Description Spectrale

thomas.gomez@upmc.fr

97

Description spectrale

☑ **Transformée de Fourier**

☑ **Inverse**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{\imath x k} dk$$

☑ **Direct**

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\imath x k} dx$$

☑ k est le **nombre d'onde** et $i^2 = -1$

thomas.gomez@upmc.fr

98

Description spectrale

☑ **Tenseur des corrélations de vitesse**

☑ Espace Physique

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \equiv \overline{u_i'(\mathbf{x}, t) u_j'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)}$$

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \Phi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) e^{\imath \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

☑ Espace spectral : Tenseur de corrélation spectrale

$$\Phi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dr_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dr_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dr_3 R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) e^{-\imath \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

thomas.gomez@upmc.fr

99

Description spectrale

☑ **Tenseur de Reynolds**

☑ Espace Physique

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, t) \equiv \overline{u_i'(\mathbf{x}, t) u_j'(\mathbf{x}, t)}$$

$$R_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \Phi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$$

☑ Densité spectrale d'énergie cinétique : « Spectre d'énergie »

$$\mathcal{K} \equiv \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}(t) = \frac{1}{2} R_{ii}(t) = \int_0^{+\infty} E(k, t) dk$$

nombre d'onde $k = |\mathbf{k}|$

thomas.gomez@upmc.fr

100

Slide 1 (92)

Description spectrale

☑ Simplifications

    ☑ Homogénéité par rapport aux variables d'espace (x,y,z):

> **Toutes les propriétés statistiques sont invariantes par toute translation arbitraire en espace.**

    ☑ En pratique

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \equiv \overline{u_i'(\mathbf{x}, t) u_j'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} = R_{ij}(\mathbf{r}, t)$$

101

Slide 2 (93)

Description spectrale

☑ Simplifications

    ☑ Isotropie :

> **Les propriétés statistiques sont identiques dans toutes les directions, i.e. sont statistiquement invariantes par toute rotation du référentiel de référence**

    ☑ Symétrie miroir : ou skew-isotropy

> **Les propriétés statistiques restent inchangé par toute réflexion miroir, i.e. changement d'un référentiel direct (règle de la main droite) à un indirect.**

102

Slide 3 (94)

Description spectrale

☑ Spectre d'énergie cinétique en TH

$$E(k, t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\mathbf{k}, t) \delta(|\mathbf{k}| - k)$$

> **Supposé indépendant de $\mathbf{x}$ pour simplifier l'expression**
> *cf. Turbulence Homogène*

103

Slide 4 (95)

Description spectrale

☑ Equations de la dynamique   **Terme NON Linéaire**

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_j + \nu k^2 \hat{u}_j = -\imath P_{jlm}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_l(\mathbf{p}, t) \hat{u}_m(\mathbf{q}, t) d\mathbf{p}$$

Interactions triadiques

    ☑ Projecteur

$$P_{ijl}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left(P_{ij}(\mathbf{k}) k_l + P_{il}(\mathbf{k}) k_j \right), \quad P_{ij}(\mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right)$$

> **Opérateur de projection perpendiculaire à $\mathbf{k}$**

$$\underline{P}(\mathbf{k}) \mathbf{v} \perp \mathbf{k}, \forall \mathbf{v}$$

104

Slide 105

Description spectrale

☑ **Interactions triadiques**

Classification de Waleffe 1992

Vers les petites échelles

Mixte: petites et grandes échelles

F-type   R-type

Slide 106

Description spectrale

☑ **Equation de Lin**

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k},t)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}) = \overline{\hat{u}_i^*(\mathbf{p},t)\hat{u}_j(\mathbf{k},t)}$$

Terme NON Linéaire

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}E(k,t) + 2\nu k^2 E(k,t) = \mathcal{T}(k,t)$$

☑ **Terme des transferts non linéaires**

$$\mathcal{T}(k,t) = \pi k^2 \overline{(\hat{u}_i^*(k,t)s_i(k,t) + \hat{u}_i(k,t)s_i^*(k,t))}$$

☑ **Avec**

$$s_j(\mathbf{k},t) = -\imath P_{jlm}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_l(\mathbf{p},t)\hat{u}_m(\mathbf{q},t)d\mathbf{p}$$

Slide 107

Description spectrale

☑ **Equation bilan : Intégration de Lin**

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_0^{+\infty} E(k,t)dk}_{\mathcal{K}(t)} + 2\nu \underbrace{\int_0^{+\infty} k^2 E(k,t)dk}_{\varepsilon(t)} = \int_0^{+\infty} \mathcal{T}(k,t)dk$$

Energie cinétique   **Dissipation**

☑ **Transferts non linéaires conservatifs**

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{T}(k,t)dk = 0$$

Slide 108

Description spectrale

○ Transferts à travers les échelles : THI

Re = 70   Re = 7.10³

Description spectrale

Spectre d'énergie cinétique turbulence en THI

thomas.gomez@upmc.fr
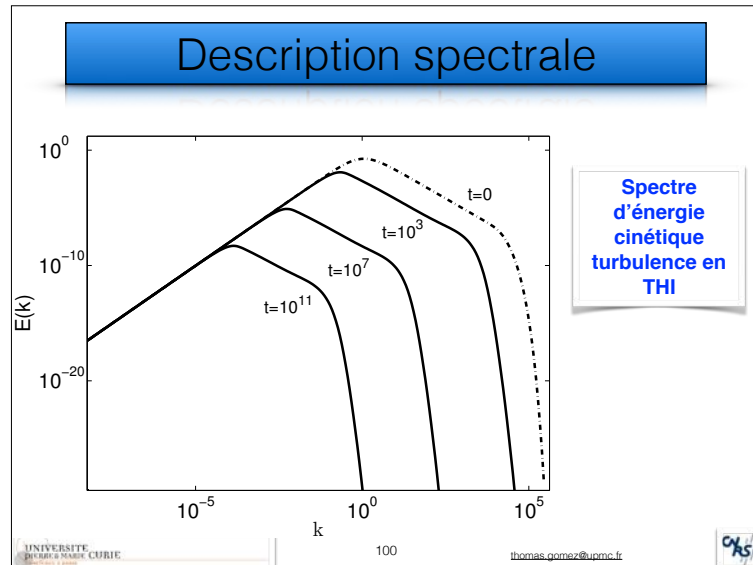
109

Description Phénoménologique

☑ **Scénario de la « cascade d'énergie » et de la coupure visqueuse**

☑ **Hypothèses de Kolmogorov**

☑ **Nombre de Reynolds**

☑ **Echelles caractéristiques**

L.F. Richardson

thomas.gomez@upmc.fr

110

Description Phénoménologique

☑ **Nombres de Reynolds**

  ☑ **Intégral**

  ☑ **à une échelle l**

☑ **Echelles caractéristiques**

Pente en $k^{-5/3}$

  ☑ **Temps de retournement**

  ☑ **Transfert**

  ☑ **Energie cinétique**

Spectre de Kolmogorov

thomas.gomez@upmc.fr

111

Description Phénoménologique

☑ **Théorie de Kolmogorov : Hypothèses**

- **Hypothèse 1**: Aux petites échelles $l \ll L_{11,1}$, les moments statistiques en deux points séparés par une distance r et en deux temps séparés par un délai τ peuvent être exprimés au moyen des seules quantités $\varepsilon, \nu, r, \tau$.

- **Hypothèse 2**: Aux petites échelles $\eta \ll l \ll L_{11,1}$, les moments statistiques en deux points séparés par une distance r et en deux temps séparés par un délai τ peuvent être exprimés au moyen des seules quantités ε, r, τ. La disparition de ν indique que ces échelles ne sont que très peu directement affectées par la dissipation par effet Joule, et ne sont soumises qu'aux effets non-linéaires représentés par ε.

$$\implies E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$$

thomas.gomez@upmc.fr

112

Slide 1 (113)

Description Phénoménologique

☑ **Théorie de Kolmogorov :** **Grandeurs caractéristiques**

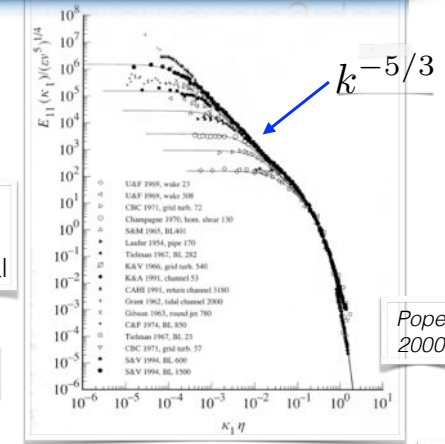|	Echelle intégrale	Echelle Taylor	Echelle Kolmogorov
Espace	$L_u = \dfrac{\mathcal{K}^{3/2}}{\varepsilon}$	$\lambda_g = \sqrt{\dfrac{10\mathcal{K}\nu}{\varepsilon}}$	$\eta = \left(\dfrac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$
Temps	$\tau_u = \dfrac{\mathcal{K}}{\varepsilon}$	$\tau_\lambda = \sqrt{\dfrac{15\nu}{\varepsilon}}$	$\tau_\eta = \sqrt{\dfrac{\nu}{\varepsilon}}$
Nombre Reynolds	$Re_L = \dfrac{\mathcal{K}^2}{\nu\varepsilon}$	$Re_\lambda = \sqrt{\dfrac{20}{3}\dfrac{\mathcal{K}}{\sqrt{\nu\varepsilon}}}$	$Re_\eta = 1$

113

Slide 2 (114)

Description Phénoménologique

$k^{-5/3}$

Zone inertielle

- Couches limites
- Turbulence de grille
- Ecoulements en canal

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$$

Pope 2000

114

Slide 3 (115)

Description Phénoménologique

**Nombre de degré
de liberté excités par la turbulence**

$$N \sim \left(\frac{\ell_0}{\ell_n u}\right)^3 \sim Re^{9/4}$$

115

Slide 4 (116)

Description Phénoménologique

☑ **Cas du scalaire passif**

$$\mathcal{K}_\theta(t) = \int_0^{+\infty} E_\theta(\xi,t)d\xi, \quad \varepsilon_\theta(t) = 2\kappa \int_0^{+\infty} \xi^2 E_\theta(\xi,t)d\xi$$
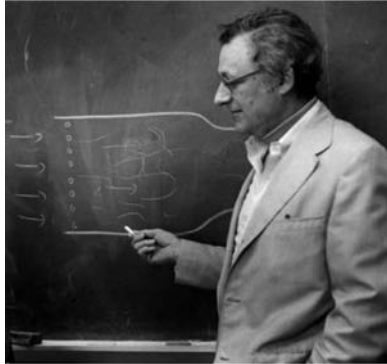
Spectre de Kolmogorov $E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$

☑ **Analyse dimensionelle :** **Forme du spectre de variance**

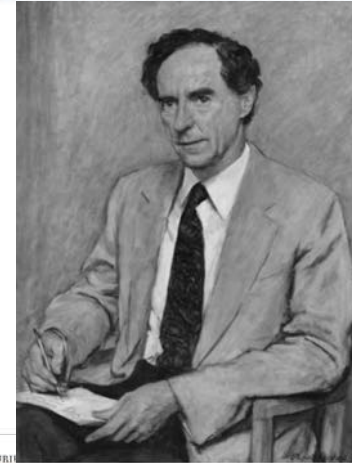$$E_\theta(k) = c_\beta \varepsilon_\theta \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}$$

116

Slide 117

Stan Corrsin

108

thomas.gomez@upmc.fr

117

Slide 118

Portrait of George Batchelor by Rupert Shephard 1984; this portrait hangs in DAMTP, Cambridge, the Department founded under Batchelor's leader-ship in 1959

thomas.gomez@upmc.fr

118

Slide 119

George Batchelor, having been recently elected FRS, in his office at the old Cavendish Laboratory, October 1956

110

thomas.gomez@upmc.fr

119

Slide 120
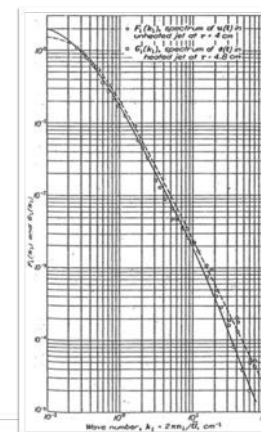
One-dimensional power spectra of velocity (circles) and temperature (squares) measured in a jet near the peak shear off-center position, adapted from Corrsin and Uberoi (1951)

111

thomas.gomez@upmc.fr

120

Description Phénoménologique

☑ **Hypothèses de similitude**

1. **Cas général** $0 < Pr < \infty$:

    (a) On doit utiliser $\varepsilon_T, \kappa, \tau_\eta$ pour les échelles plus petites que $\sqrt{\kappa\tau_\eta}$ dans le cas général, pour les échelles plus petites que η pour $Pr \gg 1$ et pour les échelles plus petites que η_{CO} si $Pr \ll 1$. Il s'agit ici d'échelles pour lesquelles les fluctuations de vitesse et les fluctuations de scalaire sont dominées par les effets dissipatifs et diffusifs.

    (b) On doit utiliser $\varepsilon_T, \varepsilon$ pour les échelles plus grandes que η et η_{CO}. Il s'agit ici de petites échelles peu sensibles aux effets diffusifs, qui forment, à grand nombre de Reynolds, une zone inertielle dominée par le phénomène de cascade.

2. **Cas** $Pr \leq 1$. Pour les échelles plus grandes que $\sqrt{\kappa\tau_\eta}$, on doit utiliser $\varepsilon_T, \kappa, \varepsilon$. À ces échelles, le champ de scalaire est sensible aux effets diffusifs, alors que les fluctuations de vitesse sont dominés par le phénomène de cascade.

3. **Cas** $Pr \geq 1$:

    (a) Pour les échelles plus grandes que $\sqrt{\kappa\tau_\eta}$, on doit utiliser $\varepsilon_T, \varepsilon, \nu$.

    (b) Pour les échelles plus grandes que $\sqrt{\kappa\tau_\eta}$ mais plus petites que η, on doit utiliser ε_T, τ_η. Ici, les fluctuations de scalaire ne sont pas sensibles aux effets diffusifs et sont dominées par la cascade inertielle, alors que les fluctuations de vitesse sont dominées par les effets dissipatifs.

Description Phénoménologique

☑ **Grandeurs caractéristiques**

Théorie	Kolmogorov	Batchelor	Obukhov–Corrsin
Hyp. similitude	1 (b), 3(a), 3(b)	1(a), 1(b)	1(b), 2
Variables	$\varepsilon_T, \varepsilon, \nu$	$\varepsilon_T, \tau_\eta, \kappa$	$\varepsilon_T, \varepsilon, \kappa$
Longueur	η	$\eta_B = \sqrt{\kappa\tau_\eta} = \eta Pr^{-1/2}$	$\eta_{OC} = (\kappa^3/\varepsilon)^{1/4} = \eta Pr^{-3/4}$
Temps	τ_η	$\tau_B = \tau_\eta$	$\tau_{OC} = \sqrt{\kappa/\varepsilon} = \eta Pr^{-1/2}$
Scalaire	$\Sigma_\eta = \sqrt{\varepsilon_T\tau_\eta}$	$\Sigma_B = \Sigma_\eta$	$\Sigma_{OC} = \varepsilon_T\sqrt{\kappa/\varepsilon} = \Sigma_\eta Pr^{-1/4}$

Description Phénoménologique

☑ **Cas du scalaire passif**

Inertio-convective

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \qquad E_\theta(k) = c_\beta\varepsilon_\theta\varepsilon^{-1/3}k^{-5/3}$$

Description Phénoménologique
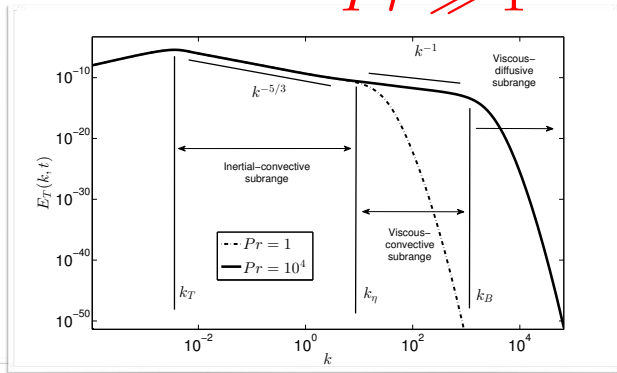
☑ **Cas du scalaire passif**

Zones ne fonction du nombre de Prandtl

Case	Range	Lengthscales
$Pr \ll 1$	inertio-convective	$L_T^{-1} \ll k \ll 1/\eta_{OC}$
	inertio-diffusive	$1/\eta_{OC} \ll k \ll 1/\eta$
	visco-diffusive	$1/\eta \ll k$
$Pr \gg 1$	inertio-convective	$L_T^{-1} \ll k \ll 1/\eta$
	visco-convective	$1/\eta \ll k \ll 1/\eta_B$
	visco-diffusive	$1/\eta_B \ll k$

125   126