimale d'une structure en phase d'avant projet (pour laquelle seuls les mécanismes et comportements prépondérants pour la définition de la topologie de la structure sont pris en compte). Cet objectif industriel s'inscrit dans une démarche théorique de définition de *méthodologies d'optimisation* alliant trois éléments essentiels : *calcul des structures, comportement matériau et algorithme d'optimisation*. La forte implication de ces trois éléments induit la nécessité d'études théoriques approfondies afin d'obtenir des résultats pertinents pour un coût de calcul le plus faible possible.

Jusqu'à ce jour, mes travaux se sont exclusivement basés sur un algorithme d'*optimisation de la rigidité structurale mesurée par la compliance* (ou travail des efforts extérieurs) convergent, robuste et numériquement performant car il ne nécessite que des calculs de sensibilité locaux. Dans ce contexte, ma thématique de recherche peut alors se résumer à l'*optimisation topologique de la rigidité de structures avec la prise en compte de la distribution de l'anisotropie* (composites stratifiés), *de comportements non-linéaires* (élasticité non-linéaire, élastoplasticité) *ainsi que de la tenue mécanique* (par critère de résistance ou pilotée par l'endommagement).

Pour mes travaux axés sur les *composites stratifiés*, j'ai collaboré étroitement avec A. Vincenti dans le cadre d'un contrat avec la société SEGULA Technologie (2005–2011) qui a financé la thèse de A. Jibawy (encadrée avec F. Léné), puis avec P. Vannucci pour la thèse de A. Catapano. Ces travaux ont permis de développer une méthodologie originale définissant la *distribution optimale de l'anisotropie* qui maximise la *rigidité structurale* d'une plaque chargée en membrane ou en flexion [6, 10] ainsi que la *résistance mécanique* d'une plaque chargée en membrane (Thèse A. Catapano), et permettant dans un second temps de trouver des stratifications optimales à l'aide d'un algorithme génétique. Grâce à l'utilisation de la méthode polaire de représentation de l'anisotropie par invariants, de nombreuses difficultés théoriques ont été levées. Tout d'abord, le problème de *minimisation de l'énergie de déformation* exprimée en contrainte pour un matériau orthotrope (stratifié ou non) a été résolu de façon analytique [7]. Ensuite la *minimisation des indices de résistance quadratiques* (Hill-Tsai, Tsai-Wu, Hoffman) pour un pli ou un stratifié orthotropes a été résolu analytiquement [8]. Enfin, plusieurs algorithmes d'optimisation nouveaux ont été définis, avec pour originalité l'utilisation d'un indice de résistance homogène dans une méthode hiérarchique.

D'autres travaux m'ont permis de montrer que l'utilisation de l'algorithme considéré peut être étendue, en considérant des stratifications particulières, à des *calculs de structures spécifiques* de type assemblages de plaques [1, 3], coques de géométrie quelconque [9] ou avec prise en compte de contraintes initiales d'origine thermique [11]. Ces structures pourront s'inscrire dans la méthodologie d'optimisation développée précédemment, à condition que le verrou scientifique de la minimisation de l'énergie de déformation pour un état de membrane/flexion combiné puisse être levé.

Un second pan de mes travaux concerne l'*optimisation structurale avec comportements non-linéaires* : élasticité non-linéaire, élasto-plasticité, élasto-plasticité cyclique avec endommagement.

ment. Il a d'abord été démontré comment étendre l'algorithme considéré à une classe complète de comportements élastiques non-linéaires : les lois de comportement dérivant de *potentiels positivement homogènes* qui assurent la proportionnalité entre compliance et énergie de déformation. Des cas particuliers inclus dans cette famille de comportement sont les lois de *comportement dissymétriques en traction compression* [2] (application aux composite), les lois de *comportement de type puissance*, et les lois de comportement d'interface (*contact unilatéral sans frottement* [4]).

En généralisant l'algorithme d'optimisation à des lois de *comportement élastiques non-linéaires à seuil*, il a été possible de traiter le problème d'optimisation en *fatigue à faible nombre de cycles pilotée par l'endommagement* d'une structure constituée d'un matériau isotrope *élasto-plastique* [5]. En faisant les hypothèses de découplage entre plasticité et endommagement (calcul de l'endommagement par cycle en post processeur d'un calcul élasto-plastique) et de chargement proportionnel, il est possible de définir analytiquement une loi de comportement élastique non-linéaire à seuil reliant amplitude de contraintes et de déformations, utilisable avec l'algorithme d'optimisation.

# Bibliographie personnelle

- [1] G. Duvaut, B. Desmorat, and E. Deletombe. Optimization of internal composite reinforcements of 3d structures. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, 329:549–555, 2001.
- [2] B. Desmorat and G. Duvaut. Compliance optimization with nonlinear elastic materials: Application to constitutive laws dissymmetric in tension-compression. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 22:179–192, 2003.
- [3] B. Desmorat and G. Duvaut. Optimization of the reinforcement of a 3d medium with thin composite plates. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 28(6):407–415, 2004.
- [4] B. Desmorat. Structural rigidity optimization with frictionless unilateral contact. *International Journal of Solids and Structures*, 44(3-4):1132–1144, 2007.
- [5] B. Desmorat and R. Desmorat. Topology optimization in damage governed low cycle fatigue. *Comptes-Rendus Mécanique*, 336(5):448–453, 2008.
- [6] A. Jibawy, C. Julien, B. Desmorat, A. Vincenti, and F. Léné. Hierarchical structural optimization of laminated plates using polar representation. *International Journal of Solids and Structures*, 48(18):2576–2584, 2011.
- [7] A. Vincenti and B. Desmorat. Optimal orthotropy for minimum elastic energy by the polar method. *Journal of Elasticity*, 102(1):55–78, 2011.
- [8] A. Catapano, B. Desmorat, and P. Vannucci. Invariant formulation of phenomenological failure criteria for orthotropic sheets and optimisation of their strength. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35(15):1842–1858, 2012.
- [9] A. Jibawy, B. Desmorat, and A. Vincenti. Structural rigidity optimization of thin laminated shells. *Composite Structures*, 95:35–43, 2012.
- [10] P. Vannucci, B. Desmorat, and A. Vincenti. Design problems of anisotropic structures: some recent results. In G. Buttazzo and A. Frediani, editors, *Variational analysis and aerospace engineering 2*, pages 395–426. Springer Verlag, 2012.
- [11] B. Desmorat. Structural rigidity optimization with an initial design dependent stress field. application to thermo-elastic stress loads. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 37:150–159, 2013.

---

## **Résumé**

Les travaux de recherche présentés ont pour finalité le développement d'outils numériques robustes et rapides de conception optimale d'une structure en phase d'avant projet (pour laquelle seuls les mécanismes et comportements prépondérants pour définir la meilleure topologie de la structure sont pris en compte).

Cet objectif industriel s'inscrit dans une démarche théorique de définition de méthodologies d'optimisation alliant trois éléments essentiels : calcul des structures, comportement matériau et algorithme d'optimisation. Les différentes études sont basées sur un algorithme d'optimisation de la rigidité structurale mesurée par la compliance (ou travail des efforts extérieurs) qui est convergent, robuste et numériquement performant car il ne nécessite que des calculs de sensibilités locaux.

Dans ce cadre, les thèmes abordés dans les études présentées se résument alors à la généralisation de cet algorithme d'optimisation à la prise en compte de la distribution de l'anisotropie (avec une application aux composites stratifiés), de comportements non-linéaires (élasticité non-linéaire, élastoplasticité) et de la tenue mécanique (par critère de résistance ou pilotée par l'endommagement).

## **Mots clés**

Optimisation, composites stratifiés, élasticité non-linéaire, plasticité, endommagement.

---

---

## **Abstract**

The objective of the presented research studies is to develop fast and robust numerical tools for the optimal design of a structure in an early stage of design (for which only crucial mechanisms and behaviours need to be taken into account in order to define the structure topology).

This industrial objective is part of a theoretical approach which aims at defining optimization methodologies that combine three essential elements: computational mechanics, material behaviour and optimization algorithms. The presented studies are based on a structural rigidity optimization algorithm that minimizes the compliance. This algorithm is convergent, robust and numerically efficient because it only uses local sensitivity analysis.

In this framework, the topics covered in the presented works are about the generalization of the use of this structural rigidity optimization algorithm to include the anisotropy distribution (with an application to composite laminates), non-linear behaviours (non-linear elasticity or elasto-plasticity) and structural failure (by the use of strength criteria or damage).

## **Keywords**

Optimization, composite laminates, non-linear elasticity, plasticity, damage.

---