Concepts de base

Equation de Navier Stokes

- **Ecoulement compressible:**

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] + F_i \quad (i = 1, 3)$$

Equation pour l'énergie interne

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = -(\gamma - 1) e \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\mu}{\rho} \tau : D + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}$$

Equations d'état

- **Gaz parfaits** $p = R \rho T$
- **Barotropes** $p = \rho^\gamma$
  - (plus d'équation pour l'énergie)
- **Energie interne et température** $e = C_v T$
- **Enthalpie et température** $h = C_p T$

Conditions limites / initiales

- **Géométrie de l'écoulement** : Périodique, non glissement, etc…

Conditions limites

- **Physique du problème** : état initiale du système : densité/vitesse/température

Conditions initiales

Equation de Navier Stokes

- **Ecoulement incompressible:**

Conservation de la masse

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0}$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + f_i \quad (i = 1, 3)}$$

Equation pour la température

Scalaire Passif!!!

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T u_j}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}}$$

Pression
écoulements incompressibles

- **Quantité non locale en incompressible**

$$\nabla \cdot \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + f_i\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta p = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \qquad \partial_j u_i = D_{ij} + \Omega_{ij}$$

Problème de Poisson

Symétrique

Antisymétrique

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Delta p = -\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \Omega^2 - D^2}$$

Pression
écoulements incompressible

- **Equation de Poisson**

$$\boxed{\Delta p = \Omega^2 - D^2}$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{4}(\partial_i u_j - \partial_j u_i)^2 \qquad D^2 = \frac{1}{4}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{p(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{D^2(\mathbf{x}') - \Omega^2(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'}$$

Non locale

Equations de NS incompressibles et Symétries

- **Invariance des équations** si on applique la transformation

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}' \ , \quad t \longrightarrow t' \ , \quad \mathbf{u}(x,t) \longrightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}', t')$$

- Si $\mathbf{u}(x,t)$ **solution**, $\mathbf{v}(\mathbf{x}', t')$ **est aussi solution**

- $\mathbf{u}(x,t)$ périodique en espace et de divergence nulle

Equations de NS et Symétries

Translation en espace

$$(\mathbf{x},t) \longrightarrow (\mathbf{x}'=\mathbf{x}+\mathbf{r}, t'=t)\ ,\quad \mathbf{v}(\mathbf{x}',t')=\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$$

Translation en temps

$$(\mathbf{x},t) \longrightarrow (\mathbf{x}'=\mathbf{x}, t'=t+\tau)\ ,\quad \mathbf{v}(\mathbf{x}',t')=\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$$

Transformation galiléenne

$$(\mathbf{x},t) \longrightarrow (\mathbf{x}'=\mathbf{x}+\mathbf{u_0}t, t'=t)\ ,\quad \mathbf{v}(\mathbf{x}',t')=\mathbf{u}(\mathbf{x},t)+\mathbf{u_0}$$

Parité

$$(\mathbf{x},t) \longrightarrow (\mathbf{x}'=-\mathbf{x}, t'=t)\ ,\quad \mathbf{v}(\mathbf{x}',t')=-\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$$

Rotation $\underline{\underline{A}} \in SO(\mathcal{R}^3)$

$$(\mathbf{x},t) \longrightarrow (\mathbf{x}'=\underline{\underline{A}}\mathbf{x}, t'=t)\ ,\quad \mathbf{v}(\mathbf{x}',t')=\underline{\underline{A}}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$$

Scaling $h \in \mathcal{R},\ \nu=0$ et $h=-1,\ \nu\neq 0$

$$(\mathbf{x},t) \longrightarrow (\mathbf{x}'=\lambda\mathbf{x}, t'=\lambda^{1-h}t)\ ,\quad \mathbf{v}(\mathbf{x}',t')=\lambda^h\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$$

UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE

thomas.gomez@upmc.fr

Vorticité

$$\boxed{\omega = \nabla \times \mathbf{u}}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\omega_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}$$

Tenseur de divergence nulle

Pseudo-tenseur

UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE

thomas.gomez@upmc.fr

Vorticité

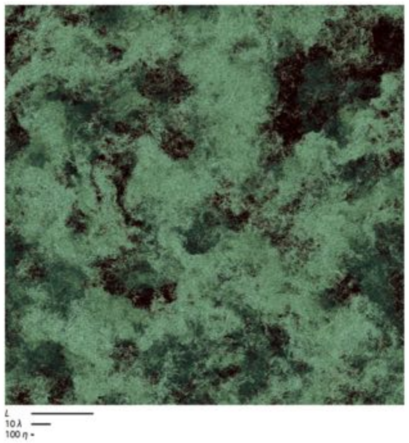
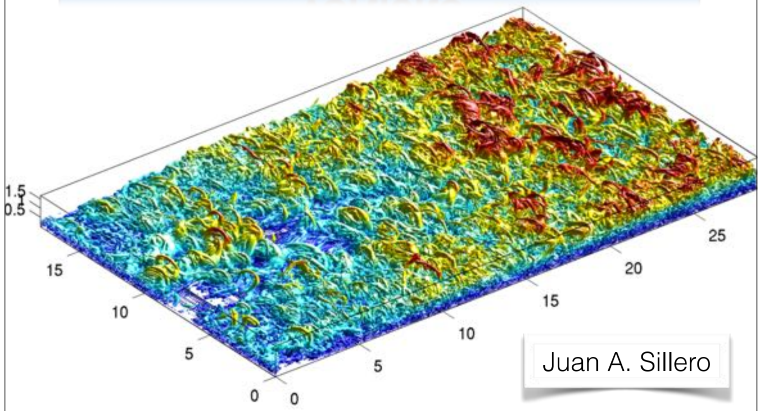


Figure 1

Intense vorticity isosurfaces showing the region $|\omega| > \langle\omega\rangle + 4\sigma_\omega$ in direct numerical simulation with 4096^3 grid points and $R_\lambda = 1131$, where ω is the vorticity and $\langle\omega\rangle$ and σ_ω are the mean and standard deviation of $|\omega|$. The size of the display domain is $12267\eta \times 12267\eta$, periodic in the vertical and horizontal directions. The black bars at the bottom indicate the integral length scale $L = \pi/(2U^2)\int_0^\infty E(k)/k\,dk$, the Taylor microscale λ, and the Kolmogorov length scale $\eta = \nu^{3/4}/\langle\varepsilon\rangle^{1/4}$, where $E(k)$ is the energy spectrum normalized so that $\int_0^\infty E(k)dk = E$. The field consists of clouds of a large number of small eddies and void regions. Intermittency is observed from large to small scales.

UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE

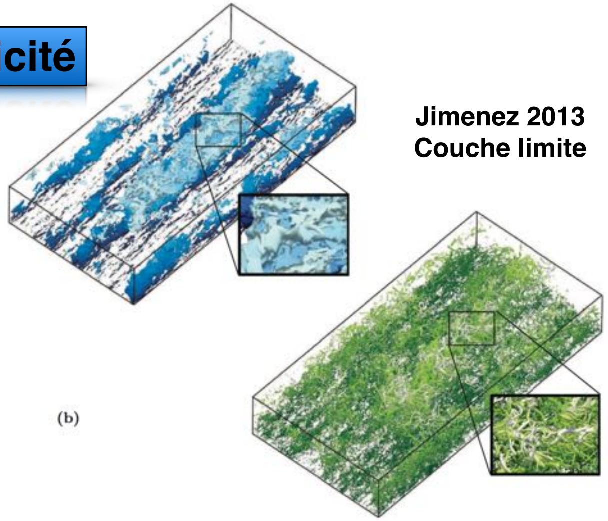
Vorticité



UNIVERSITE PIERRE & MARIE CURIE

thomas.gomez@upmc.fr

Vorticité



Jimenez 2013
Couche limite

Vorticité

$$\Delta p = \Omega^2 - D^2$$

- **Vortex = minimum de pression**
- **Concentre les bulle d'air**

Couder et al., 1995

Equations pour la vorticité

$$\nabla \times (NS) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \boxed{\omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_k \partial x_k} + \nabla \times f_i \quad (i = 1, 3)$$

- **Pas de terme de pression**
- **Création de vorticité par le champ de déformation Etirement par le gradient de vitesse**

Lois de conservation

- Dans la **limite des Re très grands**, i.e. $\nu \longrightarrow 0$
  - **Energie cinétique** E (incompressible),
  - **Hélicité cinétique** H (3D)
  - **Enstrophie** (2D)

Lois de conservation

- Soit une quantité h satisfaisant l'équation d'advection

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_j \frac{\partial h}{\partial x_j} = g$$

- Le terme d'advection est conservatif si $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

$$\boxed{\forall \; V \;, \quad \int_V u_j \frac{\partial h}{\partial x_j} dv = \int_S (u_j h) n_j ds}$$

- S'annule si fluide au repos à l'infini

Invariants non visqueux

- Conservation de l'**énergie cinétique**

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \int |\mathbf{u}|^2 dv}$$

- Terme de flux fonction de la vitesse

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \underbrace{\int_V \nabla \cdot \left[\mathbf{v}(\mathbf{v}^2/2 + p) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right] dv}_{\text{Terme de flux}} - \underbrace{\nu \int_V \boldsymbol{\omega}^2 dv}_{\text{Dissipation}}}$$

- **Soit E conservée si** $\nu = 0$

Invariants non visqueux

- Conservation de l'**énergie cinétique**

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \int |\mathbf{u}|^2 dv}$$

- On peut donc montrer que l'on a

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -\nu \int_V \omega^2 dv}$$

- **Soit E conservée si** $\nu = 0$

Invariants non visqueux

- **L'hélicité totale**

$$\boxed{H \equiv \frac{1}{2} \int_V \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dv}$$

- **vorticité ω est un pseudo-vecteur**
- **l'hélicité est un pseudo-scalaire**
- **mesure la dissymétrie de réflexion de l'écoulement (miroir)**

Invariants non visqueux

- Conservation de l'**hélicité**

$$H \equiv \frac{1}{2}\int_V \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\,dv$$

- On peut montrer que l'on a

$$\frac{dH}{dt} = -2\nu\int_V \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\times\boldsymbol{\omega}\,dv$$

- **Soit H conservée si** $\nu = 0$
- **Si** $\nu \neq 0$ **création ou destruction possible**