

Conclusion

- **Ecoulements turbulents omniprésents**
- **Fort impact sur l'environnement** : météo, pollution (acoustique, atmosphérique), consommation énergétique, contrôle
- **Nécessiter de développer des outils** pour évaluer et anticiper les comportements turbulents des écoulements.
 - **Modéliser** : comprendre la physique
 - **Simuler** : développer des méthodes mathématiques et numériques adaptées
 - **Post-traiter** les données : exploitation et intégration des flux de données

- « Cela m'amène au grand défi mathématique qui fait l'objet d'un des sept prix d'un montant d'**un million de dollars** annoncés récemment par la fondation Clay au Collège de France. Le problème est de montrer que les équations de Navier-Stokes conduisent à un problème " bien posé ". Cela veut dire que si l'on connaît le mouvement du fluide à un instant initial on veut pouvoir montrer qu'il y a une solution unique à tout instant ultérieur. Notez que cette fois le problème n'est pas celui des erreurs mais de l'unicité de la solution. Ce problème a été résolu dans les années trente par Jean Leray dans le cas de deux dimensions d'espace (ce qui est pertinent en météorologie et en océanographie). Le problème est beaucoup plus difficile en dimension trois. » U. Frisch

Concepts de base

Equation de Navier Stokes

- **Écoulement compressible:**

Conservation de la quantité de mouvement

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] + F_i \quad (i = 1, 3)$$

Equation pour l'énergie interne

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = -(\gamma - 1)e \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\mu}{\rho} \tau : D + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}$$

Equations d'état

Gaz parfaits $p = R\rho T$

Barotropes $p = \rho^\gamma$

(plus d'équation pour l'énergie)

Energie interne et température $e = C_v T$

Enthalpie et température $h = C_p T$

Conditions limites / initiales

- ✓ **Géométrie de l'écoulement** : Périodique, non glissement, etc...

Conditions limites

- ✓ **Physique du problème** : état initiale du système : densité/vitesse/température

Conditions initiales

Equation de Navier Stokes

- **Écoulement incompressible:**

**Conservation
de la masse**

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

**Conservation
de la quantité de mouvement**

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + f_i \quad (i = 1, 3)$$

Equation pour la température

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T u_j}{\partial x_j} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}$$

Pression

écoulements incompressible

☑ Quantité non locale en incompressible

$$\nabla \cdot \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + f_i \right]$$

$$\implies \Delta p = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$$

$$\partial_j u_i = D_{ij} + \Omega_{ij}$$

Problème de Poisson

Symétrique

Antisymétrique

$$\implies \Delta p = -\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \Omega^2 - D^2$$

Pression

écoulements incompressible

☑ Equation de Poisson

$$\Delta p = \Omega^2 - D^2$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{4} (\partial_i u_j - \partial_j u_i)^2$$

$$D^2 = \frac{1}{4} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2$$

$$\implies p(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{D^2(\mathbf{x}') - \Omega^2(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}'$$

Non locale

Equations de NS incompressibles et Symétries

- ✓ Invariance des équations si on applique la transformation

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}', \quad t \longrightarrow t', \quad \mathbf{u}(x, t) \longrightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}', t')$$

- ✓ Si $\mathbf{u}(x, t)$ solution, $\mathbf{v}(\mathbf{x}', t')$ est aussi solution
- ✓ $\mathbf{u}(x, t)$ périodique en espace et de divergence nulle

Equations de NS et Symétries

- ✓ **Translation en espace**

$$(\mathbf{x}, t) \longrightarrow (\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}, t' = t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}', t') = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

- ✓ **Translation en temps**

$$(\mathbf{x}, t) \longrightarrow (\mathbf{x}' = \mathbf{x}, t' = t + \tau), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}', t') = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

- ✓ **Transformation galiléenne**

$$(\mathbf{x}, t) \longrightarrow (\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}_0 t, t' = t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}', t') = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}_0$$

- ✓ **Parité**

$$(\mathbf{x}, t) \longrightarrow (\mathbf{x}' = -\mathbf{x}, t' = t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}', t') = -\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

- ✓ **Rotation** $\underline{\underline{A}} \in SO(\mathcal{R}^3)$

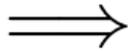
$$(\mathbf{x}, t) \longrightarrow (\mathbf{x}' = \underline{\underline{A}}\mathbf{x}, t' = t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}', t') = \underline{\underline{A}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

- ✓ **Scaling** $h \in \mathcal{R}, \nu = 0$ et $h = -1, \nu \neq 0$

$$(\mathbf{x}, t) \longrightarrow (\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x}, t' = \lambda^{1-h}t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}', t') = \lambda^h\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

Vorticité

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$$

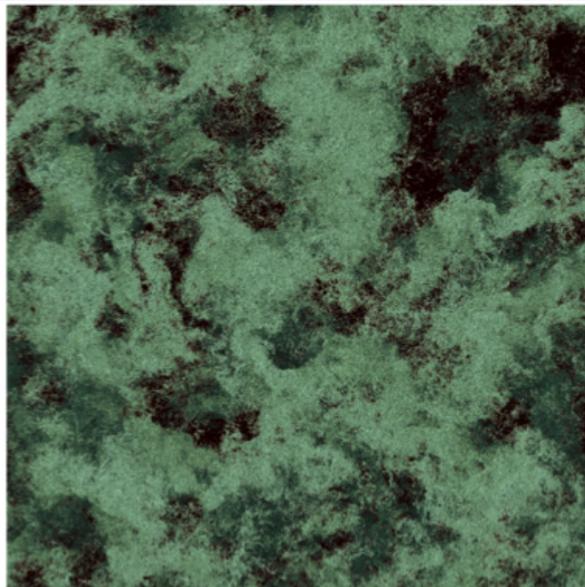


$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

☑ Tenseur de divergence nulle

☑ Pseudo-tenseur

Vorticité

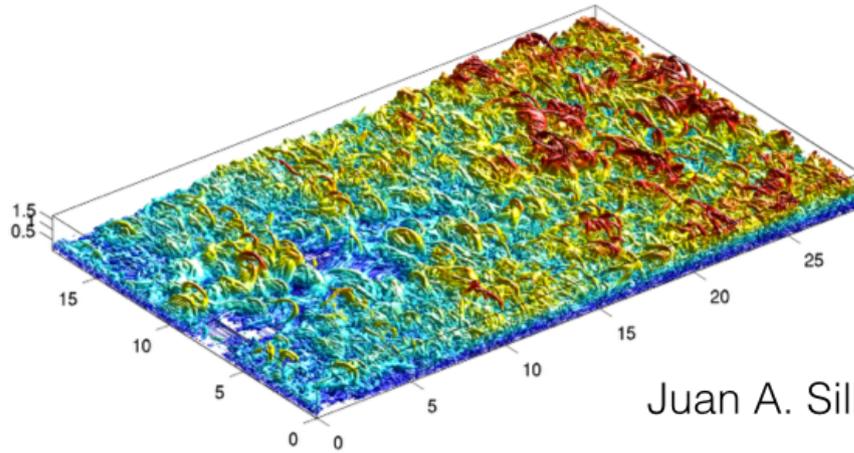


L
10 λ
100 η

Figure 1

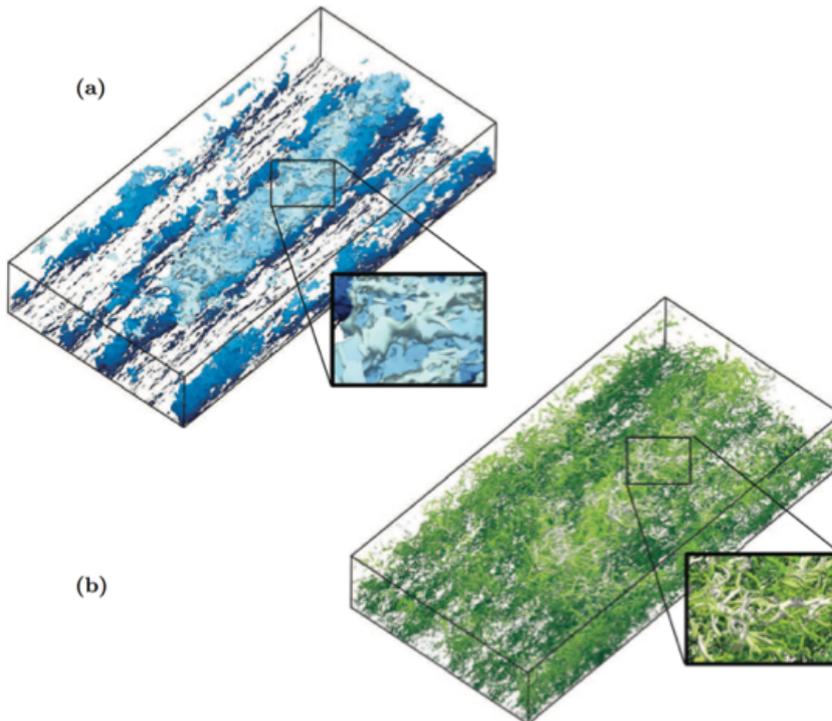
Intense vorticity isosurfaces showing the region $|\omega| > (\omega) + 4\sigma_\omega$ in direct numerical simulation with 4096^3 grid points and $Re_\tau = 1131$, where ω is the vorticity and (ω) and σ_ω are the mean and standard deviation of $|\omega|$. The size of the display domain is $12267\eta \times 12267\eta$, periodic in the vertical and horizontal directions. The black bars at the bottom indicate the integral length scale $L = \pi/(2U^2) \int_0^\infty E(k)/k dk$, the Taylor microscale λ , and the Kolmogorov length scale $\eta = \nu^{1/4}/(\epsilon)^{1/4}$, where $E(k)$ is the energy spectrum normalized so that $\int_0^\infty E(k) dk = E$. The field consists of clouds of a large number of small eddies and void regions. Intermittency is observed from large to small scales.

Vorticité



Juan A. Sillero

Vorticité



Jimenez 2013
Couche limite

Vorticité

$$\Delta p = \Omega^2 - D^2$$

- ✓ Vortex = minimum de pression
- ✓ Concentre les bulles d'air



Couder et al., 1995

Equations pour la vorticité

$$\nabla \times (NS) \implies$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_k \partial x_k} + \nabla \times f_i \quad (i = 1, 3)$$

- ✓ Pas de terme de pression
- ✓ Création de vorticité par le champ de déformation (Etirement)

Lois de conservation

- ☑ Dans la limite des Re très grands, i.e. $\nu \rightarrow 0$
- ☑ Energie cinétique E, Hélicité H (3D)
- ☑ Enstrophie (2D)

Lois de conservation

- ☑ Soit une quantité h satisfaisant l'équation d'advection

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_j \frac{\partial h}{\partial x_j} = g$$

- ☑ Le terme d'advection est conservatif si $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

$$\forall V, \int_V u_j \frac{\partial h}{\partial x_j} dv = \int_S (u_j h) n_j ds$$

- ☑ S'annule si fluide au repos à l'infini

Invariants non visqueux

- ☑ Conservation de l'**énergie cinétique**

$$E = \frac{1}{2} \int |\mathbf{u}|^2 dv$$

- ☑ Terme de flux fonction de la vitesse

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{\int_V \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{v}^2/2 + p) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] dv}_{\text{Terme de flux}} - \underbrace{\nu \int_V \boldsymbol{\omega}^2 dv}_{\text{Dissipation}}$$

- ☑ **Soit E conservée si $\nu = 0$**

Invariants non visqueux

- ☑ Conservation de l'**énergie cinétique**

$$E = \frac{1}{2} \int |\mathbf{u}|^2 dv$$

- ☑ On peut donc montrer que l'on a

$$\frac{dE}{dt} = -\nu \int_V \boldsymbol{\omega}^2 dv$$

- ☑ **Soit E conservée si $\nu = 0$**

Invariants non visqueux

☑ L'hélicité

☑ vorticité ω est un pseudo-vecteur

☑ l'hélicité est un pseudo-scalaire

☑ mesure la dissymétrie de réflexion de l'écoulement (miroir)

Invariants non visqueux

☑ Conservation de l'hélicité

$$H \equiv \frac{1}{2} \int_V \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} dv$$

☑ On peut montrer que l'on a

$$\frac{dH}{dt} = -2\nu \int_V \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} dv$$

☑ Soit H conservée si $\nu = 0$

☑ Si $\nu \neq 0$ création ou destruction possible

Description Statistique

Introduction

- Fluctuations de vitesse et de pression en tout point de l'espace apparemment aléatoires
- L'écoulement peut être statistiquement stationnaire

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$$

Moyenne temporelle

Introduction

● Décomposition du signal :

partie moyenne + partie fluctuante

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + u'(x, t)$$



Moyenne temporelle

Signal Turbulent

28

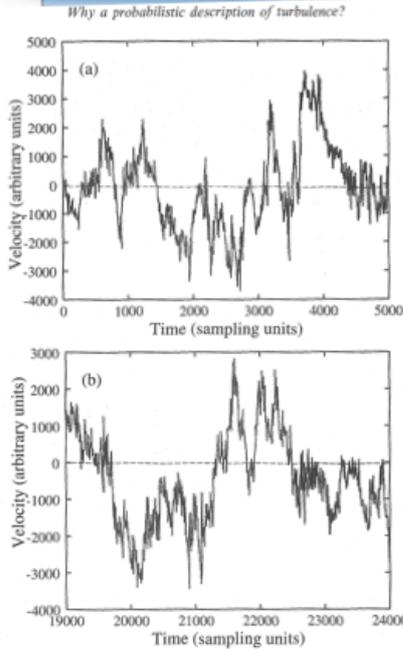
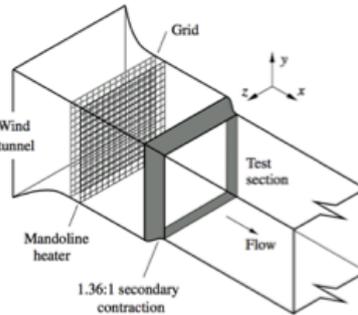


Fig. 3.1. One second of a signal recorded by a hot-wire (sampled at 5kHz) in the S1 wind tunnel of ONERA (a); same signal, about four seconds later (b). Courtesy Y. Gagne and E. Hopfinger.

**Frisch
1995**



**Antonia et al.
JFM 2013**

30

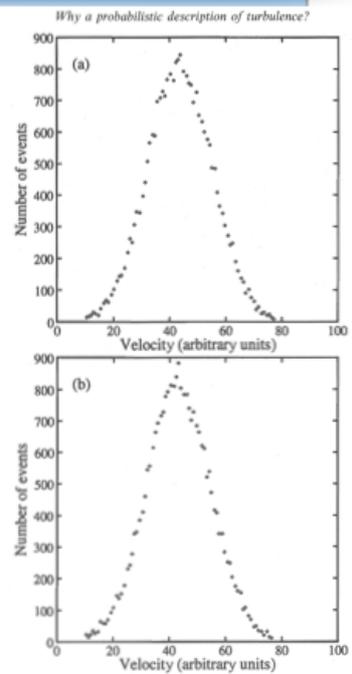


Fig. 3.3. Histogram for same signal as in Fig. 3.1(a), sampled 5000 times over a time-span of 150 seconds (a); same histogram, a few minutes later (b).

Moyenne d'ensemble

- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ Fonction aléatoire au point \mathbf{x} et au temps t
- Pour chaque **réalisation**, on mesure $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ en tout point et à tout temps. La même expérience répétée va donner des valeurs différentes.
- On suppose le nombre de répétition très grand alors la distribution de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ tend vers une forme donnée déterminée par les données du problèmes.
- **Moyenne d'ensemble** (plus de stationnarité stat.)

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \overline{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}$$

Ergodicité

- Si $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est une fonction aléatoire stationnaire en temps la théorème **d'ergodicité** nous dit que *sous certaines conditions*, on a

équivalence entre la moyenne d'ensemble et la moyenne en temps

Homogénéité

- ✓ Si $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est une fonction aléatoire
- ✓ Les moments statistiques d'ordre supérieur ou égal à 2 sont invariants par toute translation d'espace.
- ✓ Exemples du tenseur de corrélation des vitesses :
 - ✓ Ecoulement homogène en \mathbf{x}

$$R_{ij} \equiv \overline{u_i(x, y, z)u_j(x + r_1, y + r_2, z + r_3)} = R_{ij}(y, z, \mathbf{r})$$

- ✓ **Turbulence homogène**

$$R_{ij} \equiv \overline{u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} = R_{ij}(\mathbf{r})$$

Turbulence pleinement isotrope

- Si $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est une fonction aléatoire statistiquement stationnaire par rapport aux coordonnées d'espace.
- Les moments statistiques d'ordre supérieur ou égal à 2 sont invariants par toute rotation du référentiel.
- Exemple du tenseur de corrélation des vitesses :

$$R_{ij} \equiv \overline{u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} = R_{ij}(|\mathbf{r}|)$$

- Si THI sans symétrie de réflexion alors R_{ij} a une partie antisymétrique

Moyenne statistique

- Soit N quantités $\phi_i(\mathbf{x}, t)$, ($i = 1, N$) obtenues au cours de p réalisations indépendantes.
- On définit la valeur moyenne $\bar{\phi}_i$ obtenue par une moyenne d'ensemble

$$\bar{\phi}_i(\mathbf{x}, t) \equiv \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1, p} \phi_i^{(k)}(\mathbf{x}, t) \right)$$

- La variance des fluctuations s'écrit

$$\overline{\phi_i' \phi_i'}(\mathbf{x}, t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1, p} (\phi_i^{(k)}(\mathbf{x}, t) - \bar{\phi}_i(\mathbf{x}, t)) (\phi_i^{(k)}(\mathbf{x}, t) - \bar{\phi}_i(\mathbf{x}, t)) \right)$$

Moyenne statistique

- Variable centrée

$$\phi_i'(\mathbf{x}, t) \equiv (\phi_i(\mathbf{x}, t) - \bar{\phi}_i(\mathbf{x}, t))$$

- On définit la corrélation en 2 points et 2 temps

$$\begin{aligned} \overline{\phi_i' \phi_i'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, t') &\equiv \overline{\phi_i'(\mathbf{x}, t) \phi_i'(\mathbf{y}, t')} \\ &= \overline{\phi_i'(\mathbf{x}, t) \phi_i'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau)} \\ &= \overline{\phi_i' \phi_i'}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t, \tau) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1, p} (\phi_i^{(k)}(\mathbf{x}, t) - \bar{\phi}_i(\mathbf{x}, t)) (\phi_i^{(k)}(\mathbf{y}, t') - \bar{\phi}_i(\mathbf{y}, t')) \right) \end{aligned}$$

Tenseur des corrélations en 2 points

- Tenseur des composantes de vitesse en 2 points et 1 temps pour les fluctuations de vitesse

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \equiv \overline{u'_i(\mathbf{x}, t)u'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} .$$

Décomposition de Reynolds

- ✓ Champ total = partie moyenne + partie fluctuante

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{x}, t) + \phi'(\mathbf{x}, t)$$

- ✓ Axiomes de Reynolds

- ✓ $\bar{1} = 1$

- ✓ Linéarité $\overline{\phi_1 + \phi_2} = \bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2$

- ✓ Commutativité $\overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_k} \quad (k = 1, 3), \quad \overline{\frac{\partial \phi}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t}$

- ✓ Par construction $\overline{\phi'} = 0 \iff \bar{\bar{\phi}} = \bar{\phi}$

$$\overline{\phi\psi} = \bar{\phi}\bar{\psi}$$

Equations de champ moyen

- ☑ Conservation de la masse

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

- ☑ Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \bar{f}_i \quad (i = 1, 3)$$

Tenseur de Reynolds

- ☑ Moment d'ordre 2 des fluctuations de vitesse

$$\overline{u_i u_j}(\mathbf{x}, t) = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j}(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\overline{u'_i u'_j}(\mathbf{x}, t)}_{R_{ij}(\mathbf{x}, t)} = \bar{u}_i \bar{u}_j(\mathbf{x}, t) + R_{ij}(\mathbf{x}, t)$$

- ☑ Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \bar{f}_i - \frac{\partial}{\partial x_j} R_{ij} \quad (i = 1, 3)$$

Energie cinétique

- ☑ Energie cinétique du champ moyen de vitesse

$$K = \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i$$

- ☑ Equation de conservation de l'énergie cinétique

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} K + \frac{\partial}{\partial x_j} (K \bar{u}_j)}_I = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} \bar{u}_i)}_{II} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_k \partial x_k}}_{III} - \underbrace{\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{IV} + \underbrace{\bar{u}_i \bar{f}_i}_V - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i R_{ij})}_{VI} + \underbrace{R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{VII} \quad (i = 1, 3)$$

Energie cinétique du champ moyen

- ☑ Equation de conservation de l'énergie cinétique

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} K + \frac{\partial}{\partial x_j} (K \bar{u}_j)}_I = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} \bar{u}_i)}_{II} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_k \partial x_k}}_{III} - \underbrace{\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{IV} + \underbrace{\bar{u}_i \bar{f}_i}_V - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i R_{ij})}_{VI} + \underbrace{R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{VII} \quad (i = 1, 3)$$

- ☑ I advection
- ☑ II diffusion spatiale induit par la pression
- ☑ III Diffusion spatiale induit par la viscosité
- ☑ IV Dissipation par effet Joule
- ☑ V Puissance des forces extérieures
- ☑ VI Flux spatial turbulent de K

- ☑ VII Transfer d'énergie entre le champ moyen et le champ fluctuant

Equations du champ fluctuant

- ☑ Conservation de la masse

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0$$

- ☑ Equation pour les fluctuations de vitesse

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j + u'_i u'_j - R_{ij}) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} + f'_i \quad (i = 1, 3)$$

Equation pour le Tenseur de Reynolds

- ☑ Tenseur des déformation des fluctuations

$$S'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$$

- ☑ Equation de conservation de l'énergie cinétique

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} R_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k R_{ij})}_I = - \underbrace{\left(R_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + R_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right)}_{II} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j u'_k}}_{III} - \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p' u'_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p' u'_i} \right)}_{IV} + \underbrace{2 \overline{p' S'_{ij}}}_V + \underbrace{\overline{f'_i u'_j} + \overline{f'_j u'_i}}_{VI} + 2\nu \underbrace{\left(\overline{u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} S'_{ik}} + \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} S'_{jk}} \right)}_{VII}$$

Equation pour le Tenseur de Reynolds

- Equation de conservation de l'énergie cinétique

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} R_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k R_{ij})}_I = - \underbrace{\left(R_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + R_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right)}_{II} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j u'_k}}_{III} - \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p' u'_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p' u'_i} \right)}_{IV} + \underbrace{2 \overline{p' S'_{ij}}}_V + \underbrace{\overline{f'_i u'_j} + \overline{f'_j u'_i}}_{VI} + 2\nu \underbrace{\left(u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} S'_{ik} + u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} S'_{jk} \right)}_{VII}$$

- I advection
- II production/destruction par transferts entre u' et \bar{u}
- III Diffusion turbulente
- IV Diffusion spatiale par la pression
- V production/destruction par p'
- VI travail des forces externes
- VII dissipation par la viscosité moléculaire

Energie cinétique des fluctuations turbulentes

- Energie cinétique des fluctuations

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} R_{ii}$$

- Equation de conservation de l'énergie cinétique des fluctuations turbulentes

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{K} + \frac{\partial}{\partial x_l} (\bar{u}_l \mathcal{K})}_I = - \underbrace{R_{il} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l}}_{II} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u'_i u'_i u'_l}}_{III} - \underbrace{\varepsilon}_{IV} + \underbrace{\overline{f'_i u'_i}}_V - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \overline{p' u'_l}}_{VI} + \nu \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \mathcal{K}}_{VII}$$

Energie cinétique des fluctuations turbulentes

- Interprétations des termes

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{K} + \frac{\partial}{\partial x_l} (\bar{u}_l \mathcal{K})}_I = \underbrace{-R_{il} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l}}_{II} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u'_i u'_i u'_l}}_{III} - \underbrace{\varepsilon}_{IV} + \underbrace{\overline{f'_i u'_i}}_V$$

$$- \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \overline{p' u'_l}}_{VI} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \mathcal{K}}_{VII}$$

- I Advection
- II Production par interaction avec le champ moyen
- III Diffusion turbulente
- IV Taux de dissipation de l'énergie cinétique des fluctuations turbulentes
- V Travail des forces extérieures
- VI Diffusion spatiale par p'
- VII Diffusion spatiale induite par action de la viscosité moléculaire

$$\varepsilon \equiv \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}}$$

Calcul de champ moyen de vitesse



R.J. Gomez,
NASA Johnson
Space Center
(1995)

**Ecoulement
turbulent
compressible**