Magnétohydrodynamique

4AE04- Approche optimale et couplage multiphysique

thomas.gomez@upmc.fr

Insitut Jean Le Rond d'Alembert, UPMC

January 24, 2014

Plan du cours

Partie 1: La magnétohydrodynamique

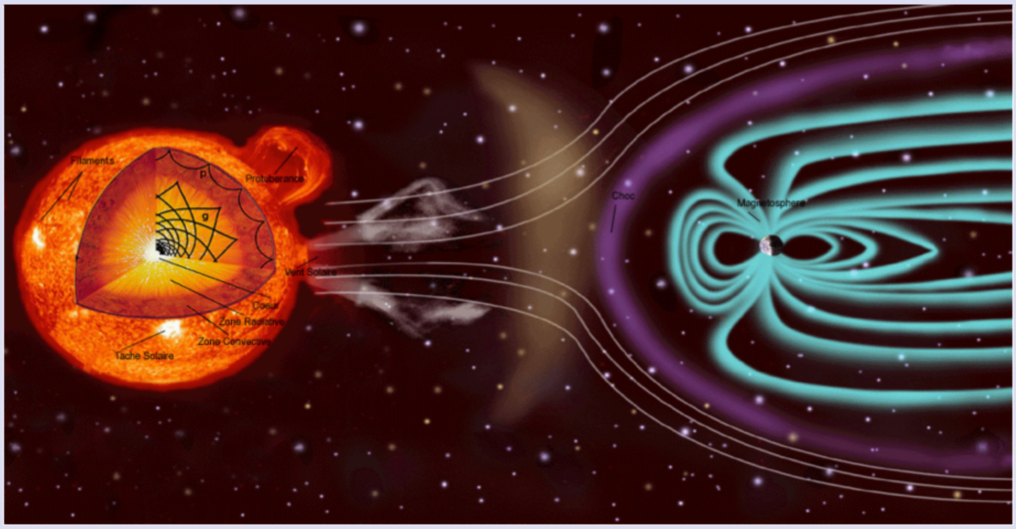
Introduction

La magnétohydrodynamique

1. Fluide conducteur : Equations Navier-Stokes + Maxwell
2. Hartmann 1937
   - Métaux liquides.
   - Influence d'un champ magnétique extérieur.
3. Alfvén 1950
   - Milieux interstellaires.
   - Ondes d'Alfvén.
4. Géophysique
   - Effet dynamo
   - Terrestre, soleil, galactique

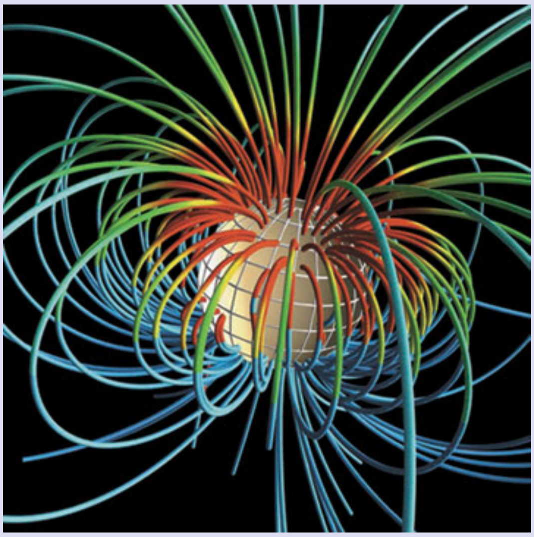
Principes fondamentaux

Ligne de champ magnétique et vent solaire



Principes fondamentaux

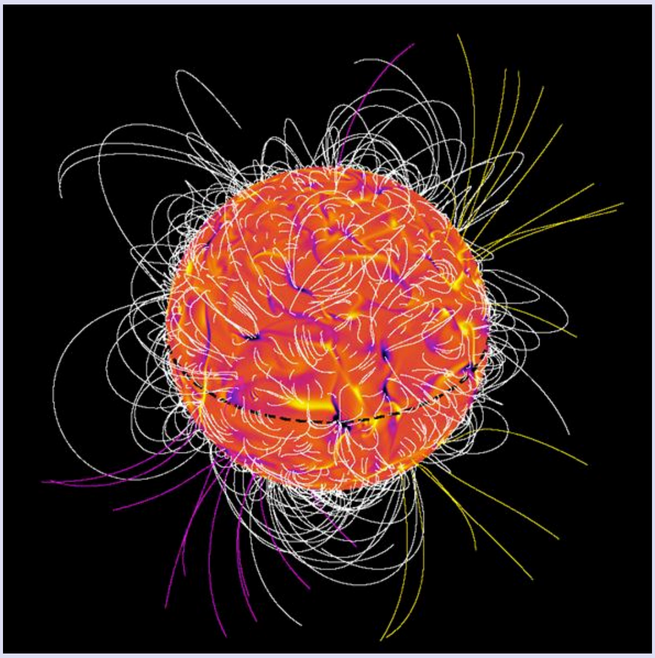
Ejection solaire



Simulation MHD

Principes fondamentaux

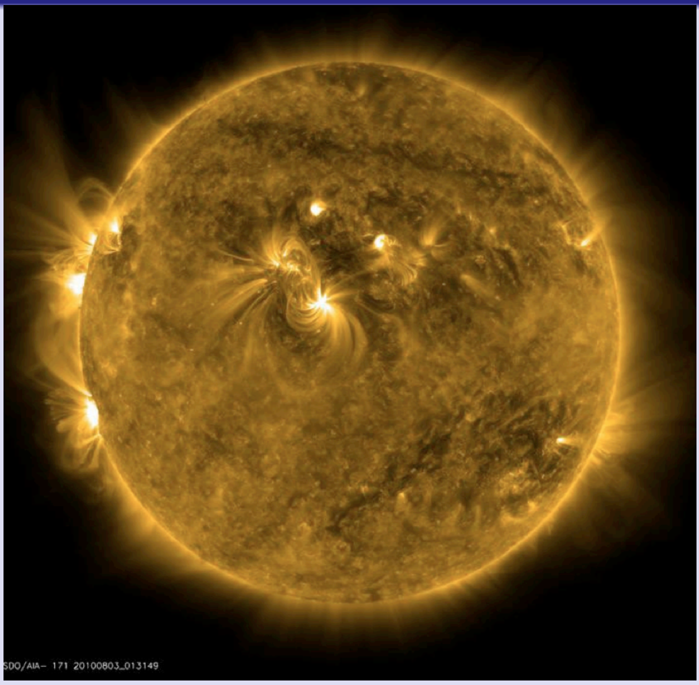
Ejection solaire



Dynamo Solaire

Principes fondamentaux

Ejection solaire



Dynamo Solaire

Introduction

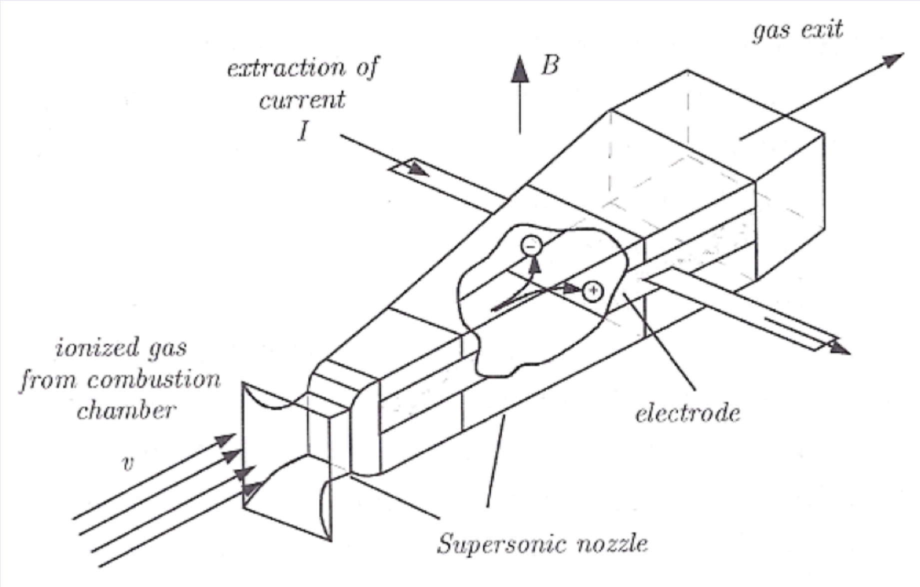
La magnétohydrodynamique

1. Sciences de l'ingénieur
   - Contrôle et optimisation par effet MHD
   - Génie des procédés
   - Fusion nucléaire

Principes fondamentaux

Principe du convertisseur de puissance

Energie électrique $\Longrightarrow$ Energie électrique

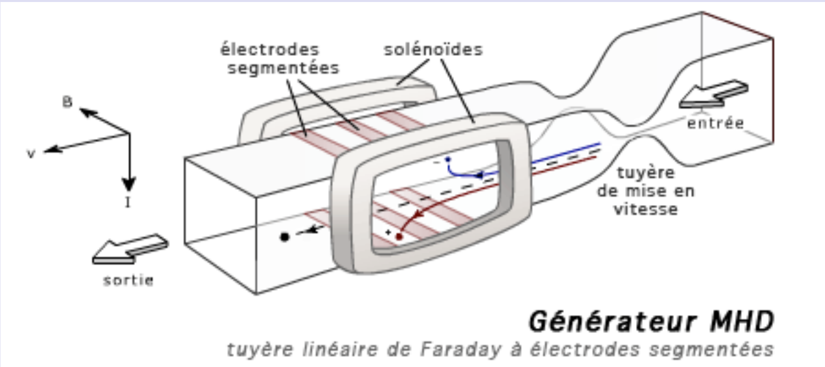


Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Historique
Exemples

Principes fondamentaux

Principe du convertisseur de puissance

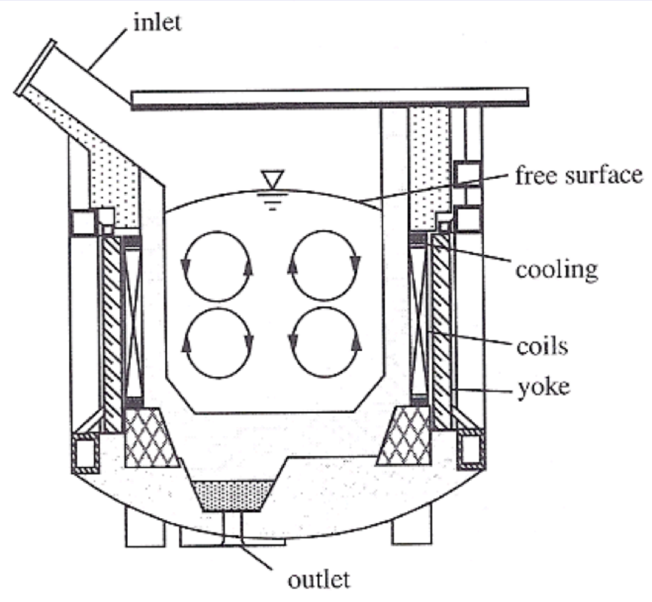
Energie électrique $\Longrightarrow$ Energie électrique



Principes fondamentaux

Melangeur

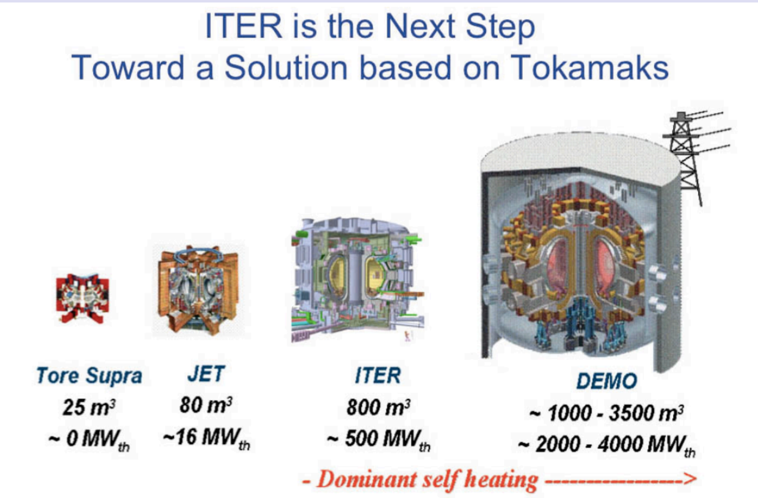
Noyaux ferrique et bobine



Principes fondamentaux

Tokamak

Fusion nucléaire



Introduction

Systèmes industriels

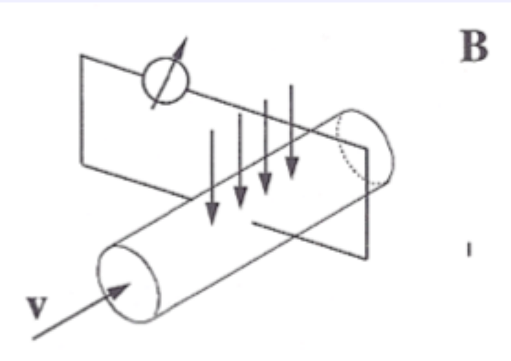
1. Pompes MHD (induction/conduction)
2. Mélangeurs MHD, champs fluctuants
3. Contrôle d'écoulement par propulseurs MHD
4. Soudure plasma
5. Four à induction
6. Générateur Plasma
7. Confinement du plasma dans Tokamak

Processus d'optimisation MHD

1. Transport MHD
   - croissance de cristaux
   - bain galvanique
   - homogénéisation
2. Mélange MHD
3. Electromagnétique
   - création de poudre métallique
   - moulage continue par dépôt de surface
4. Traitement de surface

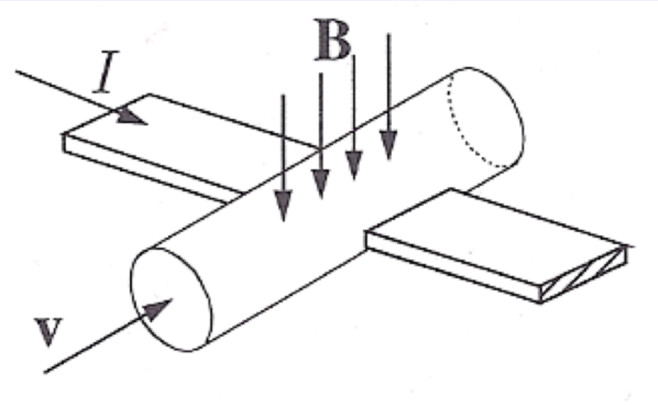
Exemple : Débimètre

Exemple: Débimètre MHD pour métaux liquides



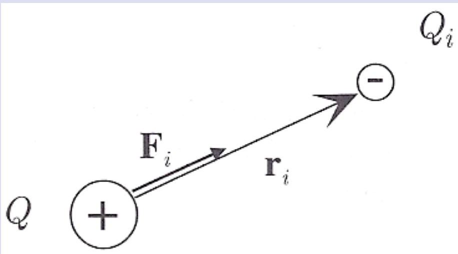
Exemple : Pompe à conduction

Exemple: Pompe à conduction



2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Force electrostatique



1. Loi de Coulomb

$$F_i = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{4\pi}\frac{Q \cdot Q_i}{r_i^3}\mathbf{r}_i$$

- ε permittivité du matériau : $\varepsilon_0 = 8.854.10^{-12} As/(Vm)$
- A : Ampère
- V : Volt
- C Coulomb $\Longleftrightarrow A.s$

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Force electrostatique

- Le champ électrique **E** est lié au nombre de charges qui le génère

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon}\sum_i \frac{1}{4\pi} Q_i r_i^{-3}\mathbf{r}_i$$

- La force electrostatique s'écrit alors

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$$

- La loi de Coulomb peut s'interpréter comme étant la force subit par la charge Q dans le champ électrique **E**.
- La dimension du champ électrique est : $[\mathbf{E}] = N/(As)$

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Electrodynamique
Electromagnétisme
Dynamique des fluides

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Force electrostatique

- Formulation intégrale

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{1}{4\pi} q r^{-3}\mathbf{r}dv}$$

q : densité volumique de charges.

thomas.gomez@upmc.fr MHD – 4AE04

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Le champ **E** dérive d'un potentiel

- Le travail de la force **F** quand on déplace la charge Q le long d'une trajectoire C fermée est nulle.
- Démonstration (Théorème de Stokes)

$$\frac{1}{Q}\int_C \underbrace{\mathbf{F}\cdot\mathbf{t}}_{\text{travail}}\; ds = \int_C \mathbf{E}\cdot\mathbf{t}ds = \int_A (\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{n}dA = 0$$

Cette relation étant vraie pour C arbitraire $\Longrightarrow$ **E** est irrotationel

$$\boxed{\nabla\times\mathbf{E} = 0}$$

- Il existe un potentiel ϕ tel que

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\Phi}$$

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Le champ **E** dérive d'un potentiel

- La différence de potentiel (ddp) U entre deux points de l'espace $\mathbf{x_1}$ et $\mathbf{x_2}$ s'écrit alors

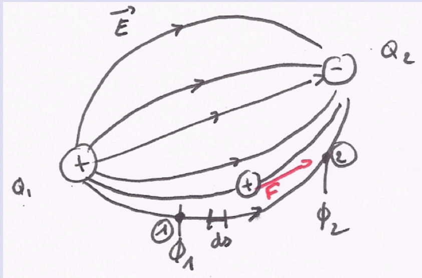
$$\boxed{U = \int_{\mathbf{x_1}}^{\mathbf{x_2}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{t}ds = \Phi_1 - \Phi_2}$$

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Densité de charge

- Les charges électriques sont à l'origine des champs électriques.
- On peut définir une relation
  entre densité de charge électrique q

  et champ électriques $\mathbf{E}$



$$\boxed{\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = q}$$

- C'est une conséquence directe de la relation

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \int_V \frac{1}{4\pi} q r^{-3} \mathbf{r} dv$$

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan

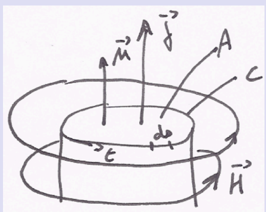
Electrodynamique
Electromagnétisme
Dynamique des fluides

Principes fondamentaux

2.1.b Electromagnétisme

- Les **champs magnétiques** ont historiquement d'abord été générés par les aimants permanents (matériaux ferromagnétiques).
- Puis par la production de courants

  électriques dans les conducteurs.



  Par exemple dans le voisinage
  d'un fil circulaire dans lequel circule un courant.
- **Loi d'Ampère :** L'intensité du champ magnétique intégrée le long d'un contour fermé est équivalent au flux de courant à travers la surface délimitée par le contour

$$\boxed{\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} ds = \int_A \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA}$$

thomas.gomez@upmc.fr MHD – 4AE04

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Loi d'Ampère locale

- Pour les processus à variation **lente** (très inférieure à la vitesse de la lumière $c \sim 2.9979.10^8 m.s^{-1}$)

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}}$$

  - $\mathbf{H}$ champ magnétique généré
  - $\mathbf{j}$ densité de courant avec $[\mathbf{j}] = A$.

- Démonstration : utilisation de la formule de Stokes

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} ds = \int_A (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dA$$

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Loi d'Ampère locale

- Pour les processus à variation **rapide**

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \underbrace{\frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t}}_{\text{courants de déplacement}}}$$

  - $\mathbf{H}$ champ magnétique généré
  - $\mathbf{j}$ densité de courant avec $[\mathbf{j}] = A$
  - $\mathbf{E}$ champ électrique avec $[\mathbf{E}] = V/m$.

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Conservation des charges

- En prenant la divergence de la loi d'Ampère locale

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t}$$

on obtient

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{j} = 0}$$

- Forme intégrale

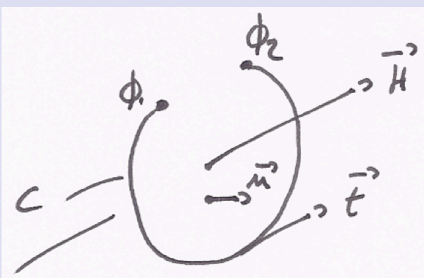
$$\boxed{\int_A \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dv = 0}$$

- Interprétation : Les charges ne s'accumulent pas.
- Le flux des courants électriques à travers une surface S fermée dans un volume V est nulle (Loi de Kirchhoff dans un circuit électrique)

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Loi de Faraday

- **Observation :** Création d'une DDP aux extrémités d'une boucle ouverte à travers laquelle varie le champ magnétique (déplacement du circuit $\Longleftrightarrow$ variation temporelle du champ magnétique)



- **Forme intégrale**

$$\boxed{\phi_1 - \phi_2 = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} ds = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dA\right]}$$

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Loi de Faraday

- **Forme intégrale**

$$\boxed{\phi_1 - \phi_2 = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} ds = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dA\right]}$$

- μ perméabilité magnétique, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} V.s(Am)^{-1}$ pour le vide.
- Pour beaucoup de matériaux $\mu \sim \mu_0$, sauf pour les matériaux ferritiques pour lesquels il y a un facteur $\sim 10^3$.
- **Loi de Lenz** : Le signe $\ominus$ signifie que la DDP induite impose aux courants de contrecarrer la variation de flux magnétique.

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Electrodynamique
Electromagnétisme
Dynamique des fluides

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Loi de Faraday

- **Forme différentielle**

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \mathbf{H})}$$

- μ perméabilité magnétique, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} V.s(Am)^{-1}$ pour le vide
- **Par convention** : On appelle induction magnétique le tenseur $\mathbf{B}$ d'ordre 1 tel que

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}}$$

thomas.gomez@upmc.fr MHD – 4AE04

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Loi de Faraday

- **Conséquence:**
  Les lignes de champs magnétique sont des courbes fermées.
- **démonstration :** On prend la divergence de la loi de Faraday

$$\boxed{\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot(\mu\mathbf{H}))}$$

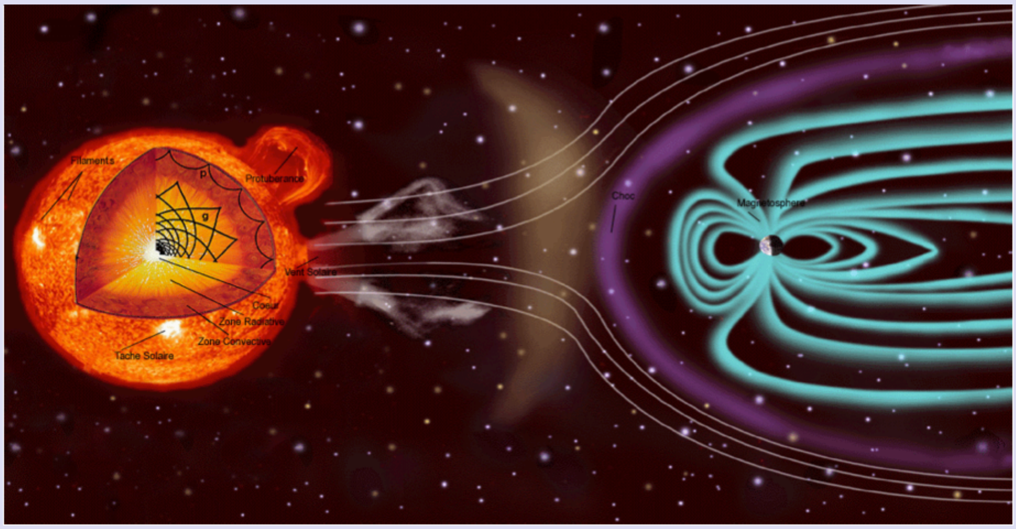
On obtient

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = constante \Longrightarrow \boxed{\nabla\cdot\mathbf{B} = 0} \quad (1)$$

en supposant qu'à $t = 0$ tous les courants sont nuls.

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Ligne de champ magnétique et vent solaire



Principes fondamentaux

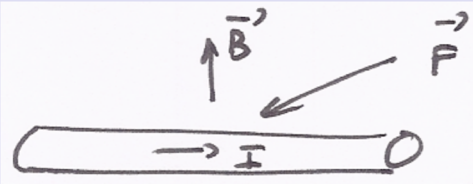
Force de Laplace

- **Observation :**

  Un champ magnétique $\mathbf{B}$ donné agit sur un conducteur linéaire de longueur L parcouru par une densité de courant $\mathbf{I}$ par le biais d'une force $\mathbf{F}$ telle que

$$\boxed{\mathbf{F} = L\mathbf{I} \times \mathbf{B}}$$

- $\mathbf{F}$ est la force de Laplace ou Lorentz



Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Electrodynamique
Electromagnétisme
Dynamique des fluides

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Force de Laplace

- **Forme différentielle**
- $\mathbf{I}$ est défini comme le flux de densité de courant $\mathbf{j}$ à travers un élément de surface dA tel que

$$\mathbf{I} = \mathbf{j}dA$$

- La forme différentielle décrivant la force de Laplace par unité de volume s'écrit donc

$$\boxed{\mathbf{f_L} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}}$$

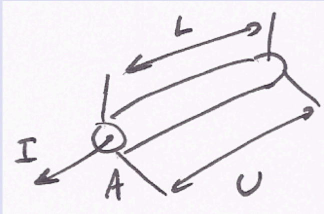
thomas.gomez@upmc.fr MHD – 4AE04

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Loi d'Ohm pour les conducteurs en mouvement

- **Conducteur fixe :** Un champ électrique $\mathbf{E}^\star$ dans un conducteur fixe crée une densité de courant électrique $\mathbf{j}$ telle que

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^\star$$



où σ est la conductivité du conducteur.

- Pour un conducteur de section A et de longueur L avec
  - $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^\star$
  - $\|\mathbf{E}^\star\| = U/L$

$$\Longrightarrow \boxed{I = \int_A \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}dA = \frac{\sigma A}{L}U = \frac{U}{R}}$$

I est le courant et $R = L/(A\sigma)$ la résistance électrique

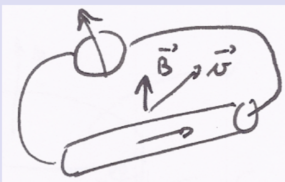
Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Electrodynamique
Electromagnétisme
Dynamique des fluides

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Loi d'Ohm pour les conducteurs en mouvement

- Considérons un conducteur en mouvement à une vitesse $\mathbf{v}$ dans le référentiel du laboratoire.
- Conducteur rectiligne soumis

  à un champ magnétique $\mathbf{B}$



- Un observateur attaché au conducteur, *i.e.* dans le référentiel du conducteur, observe une DDP entre les extrémités du conducteur, créé par le champ électrique $\mathbf{E}^\star$ exprimé dans le référentiel du conducteur. Ce champ s'écrit à l'aide des quantités exprimées dans le référentiel du laboratoire $\mathbf{E}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{B}$

$$\boxed{\mathbf{E}^\star = \mathbf{E} + \underbrace{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}_{\text{Champ induit}}}$$

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Loi d'Ohm généralisée

- Le champ électrique induit par le mouvement produit un champ électrique via la Force de Laplace.
- La loi d'Ohm généralisée s'écrit donc pour la densité de courant **j**

$$\boxed{\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^{\star} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}$$

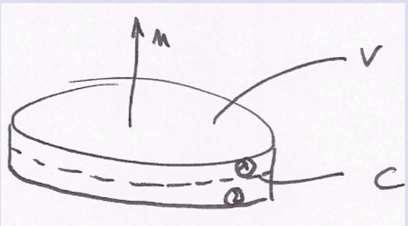
- **Hypothèses de validité :**
  - vitesse $v \ll c$, c vitesse de la lumière.
  - vitesse des porteurs de charge(électrons, ions) beaucoup plus petite que la vitesse du conducteur **v** (on néglige l'effet Hall).
  - On néglige les courants de déplacement électrique, *càd* les porteurs de charges se déplacent sans inertie.

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Conditions électromagnétiques aux interfaces

On utilise

- la conservation de la charge électrique,
- la loi d'Ampère,
- la loi de Faraday.



- Pour le champ magnétique:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Longrightarrow 0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

- En faisant tendre l'épaisseur du cylindre (volume) vers zéro, on obtient

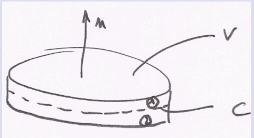
$$\boxed{(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0} \text{ avec } \mathbf{n} \text{ normale de 2 vers 1}$$

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Conditions électromagnétiques aux interfaces

On utilise la conservation de la charge électrique , la loi d'Ampère et la loi de Faraday.

- Pour le champ électrique :



$$\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = q \Longrightarrow \int_V \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} dv = \int_V q dv$$

- En faisant tendre l'épaisseur du cylindre (volume) vers zéro, on obtient

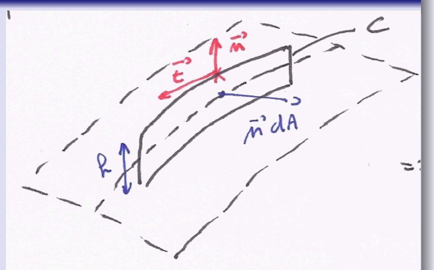
$$\boxed{(\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} = q^\star} \text{ avec } \mathbf{n} \text{ normale de 2 vers 1}$$

où $q^\star$ est la densité de charge à l'interface.
Rmq 1 : $q^\star$ est généralement négligeable dans les bons conducteurs
Rmq 2 : $q^\star$ peut jouer un rôle dans les semi-conducteurs

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Conditions électromagnétiques aux interfaces

- Partie rotationnelle du champ électrique



$$\text{Faraday : } \phi_1 - \phi_2 = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} ds = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu \int_A \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dA\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} ds$$

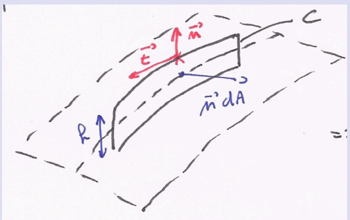
- En faisant tendre l'épaisseur h du parcours C vers zéro, on obtient

$$\lim_{h \to 0} \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} ds = 0 \Longrightarrow \boxed{(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{t} = 0}$$

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Conditions électromagnétiques aux interfaces

- Partie rotationnelle du champ électrique :



La composante tangentielle du champ électrique **E** est donc continue à la traversée de l'interface. On préfère écrire cette propriété en fonction du vecteur normale **n** qui est défini de façon unique.

$$\boxed{\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0}$$

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Electrodynamique
Electromagnétisme
Dynamique des fluides

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Conditions électromagnétiques aux interfaces

- Flux de courant entre deux conducteurs

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \Longrightarrow 0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dv = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA$$

- En faisant tendre la hauteur du volume de contrôle vers 0

$$\Longrightarrow \boxed{(\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2) \cdot \mathbf{n} = 0}$$

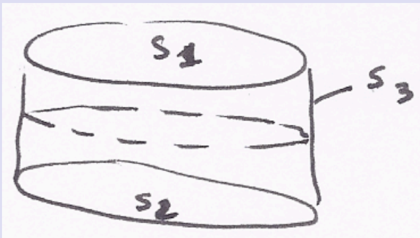
On a donc continuité de la composante normale du flux de charge à travers l'interface.

thomas.gomez@upmc.fr
MHD – 4AE04

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Conditions électromagnétiques aux interfaces

- Flux de courant entre deux conducteurs
  Dans le cas où un des deux matériaux en contact est très fortement conducteur :
  $$\sigma \longrightarrow +\infty$$
  Les effets électrodynamiques sont confinés dans une zone très proche paroi.
  $$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \Longrightarrow \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dv = \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{S_3} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$



Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Electrodynamique
Electromagnétisme
Dynamique des fluides

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Conditions électromagnétiques aux interfaces

- L'intégral sur la surface S_3 correspond au courant qui s'échappe par la face latérale, tangentiellement à l'interface.
- En faisant tendre la hauteur du volume de contrôle vers 0
  $$\Longrightarrow \boxed{(\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2) \cdot \mathbf{n} = -\nabla_\tau \cdot \mathbf{I}}$$
  où
  - ∇_τ est le gradient dans le plan tangent et
  - $\mathbf{I}$ représente la composante tangentielle du courant $\mathbf{j}$ intégrée sur la hauteur de couche limite (dans le matériau très conducteur).

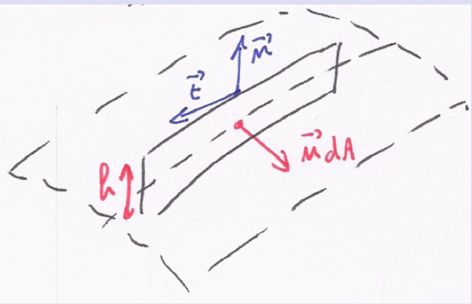
2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Composante tangentielle du champ magnétique

- Loi d'Ampère

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_A \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA = \int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} ds$$

- **Hypothèses :**
    - Contact parfait
    - Pas de nappe de courant à l'interface



Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Electrodynamique
Electromagnétisme
Dynamique des fluides

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Composante tangentielle du champ magnétique

- En faisant tendre la hauteur h du volume de contrôle vers 0

$$h \to 0 \Longrightarrow \boxed{(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{t} = 0} \text{ ou } \boxed{\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0}$$

On a donc continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à travers l'interface.

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Composante tangentielle du champ magnétique

Si le contact n'est pas parfait et qu'il existe des courants de surface, on obtient :

- On obtient pour $h \to 0$

$$\boxed{\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = I}$$

ou

$$\boxed{\mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_1 - \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_2 \right) = I}$$

où I est la densité de courant de surface à l'interface.

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Equations de Maxwell

- **Equations**

Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu \mathbf{H})$	$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = q$
Ampère	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

- **Interfaces**

	$\parallel$	$\perp$
B	$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0$	$\mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_1 - \frac{1}{\mu_2}\mathbf{H}_2 \right) = I$
E	$(\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} = q^\star$	$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$
j	$(\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2) \cdot \mathbf{n} = 0$	-

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Equation d'induction

C'est l'équation de transport pour le champ magnétique **B**, qui est à l'origine de la formulation incompressible des équations de la MHD :

- Loi d'Ohm $\Longrightarrow \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^{\star} = \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$ pour les fluides conducteurs en mouvement.
- Loi de Faraday $\Longrightarrow \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \mathbf{H} \right]$ et $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- Continuité (conservation de la masse) : $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
- Loi d'Ampère : $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right)$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}}$$

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Electrodynamique
Electromagnétisme
Dynamique des fluides

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Equation d'induction

$$\Longrightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}}_{\text{Advection du champ magnétique}} = \underbrace{\eta \nabla^2 \mathbf{B}}_{\text{diffusion magnétique}} + \underbrace{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\text{Etirement}}}$$

- Cette équation décrit l'évolution spatio-temporelle du champ magnétique.
- $\eta = 1/(\sigma \mu)$ est la diffusivité magnétique.
- $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$ est un terme de diffusivité magnétique (par analogie avec la diffusivité thermique qui a la même dimension).
- $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ est le terme d'étirement des lignes de champ magnétique par les gradients de vitesse.

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Equation d'induction sous forme Adimensionnée

$$\Longrightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}}_{\text{Advection du champ magnétique}} = \underbrace{\frac{1}{Re_\eta}\nabla^2\mathbf{B}}_{\text{diffusion magnétique}} + \underbrace{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}}_{\text{Etirement}}}$$

- où Re_η est le nombre de Reynolds magnétique :

$$\boxed{Re_\eta = \mu\sigma L v_0 = \frac{L v_0}{\eta}}$$

- où toutes les variables sont adimensionnées.

$$v \longrightarrow v_0 v \quad , \qquad B \longrightarrow B_0 B$$
$$\nabla\cdot \longrightarrow \frac{1}{L}\nabla\cdot \quad , \qquad t \longrightarrow \frac{L}{v_0} t$$

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Electrodynamique
Electromagnétisme
Dynamique des fluides

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Equation d'induction sous forme Adimensionnée

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}}_{\text{Advection du champ magnétique}} = \underbrace{\frac{1}{Re_\eta}\nabla^2\mathbf{B}}_{\text{diffusion magnétique}} + \underbrace{(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}}_{\text{Etirement}}}$$

- Remarques :
  - $Re_\eta \ll 1$ régime dominé par la diffusion magnétique $\Longrightarrow$ pas d'influence du champ de vitesse.
  - $Re_\eta > Re_{\eta\,critique}$ croissance des petites fluctuations $\Longrightarrow$ régime dynamo pour $Pr_\eta \ll 1$ ou $Pr_\eta \gg 1$.

2.1 Principes fondamentaux : electrodynamique

Energie magnétique

- Les champs magnétiques stockent de l'énergie.
- A partir de l'équation d'induction on obtient

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = -\frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2\right] = -\nabla \cdot \underbrace{\left(\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu}\right)}_{\text{Vecteur de poynting}} - \underbrace{\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}}_{\text{Diffusion magnétique}} - \underbrace{\mathbf{v}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{B})}_{\text{Travail de la force de Laplace}}}$$

- Equations des variations spatio-temporelles de l'énergie du champ magnétique par unité de volume

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Electrodynamique
Electromagnétisme
Dynamique des fluides

2.2 Principes fondamentaux : dynamique des fluides

Equations de conservation

- Conservation de la masse

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{v} = 0}$$

- Conservation de la quantité de mouvement (Navier–Stokes)

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \rho\nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}}$$

-
  - p : pression
  - ρ : densité
  - $\mathbf{f}$: force volumique extérieure
  - $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$: Force de Laplace $\equiv$ Terme de couplage Cinétique / Magnétique

thomas.gomez@upmc.fr MHD – 4AE04

2.2 Principes fondamentaux : dynamique des fluides

Equations de conservation

- Force de Laplace

$$\boxed{\mathbf{f_L} \equiv \mathbf{j} \times \mathbf{B}}$$

  - $\mathbf{f_L}$ agit dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$ et à $\mathbf{j}$.
  - Force de Coulomb $q\mathbf{E}$ considéré comme négligeable par rapport à $\mathbf{f_L}$. (Shercliff 1965).
  - La loi d'Ampère $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} \Longrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{f_L} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\nabla \cdot (\mathbf{BB}) - \nabla \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}}$$

  - $\mathbf{BB}$ est un produit dyadique (tenseur d'ordre 2) .

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Electrodynamique
Electromagnétisme
Dynamique des fluides

2.2 Principes fondamentaux : dynamique des fluides

Equations de conservation

- Tenseur des contraintes de Maxwell

$$\boxed{\mathbf{M} = \frac{1}{\mu}\left[B_i B_k - \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \delta_{ik}\right]}$$

- Force de Laplace

$$\mathbf{f_L} = -\nabla \cdot [\mathbf{M}]$$

thomas.gomez@upmc.fr MHD – 4AE04

2.2 Principes fondamentaux : dynamique des fluides

Equation de Bernoulli MHD

- Ecoulement stationnaire, non visqueux, sous gravité, conducteur, soumis à un champ magnétique

$$\boxed{-\nabla\left(p+\rho\frac{\mathbf{v}^2}{2}+\underbrace{\frac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2}_{\text{Pression magnétique}}\right)+\rho\mathbf{g}=\mathbf{0}}$$

- L'équation de Bernoulli MHD est obtenue en intégrant cette relation.
- $\frac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2$ est appelée pression magnétique.

2.2 Principes fondamentaux : dynamique des fluides

Equation de Navier-Stokes sous forme Adimensionnée

- Variables adimensionnées :

$$v \longrightarrow v_0 v \quad , \quad j \longrightarrow \sigma v_0 B_0 j \quad p \longrightarrow p_0 p$$
$$\nabla\cdot \longrightarrow \frac{1}{L}\nabla\cdot \quad , \quad t \longrightarrow \frac{L}{v_0} t \quad f \longrightarrow (v_0^2/L) f$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=-\nabla p+\frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{v}+\mathbf{f}+N(\mathbf{j}\times\mathbf{B})}$$

- Re est le nombre de Reynolds : $\boxed{Re=\frac{Lv_0}{\nu}}$
- N le nombre de Stuart ou paramètre d'interaction : $\boxed{N=\frac{\sigma L B_0^2}{\rho v_0}}$

2.2 Principes fondamentaux : dynamique des fluides

Nombres sans dimension

- Nombre de Reynolds : $\boxed{Re = \dfrac{L v_0}{\nu} = \dfrac{\text{Effets inertiels}}{\text{Effets visqueux}}}$
- Nombre de Stuart ou paramètre d'interaction :

$$\boxed{N = \frac{\sigma L B_0^2}{\rho v_0} = \frac{\text{Effets magnétiques}}{\text{Effets inertiels}}}$$

- Nombre de Hartmann :

$$\boxed{Ha = L B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho v_0}} = \frac{\text{Effets magnétiques}}{\text{Effets visqueux}}}$$

2.2 Principes fondamentaux : dynamique des fluides

Equation de vorticité : $\nabla \times NS$

- Influence du champ magnétique sur la dynamique de la vorticité :

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \omega \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \times [\mathbf{f} + N(\mathbf{j} \times \mathbf{B})]}$$

- Analogie de Batchelor :

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}}_{\text{Advection du champ magnétique}} = \underbrace{\frac{1}{Re_\eta} \nabla^2 \mathbf{B}}_{\text{diffusion magnétique}} + \underbrace{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v}}_{\text{Etirement}}}$$

- Différence : $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ mais $\mathbf{B} \neq \nabla \times \mathbf{v}$!!!

2.2 Principes fondamentaux : dynamique des fluides

Energie cinétique : $E = \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2$

- $\mathbf{v} \cdot (NS) \Longrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2\right] = -\nabla \cdot \underbrace{\left[\mathbf{v}\left(p + \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2\right) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}\right]}_{\text{Flux d'énergie}} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})}_{\text{Travail des forces}} - \underbrace{\Phi}_{\text{Dissipation visqueuse}}$$

- Tenseur des contraintes visqueuses : $\mathbf{S} = 2\nu \mathbf{D}$
- Tenseur des déformations : $\mathbf{D} = [D_{ij}] = \frac{1}{2}\left[\partial_j v_i + \partial_i b_j\right]$
- Dissipation visqueuse : $\Phi = \mathbf{S} : \mathbf{D}$

2.2 Principes fondamentaux : Equation de la chaleur

Energie thermique :

- Equation de conservation de l'énergie $\Longrightarrow$

$$\rho C_p\left[\frac{\partial}{\partial t}T + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla T}_{\text{Convection}}\right] = \underbrace{\nabla \cdot (\lambda \nabla T)}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma}\mathbf{j}^2}_{\text{Dissipation Joule}} + \underbrace{\Phi}_{\text{Chauffage par dissipation visqueuse}} + \underbrace{Q}_{\text{Source Thermique}}$$

- ρC_p : Capacité thermique
- λ : Conductivité thermique
- $\lambda/(\rho C_p)$: Diffusivité thermique

2.2 Principes fondamentaux : Equation de la chaleur

Forme adimensionnée:

- Variables adimensionnées :
  $T \longrightarrow \Delta T_0 T \quad , \quad \Phi \longrightarrow \Phi_0 \Phi \quad , \quad Q \longrightarrow Q_0 Q$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}T + \underbrace{\mathbf{v}\cdot\nabla T}_{\text{Convection}} = \underbrace{\frac{1}{Pe}\nabla^2 T}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{E_c N \mathbf{j}^2}_{\text{Dissipation Joule}} + \underbrace{\Phi}_{\text{Chauffage par dissipation visqueuse}} + \underbrace{Q}_{\text{Source Thermique}}}$$

- $Pe = \frac{\rho C_p v_0 L}{\lambda} = Re \cdot Pr$: Nombre de Peclet
- $Pr = \nu/\kappa$: Nombre de Prandtl
- $Ec = \frac{v_0^2}{C_p \Delta T_0} = \frac{\text{Energie}}{\text{Enthalpie}}$: Nombre d'Eckert

2.2 Principes fondamentaux : Equation de la chaleur

Forme adimensionnée:

- Equation de conservation de l'énergie $\Longrightarrow \Phi_0 = Q_0 = \frac{\rho C_p v_0 \Delta T_0}{L}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}T + \underbrace{\mathbf{v}\cdot\nabla T}_{\text{Convection}} = \underbrace{\frac{1}{Pe}\nabla^2 T}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{E_c N \mathbf{j}^2}_{\text{Dissipation Joule}} + \underbrace{\Phi}_{\text{Chauffage par dissipation visqueuse}} + \underbrace{Q}_{\text{Source Thermique}}}$$

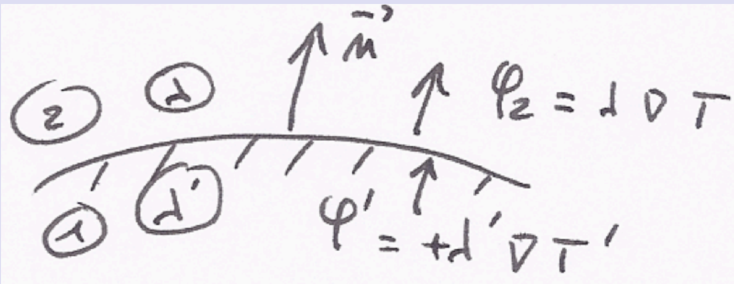
- $Pe = \frac{\rho C_p v_0 L}{\lambda} = Re \cdot Pr$: Nombre de Peclet
- $Pr = \nu/\kappa$: Nombre de Prandtl
- $Ec = \frac{v_0^2}{C_p \Delta T_0} = \frac{\text{Energie cinétique}}{\text{Enthalpie}}$: Nombre d'Eckert

2.2 Principes fondamentaux : Conditions limites

cinématique et thermique

- Fluide visqueux : $\mathbf{v} = 0$ aux parois solides
- Transferts thermiques : continuité des flux thermiques aux interfaces

$$(\lambda \nabla T - \lambda' \nabla T') \cdot \mathbf{n} = 0$$



2.3 Principes fondamentaux : Equations de la MHD

Magnétohydrodynamique

- NS : $\boxed{\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \dfrac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} + N(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0}$
- Induction : $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \dfrac{1}{Re_\eta} \nabla^2 \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$
- Loi d'Ampère : $\boxed{\mathbf{j} = \dfrac{1}{Re_\eta} \nabla \times \mathbf{B}}$
- Conservation des charges : $\boxed{\nabla \cdot \mathbf{j} = 0}$
- Loi d'Ohm généralisée : $\boxed{\mathbf{j} = -\nabla \phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}}$
- Thermique : $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t} T + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \dfrac{1}{Pe} \nabla^2 T + E_c N \mathbf{j}^2 + \Phi + Q}$
- Echelles caractéristiques : v_0, B_0, ΔT_0, $j_0 = \sigma v_0 B_0$, $p_0 = \rho v_0^2$, $\Phi_0 = L v_0 B_0$.
- Nombres sans dimension : $Re = \dfrac{L v_0}{\nu}$, $N = \dfrac{\sigma L B_0^2}{\rho v_0}$, $Ha = L B_0 \sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho \nu_0}}$, $Re_\eta = \dfrac{L v_0}{\eta}$