Description Statistique

thomas.gomez@upmc.fr

Introduction

- **Fluctuations** de vitesse et de pression en tout point de l'espace apparemment **aléatoires**
- L'écoulement peut être **statistiquement stationnaire**

$$\boxed{\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(x,t)}$$

Moyenne temporelle

thomas.gomez@upmc.fr

Introduction

- Décomposition du signal :

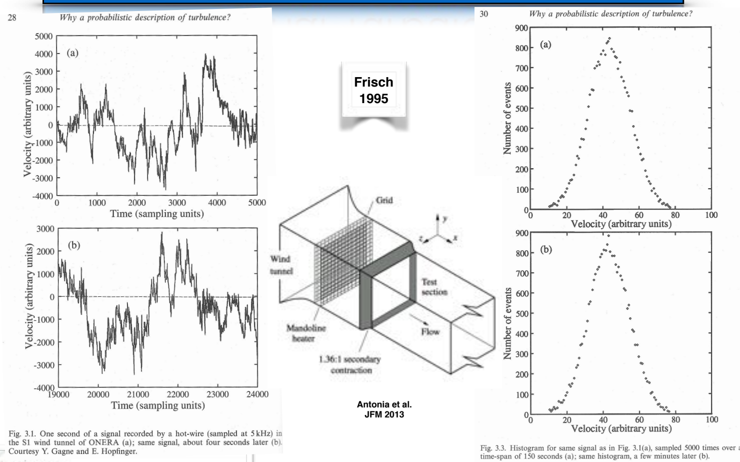
partie moyenne + partie fluctuante

$$\boxed{\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(x,t)}$$

Moyenne temporelle

thomas.gomez@upmc.fr

Signal Turbulent



thomas.gomez@upmc.fr

Moyenne d'ensemble

- $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ Fonction aléatoire au point $\mathbf{x}$ et au temps t.
- Pour chaque **réalisation,** on mesure $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ en tout point et à tout temps. La **même expérience répétée** va donner des valeurs différentes.
- On suppose le nombre de répétitions très grand alors la **distribution** de $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ tend vers une forme donnée déterminée par les données du problèmes.
- **Moyenne d'ensemble** (plus de stationnarité stat.)

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \overline{\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}$$

Ergodicité

- Si $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ est une fonction aléatoire stationnaire en temps la théorème **d'ergodicité** nous dit que *sous certaines conditions*, on a

équivalence entre la moyenne d'ensemble et la moyenne en temps

Homogénéité

- Si $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ est une fonction aléatoire.
- Les **moments statistiques** d'ordre supérieur ou égal à 2 sont invariants par toute **translation d'espace**.
- Exemples du tenseur de correlation des vitesses :
  - Ecoulement homogène en $\mathbf{x}$

$$\boxed{R_{ij} \equiv \overline{u_i(x,y,z)u_j(x+r_1,y+r_2,z+r_3)} = R_{ij}(y,z,\mathbf{r})}$$

  - **Turbulence homogène**

$$\boxed{R_{ij} \equiv \overline{u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})} = R_{ij}(\mathbf{r})}$$

Turbulence pleinement isotrope

- Si $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ est une fonction aléatoire statistiquement stationnaire par rapport aux coordonnées d'espace.
- Les moments statistiques d'ordre supérieur ou égal à 2 sont invariants par toute **rotation du référentiel**.
- Exemple du tenseur de correlation des vitesses :

$$\boxed{R_{ij} \equiv \overline{u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}+\mathbf{r})} = R_{ij}(|\mathbf{r}|)}$$

- Si **THI sans symétrie** de reflexion alors R_{ij} a une partie antisymétrique - Skew-Isotropy

Moyenne statistique

- Soit N quantités $\phi_i(\mathbf{x},t), (i=1,N)$ obtenues au cours de **p** réalisations **indépendantes**.
- On définit la valeur moyenne $\bar{\phi}_i$ obtenue par une **moyenne d'ensemble**

$$\boxed{\bar{\phi}_i(\mathbf{x},t) \equiv \lim_{p\longrightarrow+\infty} \frac{1}{p}\left(\sum_{k=1,p} \phi_i^{(k)}(\mathbf{x},t)\right)}$$

- La **variance des fluctuations** s'écrit

$$\boxed{\overline{\phi_i'\phi_i'}(\mathbf{x},t) = \lim_{p\longrightarrow+\infty} \frac{1}{p}\left(\sum_{k=1,p} (\phi_i^{(k)}(\mathbf{x},t)-\bar{\phi}_i(\mathbf{x},t))(\phi_i^{(k)}(\mathbf{x},t)-\bar{\phi}_i(\mathbf{x},t))\right)}$$

Moyenne statistique

- **Variable centrée**

$$\boxed{\phi_i'(\mathbf{x},t) \equiv (\phi_i(\mathbf{x},t) - \bar{\phi}_i(\mathbf{x},t))}$$

- On définit la **corrélation en 2 points et 2 temps**

$$\begin{aligned}
\overline{\phi_i'\phi_i'}(\mathbf{x},\mathbf{y},t,t') &\equiv \overline{\phi_i'(\mathbf{x},t)\phi_i'(\mathbf{y},t')} \\
&= \overline{\phi_i'(\mathbf{x},t)\phi_i'(\mathbf{x}+\mathbf{r},t+\tau)} \\
&= \overline{\phi_i'\phi_i'}(\mathbf{x},\mathbf{r},t,\tau)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{p\longrightarrow+\infty} \frac{1}{p}\left(\sum_{k=1,p} (\phi_i^{(k)}(\mathbf{x},t)-\bar{\phi}_i(\mathbf{x},t))(\phi_i^{(k)}(\mathbf{y},t')-\bar{\phi}_i(\mathbf{y},t'))\right)$$

Tenseur des correlations en 2 points

- Tenseur des composantes de vitesse en 2 points et 1 temps pour les fluctuations de vitesse

$$\boxed{R_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{r},t) \equiv \overline{u_i'(\mathbf{x},t)u_j'(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)}\ .}$$

Décomposition de Reynolds

- **Champ total = partie moyenne + partie fluctuante**

$$\boxed{\phi(\mathbf{x},t) = \bar{\phi}(\mathbf{x},t) + \phi'(\mathbf{x},t)}$$

- **Axiomes de Reynolds**
  - $\boxed{\bar{1} = 1}$
  - **Linéarité** $\boxed{\overline{\phi_1+\phi_2} = \bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2}$
  - **Commutativité** $\boxed{\overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_k}}$ $(k=1,3)$, $\boxed{\overline{\frac{\partial \phi}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t}}$
  - Par construction $\boxed{\overline{\phi'} = 0} \Longleftrightarrow \boxed{\bar{\bar{\phi}} = \bar{\phi}}$

$$\boxed{\overline{\bar{\phi}\psi} = \bar{\phi}\bar{\psi}}$$

Equations de champ moyen

- **Conservation de la masse**

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0}$$

- **Conservation de la quantité de mouvement**

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \bar{f}_i \quad (i=1,3)}$$

Tenseur de Reynolds

- **Moment d'ordre 2** des fluctuations de vitesse

Tenseur de Reynolds

$$\boxed{\overline{u_i u_j}(\mathbf{x},t) = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j}(\mathbf{x},t) + \underbrace{\overline{u'_i u'_j}(\mathbf{x},t)}_{R_{ij}(\mathbf{x},t)} = \bar{u}_i \bar{u}_j(\mathbf{x},t) + R_{ij}(\mathbf{x},t)}$$

- Conservation de la **quantité de mouvement**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \bar{f}_i - \frac{\partial}{\partial x_j} R_{ij} \quad (i=1,3)}$$

Rétro-action des fluctuations turbulentes sur le champ moyen de vitesse

Energie cinétique

- **Energie cinétique du champ moyen** de vitesse

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\bar{u}_i \bar{u}_i}$$

- **Equation de conservation** de l'énergie cinétique

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}K + \frac{\partial}{\partial x_j}(K\bar{u}_j) = \quad & -\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{p}\bar{u}_i) + \nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_k \partial x_k} - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \bar{u}_i \bar{f}_i \\ & -\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i R_{ij}) + R_{ij}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (i=1,3)\end{aligned}}$$

Energie cinétique du champ moyen

- Equation de conservation de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}K + \frac{\partial}{\partial x_j}(K\bar{u}_j)}_{I} = \quad & -\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{p}\bar{u}_i)}_{II} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_k \partial x_k}}_{III} - \underbrace{\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{IV} + \underbrace{\bar{u}_i \bar{f}_i}_{V} \\ & -\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i R_{ij})}_{VI} + \underbrace{R_{ij}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{VII} \quad (i=1,3)\end{aligned}$$

- **I advection**
- **II diffusion spatiale induit par la pression**
- **III Diffusion spatiale induit par la viscosité**
- **IV Dissipation par effet Joule**
- **V Puissance des forces extérieures**
- **VI Flux spatial turbulent de K**
- **VII Transfer d'énergie entre le champ moyen et le champ fluctuant**

Equations du champ fluctuant

- **Conservation de la masse**

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$$

- Equation pour les **fluctuations de vitesse**

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i'\bar{u}_j+\bar{u}_i u_j'+u_i'u_j'-R_{ij}) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k\partial x_k}+f_i' \quad (i=1,3)$$

Equation pour le Tenseur de Reynolds

- **Tenseur des déformations** des fluctuations

$$S_{ij}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)$$

- Equation de conservation du **tenseur de Reynolds**

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R_{ij}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_k R_{ij}) = &-\left(R_{jk}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}+R_{ik}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'u_k'}\\ &-\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p'u_j'}+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{p'u_i'}\right)+2\overline{p'S_{ij}'}\\ &+\overline{f_i'u_j'}+\overline{f_j'u_i'}+2\nu\left(\overline{u_j'\frac{\partial}{\partial x_k}S_{ik}'}+\overline{u_i'\frac{\partial}{\partial x_k}S_{jk}'}\right)\end{aligned}$$

Equation pour le Tenseur de Reynolds

- Equation du **tenseur de Reynolds**

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}R_{ij}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_k R_{ij})}_{I} = &\underbrace{-\left(R_{jk}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}+R_{ik}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}\right)}_{II}\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'u_k'}}_{III}\\ &\underbrace{-\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p'u_j'}+\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{p'u_i'}\right)}_{IV}+\underbrace{2\overline{p'S_{ij}'}}_{V}\\ &+\underbrace{\overline{f_i'u_j'}+\overline{f_j'u_i'}}_{VI}+\underbrace{2\nu\left(\overline{u_j'\frac{\partial}{\partial x_k}S_{ik}'}+\overline{u_i'\frac{\partial}{\partial x_k}S_{jk}'}\right)}_{VII}\end{aligned}$$

- **I advection**
- **II production/destruction par transferts entre u' et û**
- **III Diffusion turbulente**
- **IV Diffusion spatiale par la pression**
- **V production/destruction par p'**
- **VI travail des forces externes**
- **VII dissipation par la viscosité moléculaire**

Energie cinétique des fluctuations turbulentes

- **Energie cinétique des fluctuations**

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'} = \frac{1}{2}R_{ii}$$

- Equation de conservation de l'**énergie cinétique** des **fluctuations turbulentes**

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}+\frac{\partial}{\partial x_l}(\bar{u}_l\mathcal{K}) = &-R_{il}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_l}\overline{u_i'u_i'u_l'}-\varepsilon+\overline{f_i'u_i'}\\ &-\frac{\partial}{\partial x_l}\overline{p'u_l'}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_l}\mathcal{K}\end{aligned}$$

Energie cinétique des fluctuations turbulentes

Interprétation physique des termes

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}+\frac{\partial}{\partial x_l}(\bar{u}_l\mathcal{K})}_{I}=\underbrace{-R_{il}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l}}_{II}-\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_l}\overline{u_i'u_i'u_l'}}_{III}-\underbrace{\varepsilon}_{IV}+\underbrace{\overline{f_i'u_i'}}_{V}$$

$$-\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l}\overline{p'u_l'}}_{VI}+\underbrace{\nu\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_l}\mathcal{K}}_{VII}$$

- **I Advection par le champ moyen de vitesse**
- **II Production par interaction avec le champ moyen**
- **III Diffusion turbulente**
- **IV Taux de dissipation de l'énergie cinétique des fluctuations turbulentes**
- **V Travail des forces extérieures**
- **VI Diffusion spatiale par p'**
- **VII Diffusion spatiale induite par action de la viscosité moléculaire**

$$\boxed{\varepsilon \equiv \nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}}}$$

Dynamique du scalaire passif

Equation d'advection diffusion

Diffusivité

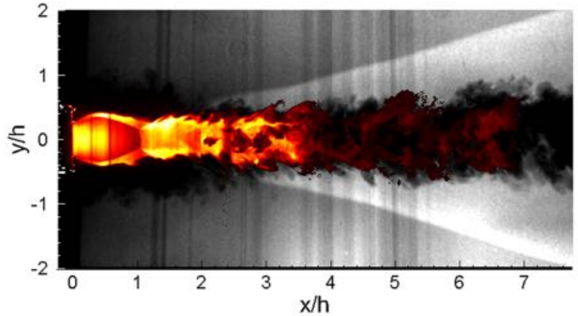
$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t}+\frac{\partial \theta u_j}{\partial x_j}=\boxed{\kappa}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_k\partial x_k}}$$

Mixing of a passive substance in a turbulent flow
From http://climatesciences.jpl.nasa.gov

Ecoulement atmosphérique 3D

Dynamique du scalaire passif

Multi-physique



Fuel Jet
Laminaire/Turbulent
Compressible
Combustion

http://research.ae.utexas.edu/FloImLab/hypermixing.php

Dynamique du scalaire passif

Décomposition de Reynolds

- **Champ moyen**

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{\theta u_j}}{\partial x_j}=\kappa\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x_k\partial x_k}}$$

$$\boxed{\theta=\bar{\theta}+\theta'}$$

- **Champ fluctuant**

$$\boxed{\frac{\partial \theta'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\theta'\bar{u}_j+\bar{\theta}u_j'+\theta'u_j'-\overline{\theta'u_j'})=\kappa\frac{\partial^2\theta'}{\partial x_k\partial x_k}}$$

Dynamique du scalaire passif

- La variance scalaire

$$\mathcal{K}_\theta \equiv \frac{1}{2}\overline{\theta'\theta'}$$

- Dynamique de la variance scalaire

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}_\theta + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_k \mathcal{K}_\theta) = -2\overline{u'_k\theta'}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u'_k\theta'\theta'} + \kappa \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\mathcal{K}_\theta - \varepsilon_\theta$$

Dynamique du scalaire passif

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K}_\theta + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_k \mathcal{K}_\theta)}_{I} = -\underbrace{2\overline{u'_k\theta'}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k}}_{II} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u'_k\theta'\theta'}}_{III} + \underbrace{\kappa \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\mathcal{K}_\theta}_{IV} - \underbrace{\varepsilon_\theta}_{V}$$

- **I Advection par le champ de vitesse moyen**
- **II Production par le gradient du champ moyen**
- **III Turbulent diffusion**
- **IV Diffusion par la diffusivité moléculaire**
- **V Destruction par effet de la diffusion moléculaire.**

$$\varepsilon_\theta = 2\kappa \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_k}\frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}$$