Modélisation Statistique de la Turbulence

Problème de Fermeture

- **Moment d'ordre 2** des fluctuations de vitesse

$$\overline{u_i u_j}(\mathbf{x},t) = \overline{u}_i\overline{u}_j(\mathbf{x},t) + \boxed{\underbrace{\overline{u'_i u'_j}(\mathbf{x},t)}_{R_{ij}(\mathbf{x},t)}} = \overline{u}_i\overline{u}_j(\mathbf{x},t) + R_{ij}(\mathbf{x},t)$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i\bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \bar{f}_i - \boxed{\frac{\partial}{\partial x_j}R_{ij}} \quad (i=1,3)$$

???

Equation pour le Tenseur de Reynolds

- **Par ordre croissant de complexité**
  - Modèle à zéro équation
  - Modèle à une équation
  - Modèle à 2 équations

Modèles du 1er ordre

  - Algebric Stress Models **ASM**
  - Reynolds Stress Model **RSM**

Modèles du 2nd ordre

Modèles du premier Ordre

- Construits par analogie avec les écoulements laminaires
- Aussi appelés **EVM** pour **Eddy Viscosity Models**
  - **Viscosité Turbulente : propriété de l'écoulement**
- **Hypothèse de Boussinesq**
  - **Laminaire :** $$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$
  - **Turbulent :** $$\tau^t_{ij} = \rho\overline{u_i u_j} = \mu_t\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\rho k$$

Viscosité Turbulente

- **Tenseur de Reynolds :**

$$\tau_{ij}^t = \rho\overline{u_i u_j} = \mu_t\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\rho k$$

Viscosité turbulente

Pression turbulente

Energie cinétique des fluctuations turbulents

Modèle à zéro équation

- **Pas d'EDP** décrivant le transport des contraintes turbulentes
- Une simple **relation algébrique** est utilisée pour fermer les équations
- Sur la base de la théorie de la **longueur de mélange** = longueur caractéristique d'interaction des tourbillons
- L'**analyse dimensionnelle** donne

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} \sim \ell u = \ell_m\left(\ell_m \frac{d\bar{u}}{dy}\right)$$

Exemple: Couche limite

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} \sim \ell u = \ell_m\left(\ell_m \frac{d\bar{u}}{dy}\right)$$

Couche limite

$$\ell_m = \kappa y \text{ pour } y < \delta$$

$$\ell_m = \delta \text{ pour } y \geq \delta$$

- On réinjecte ensuite la viscosité turbulente dans

$$\tau_{ij}^t = \rho\overline{u_i u_j} = \mu_t\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\rho k$$

- Que l'on réinjecte dans les équations **RANS**

Modèle à UNE équation

- On dérive une **EDP pour l'énergie cinétique** des fluctuations turbulentes

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'} = \frac{1}{2}R_{ii}$$

- La viscosité turbulente est obtenue à partir de $\mathcal{K}$

$$\mu_t = C_\mu\sqrt{\mathcal{K}}\ell_m$$

Equation de transport pour $\mathcal{K}$

Modèle

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K} + \frac{\partial}{\partial x_l}(\bar{u}_l \mathcal{K}) = -R_{il}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_l}\overline{u'_i u'_i u'_l} - \varepsilon - \frac{\partial}{\partial x_l}\overline{p' u'_l} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\mathcal{K}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K} + \frac{\partial}{\partial x_l}(\bar{u}_l \mathcal{K}) = \frac{\partial}{\partial x_l}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_l}\right] + P_k - \varepsilon$$

$$P_k = \overline{u_i u_l}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} = \nu_t\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l}$$

$$\varepsilon \equiv \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l}\frac{\partial u'_i}{\partial x_l}} \sim \frac{\mathcal{K}^{3/2}}{l} \Longrightarrow \varepsilon = C_d \frac{\mathcal{K}^{3/2}}{\ell_m}$$

Modèle

Modèle à DEUX équations

- Une EDP pour l'**énergie cinétique** des fluctuations turbulentes

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2}R_{ii}$$

- Une EDP pour le **taux de dissipation** de la turbulence ε
- **Viscosité turbulente**

$$\mu_t \sim ul = \mathcal{K}^{1/2}\left(\frac{\mathcal{K}^{3/2}}{\varepsilon}\right) \Longrightarrow \mu_t = C_\mu \frac{\mathcal{K}^2}{\varepsilon}$$

Modèle K-Epsilon

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{K} + \frac{\partial}{\partial x_l}(\bar{u}_l \mathcal{K}) = -R_{il}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_l}\overline{u'_i u'_i u'_l} - \varepsilon - \frac{\partial}{\partial x_l}\overline{p' u'_l} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l}\mathcal{K}$$

- Modélisation du terme de **production**

$$\mathcal{P} = -R_{il}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \approx 2\nu_t \bar{S}_{il}\bar{S}_{il} = C_\mu \frac{\mathcal{K}^2}{\varepsilon}\left|\underline{\underline{S}}\right|^2$$

- Modélisation par le concept de **viscosité turbulente**

$$-\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\overline{u'_i u'_i u'_l} + \overline{p' u'_l}\right) \approx \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_{\mathcal{K}}}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_l}\right)$$

Equations du Modèle K-Epsilon

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_j} = C_\mu \frac{\mathcal{K}^2}{\varepsilon}\left|\underline{\underline{S}}\right|^2 - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\frac{\nu_t}{\sigma_{\mathcal{K}}} + \nu\right)\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\varepsilon}{\mathcal{K}}\left(C_{\varepsilon_1}\mathcal{P} - C_{\varepsilon_2}\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right)$$

- **Lois de parois** : En proche paroi la **viscosité ne peut plus être négligée**
  - "Standard Wall Function " (Launder Spalding 1974)
  - "Enhanced"
  - ...
- **Modèles :** Bas Reynolds / Haut Reynolds

Equations du Modèle K-Omega

$$\boxed{\omega = \varepsilon / \mathcal{K}} \qquad \boxed{\nu_t = C_\mu \frac{\mathcal{K}}{\omega}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_j} = C_\mu \frac{\mathcal{K}}{\omega} |\underline{\underline{S}}|^2 - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu_t}{\sigma_{\mathcal{K}}} + \nu \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = C_\mu C_{\omega_1} |\underline{\underline{S}}|^2 - C_{\omega_2} \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\omega} + \nu \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right)$$

5 paramètres libres

Formulation générique des modèles à 2 équations

modèle $\mathcal{K} - \phi$ où $\phi = \mathcal{K}^l \varepsilon^m$

Analyse dimensionelle $\nu_t = C_\mu \mathcal{K}^{2+l/m} \phi^{-1/m}$

Formulation standard pour ϕ

5 inconnues

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\phi}{\mathcal{K}} (C_{\phi_1} \mathcal{P} - C_{\phi_2} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\phi} + \nu \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)$$

Formulation générique

Model		l	m
Chou (1945), Launder, ...	$\mathcal{K} - \varepsilon$	0	1
Kolmogorov (1942) , Saffman, Wilcox, Menter ...	$\mathcal{K} - \omega$	-1	1
Cousteix (1997), Aupoix ...	$\mathcal{K} - \varphi$	-1/2	1
Rotta (1951), Smith ...	$\mathcal{K} - l$	3/2	-1
Speziale (1990)	$\mathcal{K} - \tau$	1	-1
Zeierman (1986)	$\mathcal{K} - \mathcal{K}\tau$	2	-1
Saffman (1970), Launder, Spalding, Wilcox ...	$\mathcal{K} - \omega^2$	-2	2
Rotta (1968), Rodi, Spalding ...	$\mathcal{K} - \mathcal{K}l$	5/2	-1
Glushko (1971) ...	$\mathcal{K} - l^2$	3	-2

Modèles du second ordre

- **Principe :** utiliser les **équations de la dynamique** pour déterminer les **moments d'ordre 2 (Reynolds Stress),** plutôt que d'utiliser l'hypothèse de Boussinesq.
- Utile pour les **«écoulements anisotropes»**.
- **Exemples :**
  - **Algebraic Stress Model (ASM)**
  - **Reynolds Stress Model (RSM)**