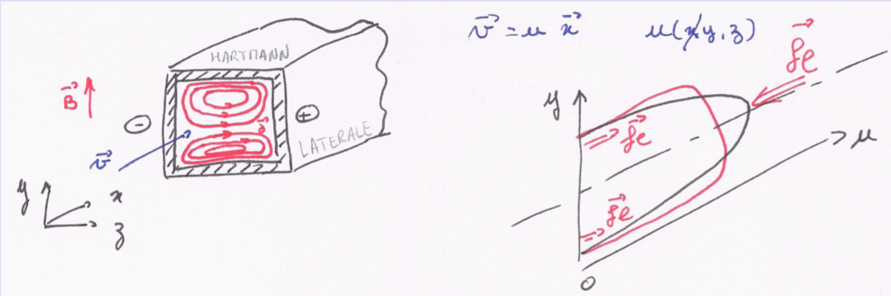
3. Magnétohydrodynamique :

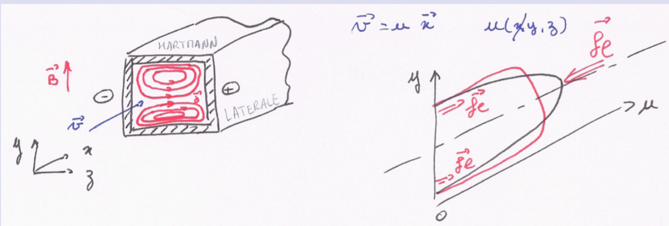
Ecoulement en conduite



- Champ électrique induit $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \Longrightarrow$ DDP entre les faces latérales $+$ et $-$.
- $\Longrightarrow$ génère un courant électrique $\mathbf{j}$ à travers les couches limites visqueuses.
- $\Longrightarrow$ production d'une force de Laplace $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$.

3. Magnétohydrodynamique :

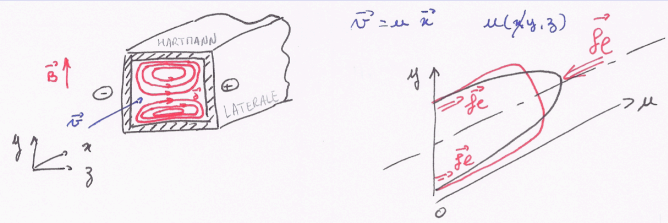
Couche limite de Hartmann



- Dans les couches limites $\mathbf{f_L}$ accélère le fluide : $\mathbf{f_L} \cdot \mathbf{v} > 0$.
- Dans le centre du canal $\mathbf{f_L}$ ralenti le fluide : $\mathbf{f_L} \cdot \mathbf{v} < 0$.
- L'amplitude du courant dépend linéairement du module de la vitesse $|\mathbf{v}|$.
- $\Longrightarrow$ homogénéisation du profil de vitesse (aplatissement).
- Dans le centre du canal les forces de Laplace sont en équilibres avec les gradients de pression.

3. Magnétohydrodynamique :

Couche limite de Hartmann



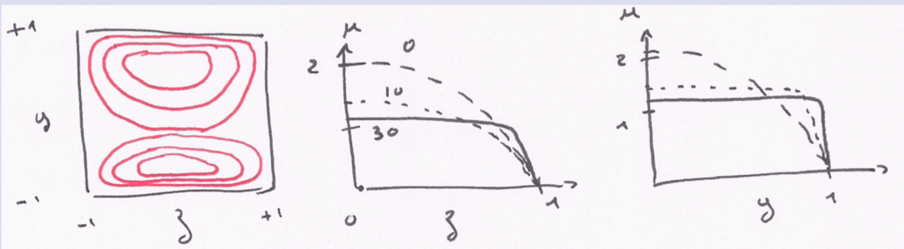
- Dans le centre du canal la force de Laplace est en équilibres avec les gradients de pression.
- La force de Laplace contribue à la chute de pression en addition des effets visqueux.
- A proximité des parois de Hartmann la chute de vitesse est très rapide, c'est ce qu'on appelle la couche limite de Hartmann.
- Dans cette zone la force de Laplace agit dans le sens opposé des contraintes visqueuses.

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Ecoulements unidirectionnels en conduite

3. Magnétohydrodynamique :

Cas 1 : Toutes les parois sont des isolants

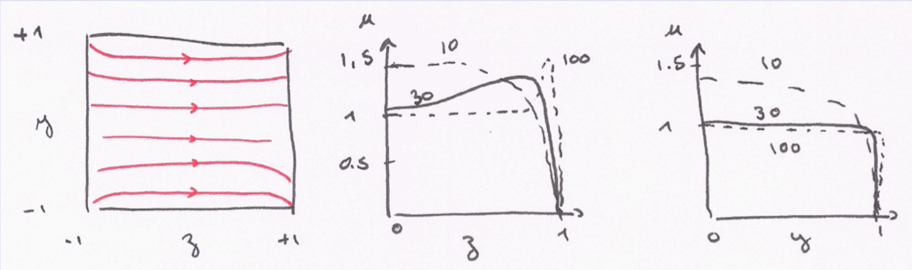
- $\sigma_w = 0$



3. Magnétohydrodynamique :

Cas 2 : Les parois sont des conducteurs parfaits

- $\sigma_w \longrightarrow \infty$

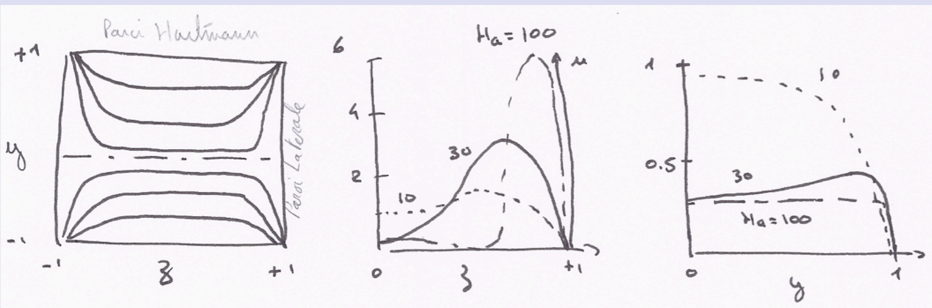


Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Ecoulements unidirectionnels en conduite

3. Magnétohydrodynamique :

Cas 3 : Parois mixtes

- $\sigma_w = \sigma_H = \infty$: Les parois de Hartmann sont des conducteurs parfaits.
- $\sigma_w = \sigma_s = 0$: Les parois latérales sont des isolants.



3. Magnétohydrodynamique :

Conclusions :

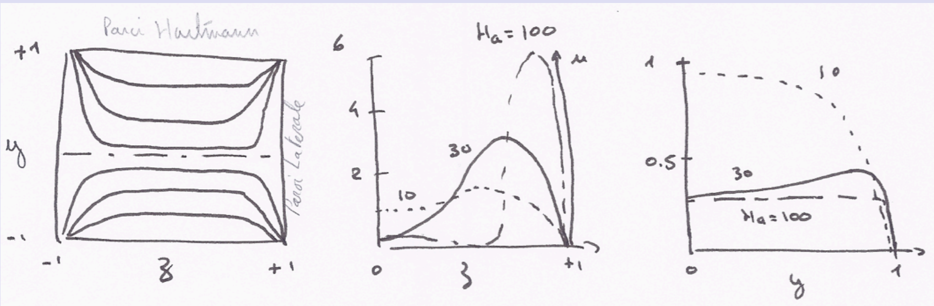
- Densités de courant quasi constantes dans la région centrale. La distribution est plate.
- Parois latérales :
  - comportement de type "jet".
  - épaisseur de couches limites décroit avec l'augmentation de *Ha*, i.e. du champ magnétique.
- Parois de Hartmann
  - couches limites plus fines que celles des parois latérales.
  - épaisseur de couches limites décroit avec l'augmentation de *Ha* plus vite que pour les parois latérales.

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Ecoulements unidirectionnels en conduite

3. Magnétohydrodynamique :

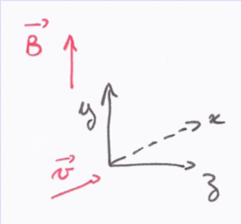
Cas 3 : Parois mixtes

- $\sigma_W = \sigma_H = \infty$: Les parois de Hartmann sont des conducteurs parfaits.
- $\sigma_W = \sigma_s = 0$: Les parois latérales sont des isolants.



3.2 Ecoulements unidirectionnels en conduite

3.2.1 Introduction

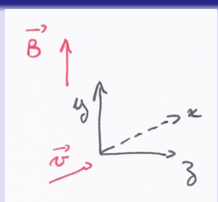


- Champ de vitesse unidirectionnel $\mathbf{v} = v(y,z)\mathbf{x}$, homogène en $\mathbf{x}$.
- On impose un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = \mathbf{y}$.
- L'écoulement est forcé par un gradient de **pression moteur uniforme**.

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Ecoulements unidirectionnels en conduite

3.2 Ecoulements unidirectionnels en conduite

3.2.2 Equations



- On décompose le champ magnétique : **Champ extérieur + Champ induit** :

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{y} + \frac{Re_\eta}{Ha} b(y,z)\mathbf{x}}$$

- $\frac{Re_\eta}{Ha}$ est **l'amplitude caractéristique du champ induit** :.
- **Densité de courant induit**

$$\boxed{\mathbf{j} = \frac{1}{Ha}\nabla \times (b(y,z)\mathbf{x}) = \frac{1}{Ha}\left[\partial_z b(y,z)\mathbf{y} - \partial_y b(y,z)\mathbf{z}\right]}$$

3.2.2 Equations

Induction magnétique $b(y,z)$

- On injecte :

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{y} + \frac{Re_\eta}{Ha} b(y,z)\mathbf{x}}$$

dans l'équation pour l'induction magnétique

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \frac{1}{Re_\eta}\nabla^2\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} \quad , \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

- On obtient alors

$$\boxed{\nabla^2 b(y,z) + Ha\frac{\partial u}{\partial y}(y,z) = 0}$$

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan
Ecoulements unidirectionnels en conduite

3.2.2 Equations

Vitesse $u(y,z)$

- On injecte :

$$\boxed{\mathbf{j} = \frac{1}{Ha}\left[\partial_z b(y,z)\mathbf{y} - \partial_y b(y,z)\mathbf{z}\right]}$$

dans l'équation de Navier Stokes :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f} + N(\mathbf{j}\times\mathbf{B}) \quad , \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

- On obtient alors

$$\boxed{\nabla^2 u(y,z) + Ha\frac{\partial b}{\partial y}(y,z) = -1}$$

- Le terme de droite représente le gradient de pression adimensionné, *i.e.* en posant $v_0 = \frac{L^2(\partial P_0/\partial x)}{\rho\nu}$

3.2.2 Conditions limites

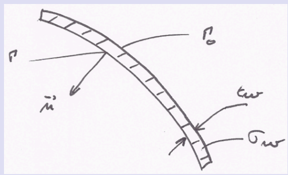
Vitesse :

- Aux parois

$$\boxed{\mathbf{v} = 0}$$

Champ magnétique :

- Aux parois en Γ



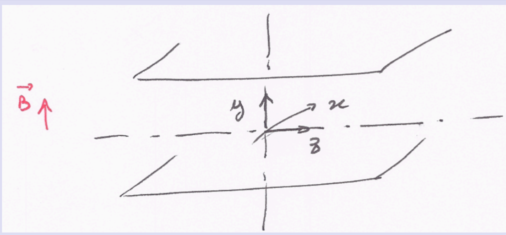
$$\boxed{\frac{\partial b}{\partial n} - \frac{1}{c} b = 0}$$

- avec n normale intérieure au domaine fluide et c rapport des conductances des parois et du fluide

$$\boxed{c = \frac{\sigma_w t_w}{\sigma L}}$$

4. Solutions analytiques en canal plan

4.1 Ecoulement de Hartmann



- **vitesse :** $u = u(y)$
- **Induction magnétique :** $b = b(y)$
- **Solution générale :**

$$u(y) = \hat{u}\left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot y)}{\cosh Ha}\right]$$

$$b(y) = -\frac{y}{Ha} + \hat{u}\frac{\sinh Ha \cdot y}{\cosh Ha}$$

- avec $\hat{u} = \frac{1}{Ha}\frac{c+1}{cHa + \tanh Ha}$

4. Solutions analytiques en canal plan

4.1.1 Expression de la force de Laplace

- Sous forme dimensionnée $f_L = Ha\frac{\partial b}{\partial y}$
- Soit en utilisant la solution obtenue pour $b(y)$:

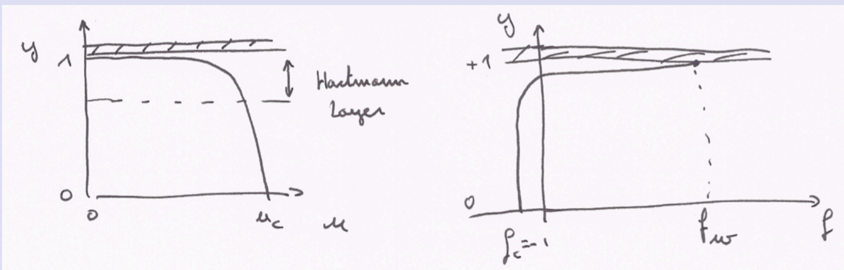
$$\boxed{f_L = -1 + \hat{u}Ha^2\frac{\cosh(Ha \cdot y)}{\cosh Ha}}$$

- Le premier terme $"-1"$ équilibre le gradient de pression.
- Le second agit essentiellement dans la couche limite de Hartmann.

4. Solutions analytiques en canal plan

4.1.1 Expression de la force de Laplace

- La force de Laplace est motrice dans la couche limite $(f > 0)$.
- Négative dans le centre du canal.



4. Solutions analytiques en canal plan

4.1.2 Débit volumique

$$\boxed{Q = \int_{-1}^{+1} u(y)dy = 2\hat{u}\left[1 - \frac{1}{Ha}\tanh Ha\right]}$$

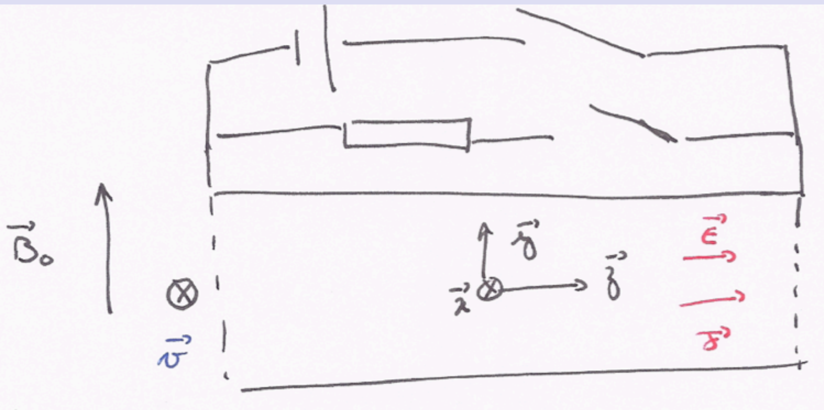
- Débit Q adimensionné : indépendant du gradient de pression.
- qd Ha croit il faut augmenter le gradient de pression pour conserver le débit constant.
- A Ha constant, un gradient de pression plus grand est requis pour conserver le débit constant dans le cas des parois très conductrices.

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan

4. Solutions analytiques en canal plan

4.1.3 Ecoulement de Hartmann : Générateur électrique / Pompe

Schémas de principe :



4. Solutions analytiques en canal plan

4.1.3 Ecoulement de Hartmann : Générateur électrique / Pompe

Intégrons la loi d'Ohm le long de y dans le canal

$$j_z = E + u \Longrightarrow \boxed{I = E_z + Q}$$

I est la densité de courant intégrée sur la hauteur du canal passant à travers le fluide et la paroi.

- Ecoulements de Hartmann pures : Tous les courants recirculent dans les couches limites de Hartmann donc

$$I = 0$$

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan

4. Solutions analytiques en canal plan

4.1.3 Ecoulement de Hartmann : Générateur électrique / Pompe

- Si $I \neq 0$: les conditions aux parois de Shercliff s'écrivent

$$\boxed{\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{1}{c}\left(b + \frac{1}{2} Ha \cdot I\right) = 0}$$

$\Longrightarrow$ On obtient de nouvelles constantes pour la solution de base : Le débit s'écrit alors

$$\boxed{Q = \underbrace{2\hat{u}\left[1 - \frac{1}{Ha}\tanh Ha\right]}_{Q_H \text{ : débit de Hartmann}} \left(1 - \frac{1}{2} Ha^2 \cdot I \frac{1}{1+c}\right)}$$

4. Solutions analytiques en canal plan

4.1.3 Ecoulement de Hartmann : Générateur électrique / Pompe

En fonction du débit de Hartmann Q_H, on obtient:

- Débit Volumique

$$\boxed{\frac{Q}{Q_H} = 1 - \frac{1}{2} Ha^2 \cdot I \frac{1}{1+c}}$$

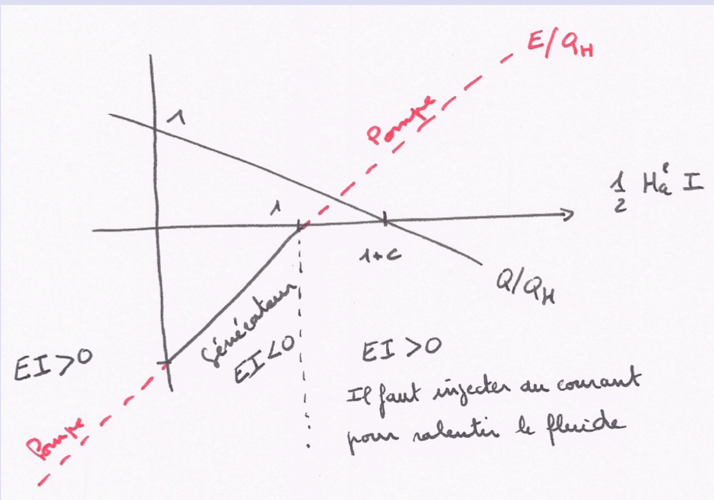
- En réinjectant dans $I = E + Q$, on obtient pour les grands Ha :

$$\boxed{\frac{E}{Q_H} = -1 + \frac{1}{2} Ha^2 \cdot I}$$

Introduction
Principes fondamentaux
Magnétohydrodynamique
Solutions analytiques en canal plan

4. Solutions analytiques en canal plan

4.1.3 Ecoulement de Hartmann : Générateur électrique / Pompe



4. Solutions analytiques en canal plan

4.1.3 Ecoulement de Hartmann : Générateur électrique / Pompe

- Débimètre : $I = 0 \Longrightarrow Q/Q_H = 1$ et $E/Q_H = -1$.
- Générateur électrique : $0 < \frac{1}{2}Ha^2 \cdot I < 1$.
- Ralentisseur : pour des courants $\frac{1}{2}Ha^2 \cdot I > 1$.
- Avec un contrecourant pour $\frac{1}{2}Ha^2 \cdot I > 1 + c$ et $Q/Q_H < 0$
- Pompe : $I < 0$.